Delprøve 1, 31. maj 2013 vejledende besvarelse - matematik B

Opgave 1:

Den lineære funktion f er givet ved $f(x) = ax + b$.
Grafen for f går gennem punkterne $P(1,1)$ og $Q(4,10)$.

a) Bestem tallene a og b.

Besvarelse:

For løsning af denne opgave, benyttes formlerne for a og b, idet to punkter er givet. Dette udregnes sådan. Først for a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 1}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

Nu regnes b.

$$b = y_1 - ax_1 = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \; eller \; y_2 - ax_2 = 10 - 3 \cdot 4 = -2$$

Vi har forskriften:

$$f(x) = 3x - 2$$

Så en ret voksende linje, med begyndelsesværdi på andenaksen i $(0, -2)$.

Opgave 2:

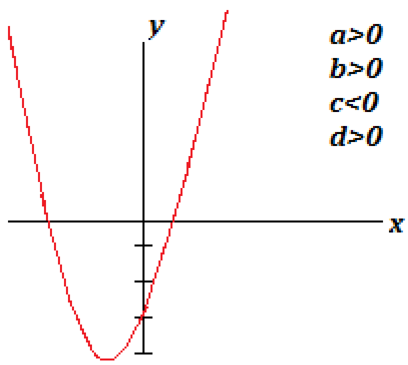
Der er givet funktionen $f(x) = ax^2 + bx - 3$, hvor a og b er positive tal.
Grafen for f kan se ud på mange måder.

a) Skitsér en mulig graf for f.

Besvarelse:

Vi tegner en graf i Paint. Grafen kan se ud på mange måder, men det kræves, at $a > 0$ og $b > 0$. Vi ved, at $c < 0$ fordi $c = -3$.

Dette er *en* mulig graf ud af mange.



Opgave 3:

Der er givet funktionerne $f(x) = 2x^4 - 3x$ og $g(x) = 4\ln(x) + 5$.

a) Bestem $f'(x)$ og $g'(x)$.

Besvarelse:

Her er angivet to funktioner for f og g, der ønskes differentierede. Vi starter med f.

$$f'(x) = 4 \cdot 2x^{4-1} - 3 \Leftrightarrow 8x^3 - 3$$

Tilsvarende regnes for g.

$$g'(x) = \frac{4}{x}$$

Dvs. disse angiver de afledede funktioner for de oprindelige funktioner. Integreres disse, findes stamfunktionen og vi vil komme tilbage til de oprindelige funktioner $+k$.

Opgave 4:

I et lukket område slipper man 150 markmus ud. Antallet af markmus i området vokser med 39 % om måneden.

a) Indfør passende betegnelser, og bestem en formel for antal mus som funktion af antal måneder, efter at de blev sluppet ud i området.

Besvarelse:

Da x er absolut og y er relativ er der hermed tale om en eksponentielfunktion, hvor b er begyndelsesværdien og a er fremskrivningsfaktoren. Vi skal omregne a til tal først, inden vi opstiller en model. Dvs. $a = 1 + r$, hvor 39% indsættes på r.

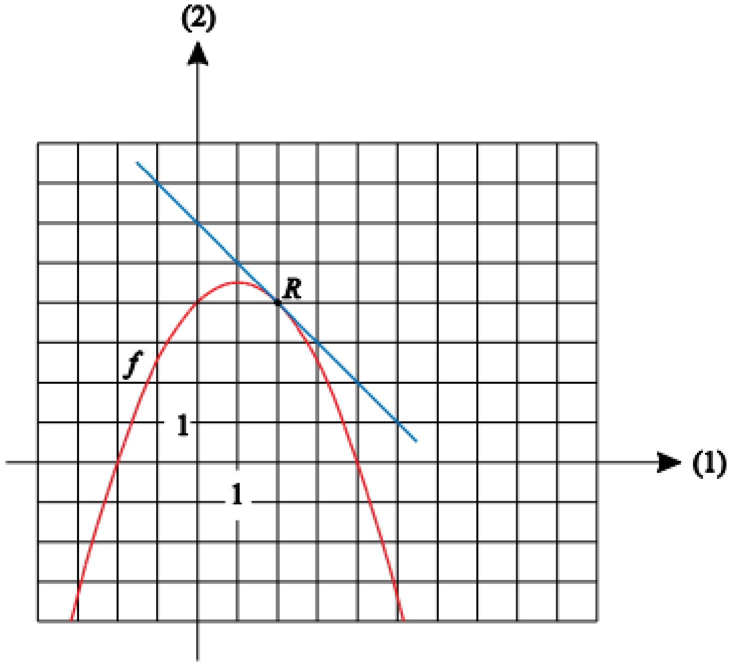
$$a = 1 + \left(\frac{39}{100}\right) = 1 + 0.39 = 1.39$$

Så vi har en model:

$$f(x) = 150 \cdot 1.39^x$$

Hvor b er begyndelsesværdien og a er fremskrivningsfaktoren.

Opgave 5:



Figuren viser grafen for en funktion f og tangenten til denne graf i punktet $R(2, 4)$.

a) Løs ligningen $f(x) = 0$ ved hjælp af figuren.
Bestem $f'(2)$ ved hjælp af figuren.
Brug gerne bilaget som en del af forklaringen.

Besvarelse:

Ligningen løses for $f(x) = 0$, dvs. at andenaksen skal være 0, så $f(x) = 0$ har rødderne i:

$$l = \{-2,4\}$$

Vi bestemmer $f'(2)$. Svar: Ved punktet $R = (2,4)$ ses det, at den tangentlinje der ligger der, er en aftagende ret linje, som aftager med 1, når x vokser med 1. $f'(2) = 4$ fordi ved førsteaksen $(x = 2)$ ses at andenaksen $(y = 4)$.

Opgave 6:

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5$.

a) Bestem samtlige stamfunktioner til f.

Besvarelse:

Ved integrering af f fås F. Vi undersøger de uendelige mange stamfunktioner til f. Dette beskrives med tallet k.

$$F(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + 6 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} + 5x + k \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 5x + k$$

Dvs. stamfunktionen til f er

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 5x + k$$

Hvor k er et tal. Der findes uendelige mange løsninger for k, ved blot at have et punkt som F går igennem.

Delprøve 2, 31. maj 2013 vejledende besvarelse - matematik B

Opgave 7:

År	1980	1985	1990	1998	2003
Vægt (kg)	10,2	9,6	9,1	8,1	7,2

Tabellen viser vægten af vinderens cykel i en række Tour de France cykelløb.
Der er med tilnærmelse tale om en sammenhæng af typen

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor x er antal år efter 1980, og $f(x)$ er vægten af vinderens cykel, målt i kg.

a) Bestem tallene a og b.

b) Hvad fortæller tallet a om udviklingen i vægten af vinderens cykel?

Ifølge cykelunionens regler skal en konkurrencecykel mindst veje 6,8 kg.

c) Hvilket år ville vægten af vinderens cykel have nået 6,8 kg, hvis udviklingen var fortsat?

Besvarelse:

Delopgave a)

For at bestemme tallene a og b, laves en lineær regression i CAS programmet Maple 2015.

$L1 := [0, 5, 10, 18, 23]$

$$[0, 5, 10, 18, 23] \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

$L2 := [10.2, 9.6, 9.1, 8.1, 7.2]$

$$[10.2, 9.6, 9.1, 8.1, 7.2] \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

$LinReg(L1, L2)$

Lineær regression
$y = -0.12725\,x + 10.265.$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.991020425051781$

Dvs. at tallene a og b blev udregnet til hhv. -0.12725 og 10.265

Delopgave b)

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, aftager vægten af rytterens cykel med 0.127kg pr. år.

Delopgave c)

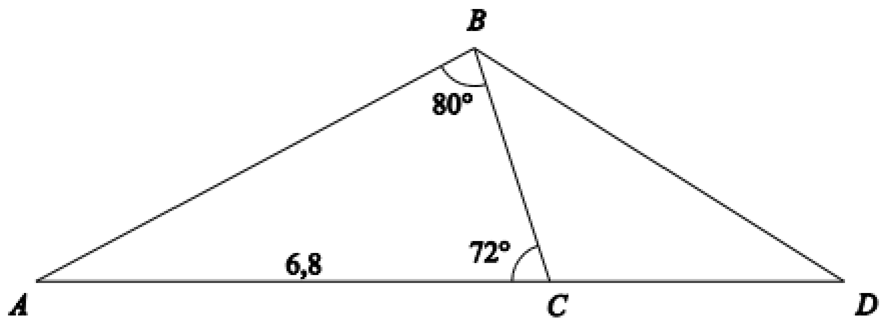
Her løses en førstegradsligning, hvor $y = 6.8$

Vi løser den pr. håndkraft

$$-0.12725x + 10.265 = 6.8 \Leftrightarrow$$
$$-0.12725x = -3.465 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{3.465}{0.12725} \Leftrightarrow$$
$$x = 27.2298625$$

Så man antager, at 1980 er begyndelsesåret, så vi lægger x til. Altså $1980 + 27.229 = 2007.229$ så i løbet af år 2007 vil cyklen have en vægt på 6.8 kg.

Opgave 8:



Figuren viser en trekant ABC. Nogle af målene i trekant ABC fremgår af figuren.

a) Bestem vinkel A og længden af siden BC.

b) Bestem arealet af trekant ABC.

Punktet D ligger på forlængelsen af siden AC. Arealet af trekant BCD er 6,0.

c) Bestem længden af linjestykket CD.

Besvarelse:

Delopgave a)

Vi bestemmer vinkel A. Men da to vinkler allerede kendes, kan vi blot tage summen af trekanten.

$$180^o - 80^o - 72^o = 28^o$$

Så vinkel A vil have en vinkel på 28^o. Vi bestemmer nu længden $|BC|$. Vi benytter derfor sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

Her indsættes oplysningerne fra hhv. A, B og $|AC|$ og en ligning løses:

$$\frac{\sin(28)}{|BC|} = \frac{\sin(80)}{6.8} \Leftrightarrow$$
$$|BC| \cdot \sin(80) = \sin(28) \cdot 6.8 \Leftrightarrow$$
$$|BC| = \frac{\sin(28) \cdot 6.8}{\sin(80)} \Leftrightarrow$$
$$|BC| = 3.241$$

Som er længden $|BC|$

Delopgave b)

Vi skal udregne arealet af trekanten ABC, og dette gøres ved arealformlen for vilkårlige trekanter.

$$T = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin(C)$$

Hvor vores oplysninger indsættes.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 3.241 \cdot 6.8 \cdot \sin(72) \Leftrightarrow$$
$$T = 10.480$$

Så arealet af trekanten ABC er 10.480.

Delopgave c)

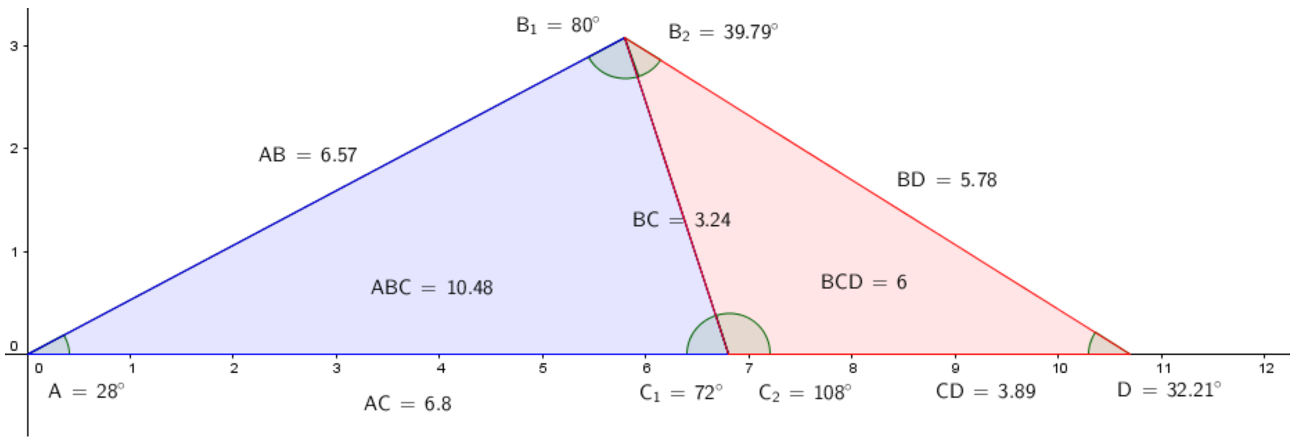
Da en ny trekant BCD tilføjes, gives arealet til 6.0. Vi kender allerede $|BC|$ og vi kan regne vinkel C i trekanten, idet vi kender vinkel C fra trekanten ABC. Vi tager derfor vinkelsummen.

$$180^o - 72^o = 108^o$$

Vi skal derfor løse en ligning for den ukendte længde $|CD|$ v.h.a. arealformlen fra tidligere.

$$6.0 = \frac{1}{2} \cdot 3.241 \cdot |CD| \cdot \sin(108) \Leftrightarrow$$
$$|CD| = 3.893$$

Dette er den ønskede længde af $|CD|$. Trekanten kan visualiseres nedenfor:



Opgave 9:

For kaffedåser med en bestemt højde kan rumfanget V, målt i cm^3, beregnes ved hjælp af formlen

$$V = 37{,}5 \cdot r^2 ,$$

hvor r er dåsens radius, målt i cm.

En dåse med denne højde har en radius på 4,0 cm.

a) Bestem rumfanget af denne dåse.

Producenten ønsker en dåse med samme højde, men med det dobbelte rumfang.

b) Hvor mange procent større skal radius så være?

Besvarelse:

Delopgave a)

Vi vil bestemme rumfanget af dåsen, ved indsættelse af 4.0

$$V = 37.5 \cdot 4.0^2 \Leftrightarrow V = 600$$

Så rumfanget af dåsen, med radius 4.0 er 600 cm^3.

Delopgave b)

Vi vil bestemme den procentvise forskel. Da dåsen skal have den samme højde, men volumen skal være dobbelt så stor. Vi skal derfor udregne radius. Det gøres sådan:

$$2 \cdot 600 = 37.5 \cdot r^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1200}{37.5} = \frac{37.5 \cdot r^2}{37.5} \Leftrightarrow$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{1200}{37.5}} \Leftrightarrow$$
$$r = \pm 5.656854$$

Her giver det mening, at vi arbejder med en radius, hvor $r > 0$. Derfor forkastes den negative værdi. Så konklusionen er, at en dåse med samme højde og dobbelt så stor rumfang, skal have en radius på 5.656854. Vi kender allerede radius fra tidligere, og spørgsmålet var, om hvor mange procent det skal udvides. Derfor gøres følgende:

$$\left(\frac{5.656854}{4} - 1\right) \cdot 100 = 41.42135\%$$

Så radius er 41.42135% større ved en dåse med dobbelt så meget rumfang.

Opgave 10:

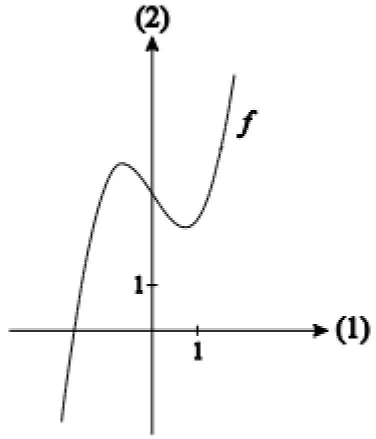
Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x + 3.$$

a) Benyt differentialregning til at argumentere for grafens forløb.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

c) Løs ligningen $f'(x) = 1{,}5$, og gør rede for betydningen af løsningerne.



Besvarelse:

Delopgave a)

Vi differentierer funktionen f.

$$f'(x) = 3x^2 - 1.5$$

Dette er vores afledede funktion af f. Vi sætter ligningen lig med 0 og løser den som en andengradsligning.

$$3x^2 - 1.5 = 0$$

Ligningen løses v.h.a. diskriminanten.

$$d = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1.5) \Leftrightarrow$$
$$d = 18$$

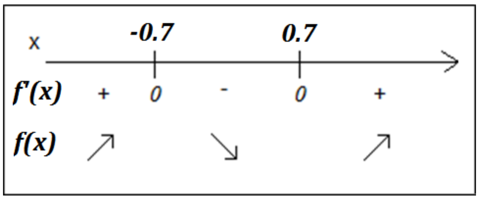
Vi har en diskriminant, der er større end 0, derfor to løsninger.

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{18}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \pm 0.70710$$

Herved kender vi grænserne. Nu ønskes der en vurdering af, om funktionen f er voksende samt aftagende. Der vælges tal der er forskelligt fra ± 0.70710. Der vælges $-1, 0, 1$. Disse indsættes i $f'(x)$.

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1.5 = 1.5$$
$$f'(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^2 - 1.5 = -0.75$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1.5 = 1.5$$

Vi ved nu, hvornår funktionen er voksende og aftagende. En monotonilinje tegnes og en forklaring efterfølgende.



Så vi har at:

f er voksende i intervallet $]-\infty;-0.7]$

f er aftagende i intervallet $[-0.7;0.7]$

f er voksende i intervallet $[0.7;\infty[$

Delopgave b)

Vi skal bestemme tangentligningen. Vi får angivet punktet $(1, f(1))$. Vi indsætter derfor 1 i f og f'.

$$f(1) = 1^3 - 1.5 \cdot 1 + 3 = 1 - 1.5 + 3 = 2.5$$
$$f'(1) = 1.5$$

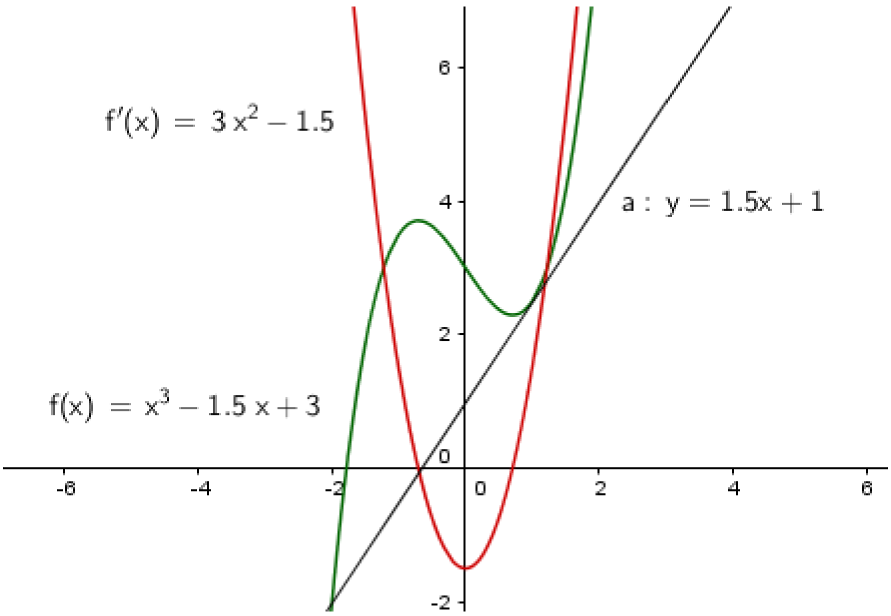
Vi fik endda også bestemt $f'(1)$ tidligere. Vi skal nu benytte os af tangentligningen:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Hvor vores udregninger indsættes.

$$y = 1.5(x-1) + 2.5 \Leftrightarrow y = 1.5x + 1$$

Dette er vores tangentlinje. Vi kan vise det i GeoGebra.



Delopgave c)

Vi skal løse ligningen $f'(x) = 1.5$ og vi har allerede den afledede funktion $f'(x)$, så dette sættes blot lig med hinanden.

$$3x^2 - 1.5 = 1.5 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$x = \pm 1$$

Forklaring af tallene. Løsningen af x giver to x-koordinater, hvorledes tangenten til f går igennem, med hældningskoefficienten 1.5.

Opgave 11:

En person træner på en maskine i et fitnesscenter.
Grafen viser, hvordan personen øger træningseffekten i løbet af træningen.
Træningseffekten, målt i kcal/minut, kan beskrives ved formlen

$$f(x) = 20 \cdot (1 - e^{-x}) + 0{,}5 \cdot x ,$$

hvor x er tiden, målt i minutter.

a) Bestem træningseffekten til tidspunktet $x = 5{,}0$ minutter.

Personens samlede energiforbrug E, målt i kcal, i de første t minutter kan beregnes ved hjælp af formlen

$$E = \int_0^t f(x)\,dx .$$

b) Beregn personens samlede energiforbrug i løbet af de første 10 minutters træning.

c) Hvor mange minutter skal personen i alt træne, for at det samlede energiforbrug bliver 300 kcal?

Besvarelse:

Delopgave a)

Vi har fået angivet en model

$$f(x) = 20 \cdot (1 - e^{-x}) + 0.5x$$

Ved bestemmelse af træningseffekten, indsættes 5 i x's plads.

$$f(5) = 20 \cdot (1 - e^{-5}) + 0.5 \cdot 5 \Leftrightarrow$$
$$f(5) = 22.365$$

Så efter 5 minutter, er træningseffekten på 22.365kcal.

Delopgave b)

Ved hjælp af CAS programmet Maple kan vi integrere funktionen.

$$E = -20 + 20 \cdot t + 20 \cdot e^{-1 \cdot t} + \frac{1}{4} t^2$$

Vi indsætter 10 i t og udregner.

$$E = -20 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot e^{-1 \cdot 10} + \frac{1}{4} 10^2 \Leftrightarrow$$
$$E = 205.0009079985952497$$

Så den samlede energiforbrug, vil efter 10 minutter være på ca. 205kcal.

Delopgave c)

I den her delopgave løses en ligning for t, idet $E = 300$kcal.

$$300 = -20 + 20 \cdot t + 20 \cdot e^{-1 \cdot t} + \frac{1}{4} t^2$$

$$300 = -20. + 20. \cdot t + 20. \cdot e^{-1 \cdot t} + \frac{1}{4} \cdot t^2$$

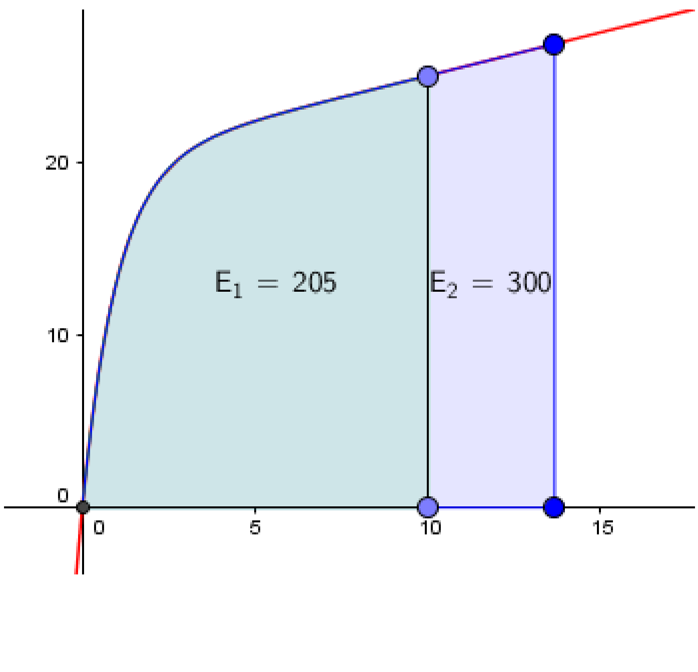
$$300 = -20. + 20. t + 20. e^{-t} + \frac{1}{4} t^2 \qquad \textbf{(8.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

Warning, solutions may have been lost

$[[t = 13.66563059],$ **(8.1.2)**

Dvs. at efter 13.665 minutter, vil den samlede energiforbrug være på 300kcal. I Maple udregnes det sådan på næste side:



Delopgave b)

Vi indsætter den nye formel.

$$E = \int_0^t f(x)\,dx:$$

Her indsættes tallet 10 på t's plads idet vi skal regne det samlede enegiforbrug ved 10 minutter.

$$E = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

$$E = 205.0009080$$

Så efter 10 minutter vil den samlede energiforbrug være på 205kcal.

Delopgave c)

Her løses der en ligning for t, idet man ønsker tiden for hvor meget, vedkommende skal træne, da den samlede energiforbruget på 300.

$$300 = \int_0^t f(x)\,dx$$

$$300 = -20. + 20.\,t + 20.\,e^{-1.\,t} + 0.2500000000\,t^2$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

Warning, solutions may have been lost

$[[t = 13.66563059], [t = -2.935325124], [t = -3.014288927 - 6.586746679\,I], [t = -3.193948076 - 13.08268233\,I], [t = -3.014288927 + 6.586746679\,I], [t = -3.193948076 + 13.08268233\,I]]$

Her ses en række løsninger, men tiden for, at energiforbruget vil være 300 er 13.66 minutter. Dette kan man eftertjekke ved indsættelsen af 13.66 på t's plads. Dette gør vi for at bekræfte vores resulat.

$$E = \int_0^{13.66} f(x)\,dx$$

$$E = 299.8489234$$

Groft sagt passer det, idet decimalerne er afrundet.