

Matematik A, HHX

28. maj 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

- a) Modellen er lineær, så en passende forskrift vil være

$$v(x) = 900 - 50x$$

Hvor $v(x)$ er værdien i kranen, målt i tusind kroner til tidspunktet x , målt i antal år efter anskaffelsen.

Man løser ligningen $v(x) = 400$, dvs.

$$400 = 900 - 50x \Leftrightarrow 400 - 900 = -50x \Leftrightarrow -500 = -50x \Leftrightarrow$$

$$50x = 500 \Leftrightarrow x = \frac{500}{50} = 10$$

Dvs. 10 år efter anskaffelsen, sælger virksomheden sin kran.

Opgave 2:

- a) Eftersom ordet "fordoblingkonstant" indgår, så er grafen for C ikke gyldig, idet den aftager. Dermed må $f(x)$ være graf for C .

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

Grafen for g har en større fordoblingskonstant end grafen for h , dvs. det er den værdi på x -aksen der er størst. Altså må grafen for $g(x)$ være B og endelig er grafen for $h(x)$ den sidste, A .

Opgave 3:

- a) Først differentieres y .

$$y' = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$$

Man indsætter y i differentialligningen og y' ved dy/dx .

$$\begin{aligned} x \cdot \left(3x^2 + 2 + \frac{1}{x}\right) &= x^3 + 2x + \ln(x) - \ln(x) + 1 \\ \Rightarrow 3x^3 + 2x + 1 &\neq x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Dermed er y ikke en løsning til differentialligningen pga. koefficienten 3.



Opgave 4:

- a) Stamfunktionen til $f(x)$ benævnes med $F(x)$, og man har

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (8x^3 - 3x^2 + 4) = 2x^4 - x^3 + 4x + k$$

Benyt punktet $P(1; 5)$. Så kan man finde k og dermed en partikulær stamfunktion.

$$5 = 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 4 \cdot 1 + k \Leftrightarrow 5 + k = 5 \Leftrightarrow k = 0$$

Dermed er den partikulære stamfunktion

$$F(x) = 2x^4 - x^3 + 4x$$

Opgave 5:

- a) Man anvender hjørnemetoden. På grafen kan man se følgende, man kan teste: $(0; 0)$, $(0; 9)$, $(2; 7)$, $(4; 3)$ og $(5; 0)$. Det er oplagt at teste $(2; 7)$ og $(4; 3)$.

$$f(2; 7) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 6 + 14 = 20$$

$$f(4; 3) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$$

Dermed er den største værdi fundet til at være 20.

MATEMATIK UNIVERSET
Universet med vejledende besvarelser til indlæring



Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 6: Via Maple

- a) I den angivende fil *travel* laves der en pivot tabel, og den skrives pænt ind i Word, lidt ligesom den angivende i opgavesættet.

	Big Mere end 250 ansatte	Midsized 50-249 ansatte	Small Op til 49 ansatte	Total
a. 1-4 gange om året	218	171	301	690
b. 5-6 gange om året	37	35	33	105
c. 1-2 gange om måneden	15	15	12	42
d. 3 gange eller flere om måneden	11	10	10	31
Total	281	231	356	868

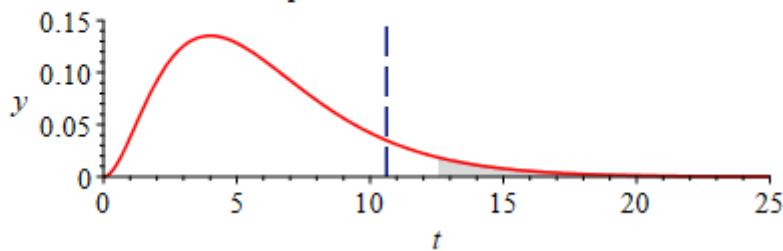
- b) Nulhypotesen er: Der er ingen sammenhæng mellem hvor meget en medarbejder rejser og størrelsen på ansættelsesstedet. Vha. Maple udregnes teststørrelsen.

with(Gym) :

$$obs := \begin{bmatrix} 218 & 171 & 301 \\ 37 & 35 & 33 \\ 15 & 15 & 12 \\ 11 & 10 & 10 \end{bmatrix} :$$

ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)

$$\begin{aligned} \chi^2\text{-teststørrelse} &= 10.624 \\ \text{Frihedsgrader} &= 6 \\ \text{Kritisk værdi} &= 12.592 \\ p\text{-værdi} &= 0.10070 \end{aligned}$$



Da *p*-værdien er større end 5%, så accepteres hypotesen.



- c) I Maple bruges binomialkommandoen.

$\text{bincdf}(25, 0.85, 15)$

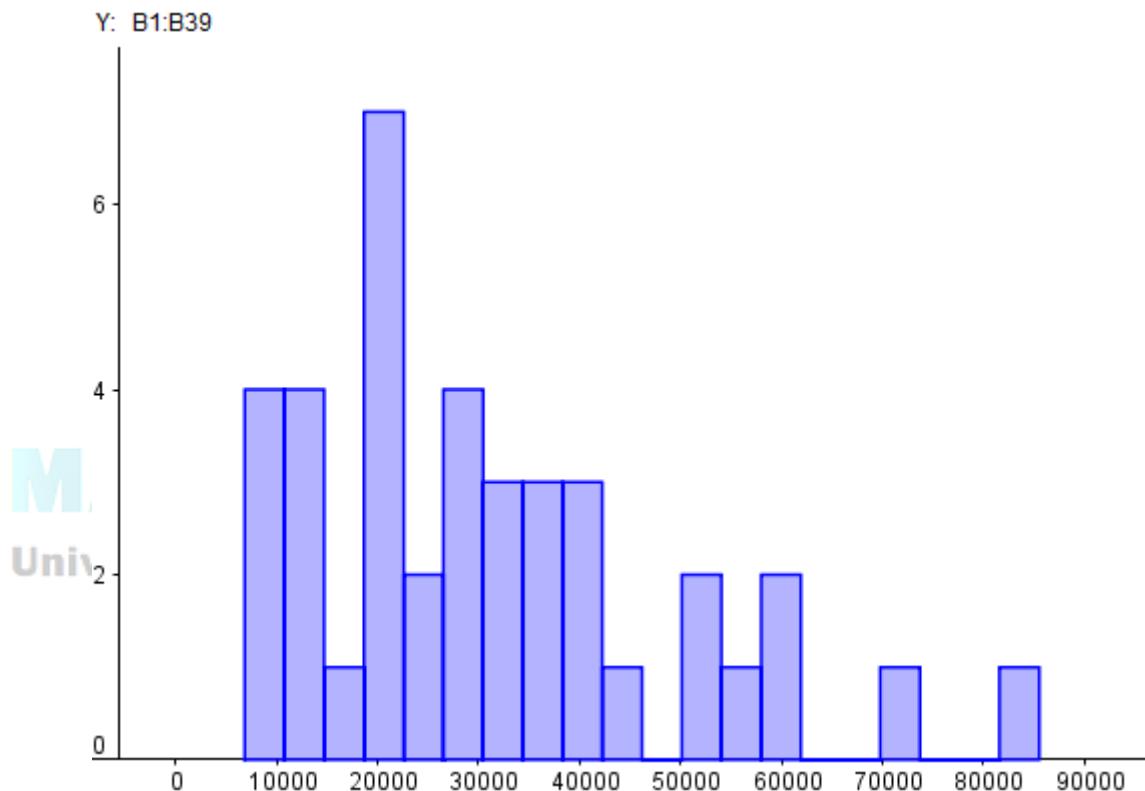
0.002141267105

(1)

Så sandsynligheden er 0.214%.

Opgave 7: Via GeoGebra

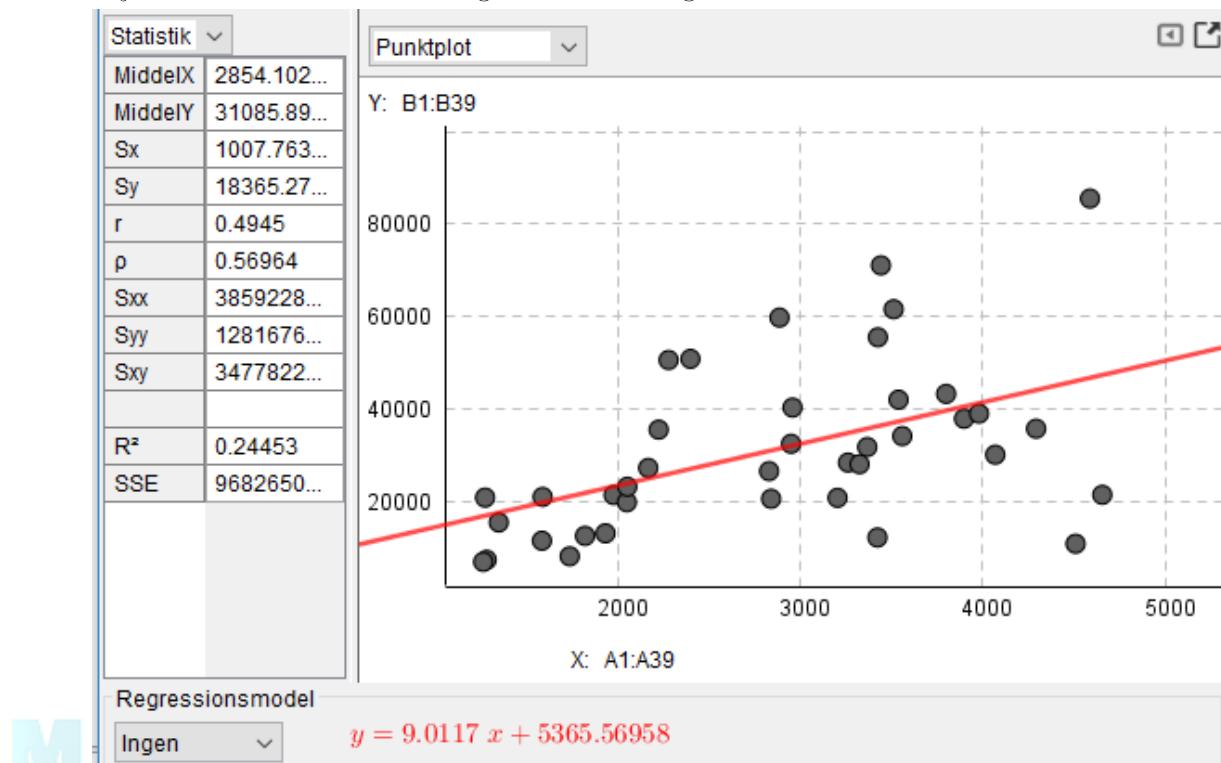
- a) Vha. Excel filen *bilferie* indlæses tallene i GeoGebra og man får følgende histogram



Hvor y -aksen angiver hyppigheder og x -aksen angiver beløbet.



- b) Gennemsnittet af km kørt og beløb bestemmes. Dette gøres ved at bruge søjlerne om antal kørt km og beløbet. Det giver



Det betyder, at gennemsnittet for antal kørt km. Er 2854.1km og gennemsnittet for beløbet er 31085.9kr.

- c) Fra spørsmål b) kan man se den bedste rette linje samt punktplot. Den rette linje er $y = 9.0117x + 5365.56958$



- d) Man bruger en konfidensinterval-lommeregner, som kan hentes her:

<https://www.geogebra.org/m/nKJpKryR>

Beregning af konfidensintervaller for regressionskoefficienter

$n = 39$ Her indtastes antallet af punkter.

$1 - \alpha = 0.95$ Her indtastes konfidensniveauet.

$\hat{a} = 9.0117$ Regressionskoefficienten er hældningen af bedste rette linje.

$R^2 = 0.24453$ Determinationskoefficienten kaldes også forklaringsgraden.

Resultater

$df = n - 2$	37	Antal frihedsgrader
t	2.0262	$1 - \frac{\alpha}{2}$ fraktilen af en t-fordeling med $n - 2$ frihedsgrader.
$SE = \hat{a} \cdot \left(\frac{1 - R^2}{df \cdot R^2} \right)^{\frac{1}{2}}$	2.6040	Standardfejl
$\hat{a} - t \cdot SE$	3.7354	Nedre grænse
$\hat{a} + t \cdot SE$	14.288	Øvre grænse

Dette script er udarbejdet af Peter Harremoës og er baseret på GeoGebra Ver. 5.0 og sidst opdateret 16/5 2017.
Eventuelle kommentarer kan rettes til harremoes@ieee.org .



Ifølge beregneren er intervallet
[3.7354; 14.288]

- e) Overlades til læseren. God øvelse i at skrive en god tekst. Husk at inddrag elementer fra a), b), c) og d).

Opgave 8:

- a) Man løser ligningen

$$\begin{aligned}
 2000000 &= x - \frac{0.5}{100} \cdot x - \frac{1.5}{100} \cdot x - 5000 \Leftrightarrow \\
 2000000 &= 0.98x - 5000 \Leftrightarrow \\
 2005000 &= 0.98x \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{2005000}{0.98} = 2045918.37
 \end{aligned}$$

Så det passer.



b) Man bruger formlen

$$y = 2045918.37 \cdot \frac{\frac{0.5}{100}}{1 - \left(1 + \frac{0.5}{100}\right)^{-120}} = 22713.888$$

Som er den kvartårlige ydelse.

c) Den årlige effektive rente er

$$r = ((1 + 0.005)^4 - 1) = 0.02015 = 2.015\%$$

Opgave 9: Via Maple

a) Funktionen defineres i Maple.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 2 \\ f &:= x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 2 \end{aligned} \quad (1)$$

Hvor $x \geq 0$.

Tangentens ligning t er
 $y = f'(6) \cdot (x - 6) + f(6)$
 $y = 8x - 38$ (2)

b) Funktionen defineres i Maple.

$$\begin{aligned} g(x) &:= -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x - 8 \\ g &:= x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x - 8 \end{aligned} \quad (3)$$

Hvor $x \geq 0$. Vendetangent betyder, at grafen går fra konveks til konkav. Man kan finde punktet P vha. den anden afledede.

$$g''(x) = 0 \quad -2x + 6 = 0 \quad (4)$$

solve for x [[x=3]] (5)

Da er
 $g(3) = -14$ (6)

Så man har punktet $P(3; -14)$.



c) I Maple defineres tangenten og indskudsreglen bliver anvendt.

$$T(x) := 8x - 38$$

$$T := x \mapsto 8x - 38 \quad (7)$$

Arealet af A bestemmes.

$$A = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx + \int_3^6 (f(x) - T(x)) dx$$

$$A = \frac{279}{4} \quad (8)$$

$$\text{evalf}[5](\%)$$

$$A = 69.750 \quad (9)$$

Opgave 10:

a) I tabellen nedenfor er forklaringerne angivet.

S skal differentieres og sættes lig 0 for at bestemme den stykafgift, som giver det største skatte provenu
Den differentierede funktion S er blevet sat lig med 0.
Man trækker brøken $\frac{d-b}{a-c}$ fra på begge sider, og multiplicerer med $a - c$ på begge sider.
Brøken forkortes med $a - c$, idet det indgår i tæller og nævner.

b) Man har fået angivet to funktioner. For $P_D(x)$ har man $b = 24000$ og for $P_S(x)$ har man $d = 12000$. Dermed er

$$T = \frac{1}{2} \cdot (24000 - 12000) = \frac{12000}{2} = 6000$$

Som giver den største skattekvote.

Det samlede skattekvote er så

$$S(6000) = \left(\frac{1}{-0.5 - 0.25}\right) 6000^2 + \left(\frac{12000 - 24000}{-0.5 - 0.25}\right) \cdot 6000 = 48\,000\,000$$



Opgave 11A: Via Maple

- a) I Maple udregnes differentialligningen.

Differentialligningen løses.

$$dsolve(\{2.5 \cdot R'(x) = -5 \cdot R(x) + 150, R(0) = 10\}, R(x))$$

$$R(x) = 30 - 20 e^{-2x} \quad (1)$$

Herved er omsætningsfunktionen bestemt.

- b) I Maple løses ligningen $R(x) = 20$.

$$R(x) := 30 - 20 e^{-2x}$$

$$R := x \mapsto 30 - 20 e^{-2x} \quad (2)$$

$$R(x) = 20$$

$$30 - 20 e^{-2x} = 20 \quad (3)$$

solve for x

$$\left[\left[x = \frac{\ln(2)}{2} \right] \right] \quad (4)$$

$$evalf[5](%)$$

$$[[x = 0.34658]] \quad (5)$$

Så markedsføringen skal være 0.347mio. kr. (ca. 347000kr), hvis omsætningen skal være 20mio. kr.

Opgave 11B: Via Maple

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

- a) I Maple regnes opgaven.

$$C(x) = \frac{100 \cdot s \cdot T}{x} + 8 \cdot T \cdot x$$

Hvor $x > 0$.

Lad $s = 5$ og $T = 100$, så er

$$\frac{100 \cdot 5 \cdot 100}{x} + 8 \cdot 100 \cdot x = 13000$$

$$\frac{50000}{x} + 800x = 13000 \quad (1)$$

solve for x

$$\left[[x = 10], \left[x = \frac{25}{4} \right] \right] \quad (2)$$

$$evalf[5](%)$$

$$[[x = 10.], [x = 6.2500]] \quad (3)$$

Så varemængden er hhv. 6.25kg og 10kg.



- b) I Maple differentieres funktionen.

$$C(x) := \frac{100 \cdot 5 \cdot 100}{x} + 8 \cdot 100 \cdot x$$

$$C := x \mapsto \frac{50000}{x} + 800x \quad (4)$$

Og man løser ligningen

$$C'(x) = 0$$

$$-\frac{50000}{x^2} + 800 = 0 \quad (5)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$7.905694150 \quad (6)$$

Da $x > 0$. Den anden afledeede benyttes.

$$\text{is}(C''(7.905694150) > 0)$$

$$\text{true} \quad (7)$$

Det betyder, at $x = 7.91$ kg giver de mindste råvareudgifter.

Opgave 11C:

- a) Man indsætter forskrifterne fra de angivende funktioner

$$r(x) = -50x + 10000, \quad 0 \leq x \leq 200$$

$$b(y) = 8000, \quad y \geq 0$$

$$C(x, y) = 2000x + 2000y + 500000$$

Så er

$$P(x, y) = x \cdot (-50x + 10000) + y \cdot (8000) - (2000x + 2000y + 500000)$$

$$= -50x^2 + 10000x + 8000y - 2000x - 2000y - 500000$$

$$= -50x^2 + 8000x + 6000y - 500000$$

- b) Man har $y \leq 100$, som indsættes i $P(x, y)$, dvs. $P(x, 100)$, så får man en funktion med en variabel, kald den $f(x)$.

$$f(x) = -50x^2 + 8000x + 6000 \cdot 100 - 500000$$

$$= -50x^2 + 8000x + 100000$$

Dernæst løs ligningen $f'(x) = 0$, dvs.

$$-100x + 8000 = 0$$



Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = 80$$

Dvs. det mest optimale er at have 80 racer cykler og 100 bedstemor cykler for at man får den største overskud.

