Matematik A-niveau

27. maj 2020

Matematikhfsvar.page.tl

Minimale løsningsskitser til STX A-niveau eksamen d. 27/05/20. Af CAS kræves: Maple 2019
NB: Dette er ikke en elevbesvarelse! E-mail: matematikuniverset@hotmail.com

Delprøve 1:
Denne delprøve besvares ved hjælp af formelsamlingen.

Opgave 1.

a) Integralet bestemmes ved ledvis integration og ved hjælp af regnereglerne fra formelsamlingen.

$$\int (e^x + 5)dx = e^x + 5x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Opgave 2.

a) Normale udfald kræver $\mu \pm 2\sigma$. Disse er oplyst. Dermed er de normale udfald givet ved,

$$[3.38 - 2 \cdot 0.57; 3.38 + 2 \cdot 0.57] = [2.24; 4.52].$$

b) Man aflæser på bilaget. Sandsynligheden for, at fødselsvægten for en pige er mindre end 4 kg er $P(X \leq 4)$. Det er aflæst til ca. 0.83=83%.

Opgave 3.

a) Anvend formel [190]. Heraf aflæses centrum og radius til, $C(3, 1)$ og $r = 6$.

b) $\vec{s}(0)$ bestemmes ved,

$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\cos(0) \\ 6\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Den afledede vektorfunktion, dvs. hastighedsfunktionen er,

$$\vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -6\sin(t) \\ 6\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Opgave 4.

a) Man beregner $n = 2$ ud fra differensligningen. Her er $y_0 = 51$.

$$y_1 = 2 \cdot 51 + 8 = 110,$$
$$y_2 = 2 \cdot 110 + 8 = 228.$$

Dvs. ved $n = 2$ er der 228 millioner bakterier.

b) Differensligningen på lukket form er,

$$y_n = 2^n \cdot 51 + 8 \cdot \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 59 \cdot 2^n - 8.$$

Man kan tjekke $n = 2$ er 228 millioner bakterier ved den lukkede formel. Her er $y_2 = 59 \cdot 2^2 - 8 = 228$.

Opgave 5.

a) For bestemmelse af $f'(0)$ indsættes $f(x = 0) = 8$ i differentialligningen, dermed er

$$f'(0) = 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 6 - 4 = 2.$$

b) Differentialligningen er en standard differentialligning. Ved anvendelse af formelsamlingen kan man bestemme den fuldstændige løsning og efterfulgt, den partikulære løsning.

$$y = 12 + ce^{-\frac{x}{2}}.$$

Punktet $(0, 8)$ benyttes.

$$8 = 12 + ce^{-\frac{0}{2}} \Longleftrightarrow c = -4.$$

Dermed er,

$$y = 12 - 4e^{-\frac{x}{2}}.$$

Opgave 6.

a) Hvis $a = 3$ og $b = 20$, så er $f(x) = 3x^3 + 20x^2 + 12x + 10$ og dermed $f'(x) = 9x^2 + 40x + 12$. Antallet af løsninger findes ved diskriminanten. Lad $P(x) = px^2 + qx + r$, så er $d = q^2 - 4pr$. Sæt $p = 9$, $q = 40$ og $r = 12$, så er $d = 40^2 - 4 \cdot 9 \cdot 12 = 1168 > 0$. Derfor er der to reelle løsninger.

b) Lad $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 12$. Med $f'(-2) = 0$ og $f'(2) = 12$, så kan konstanterne nemt bestemmes. Indsættes oplysningerne i $f'(x)$ fås ligningerne,

$$12a - 4b + 12 = 0, \tag{1}$$
$$12a + 4b + 12 = 12. \tag{2}$$

Trækkes (2) fra (1) fås ligningen $-8b = -12$. Løses denne fås $b = \frac{3}{2}$. Denne indsættes i enten (1) eller (2), så a kan bestemmes. Vi indsætter i (1).

$$12a - 4 \cdot \frac{3}{2} + 12 = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Delprøve 2: Denne del besvares i Maple og kan ses på næste side.

Matematik A
27. maj 2020

Løsningsskitser til STX A-niveau eksamen d. 27/05/20.
NB: Dette er ikke en elevbesvarelse!

Opgave 7

restart; *with*(*Gym*) :

a)

$f(x) := 3 - x - \ln(4 - x)$:

Arealet af M.

$A_M = \int_0^3 f(x)\, dx$

$$A_M = \frac{15}{2} - 8\ln(2) \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

evalf[5]((**1.1.1**))

$$A_M = 1.9548 \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

Dvs. arealet af M er ca. 1.9548 ifølge beregningen.

b)

Næsten samme metode.

$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^3 (f(x))^2\, dx$

$$V = \pi\left(\frac{33}{2} - 32\ln(2) + 16\ln(2)^2\right) \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

evalf[5]((**1.2.1**))

$$V = 6.3033 \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

Dvs. volumen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinataksen

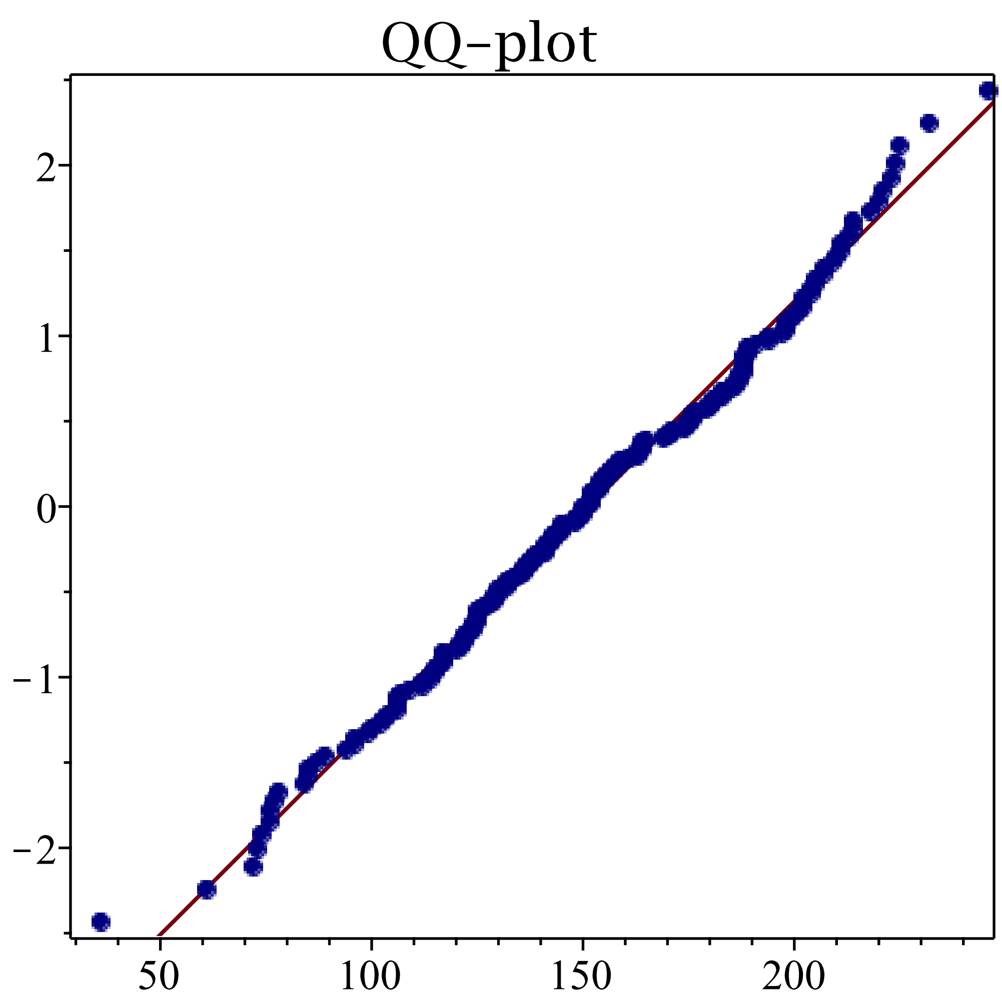
Opgave 8

restart; *with*(*Gym*) :

a)

DATA := [117, 157, 169, 155, 143, 207, 164, 183, 189, 128, 127, 143, 214, 76, 114, 204, 106, 197, 246, 152, 130, 85, 188, 99, 154, 171, 129, 176, 224, 30, 148, 103, 36, 124, 199, 134, 122, 85, 175, 117, 154, 125, 164, 163, 132, 159, 156, 125, 132, 152, 175, 211, 142, 246, 188, 150, 187, 225, 150, 180, 214, 163, 136, 87, 186, 150, 157, 163, 194, 200, 174, 202, 120, 137, 201, 138, 152, 155, 151, 164, 136, 164, 202, 198, 181, 159, 106, 188, 154, 223, 187, 72, 74, 139, 232, 129, 107, 145, 189, 188, 202, 207, 112, 116, 141, 141, 130, 188, 114, 174, 124, 150, 104, 205, 106, 221, 109, 141, 198, 106, 115, 213, 177, 170, 123, 84, 89, 145, 158, 94, 211, 112, 100, 73, 153, 185, 156, 188, 187, 78, 186, 154, 165, 183, 96, 96, 149, 135, 220, 121, 122, 194, 204, 152, 115, 61, 176, 142, 77, 209, 136, 144, 189, 176, 126, 191, 161, 137, 139, 133, 183, 125, 210, 152, 122, 121, 125, 138, 179, 218, 141, 205, 148, 130, 149, 132, 125, 143, 198, 152, 181, 129, 171, 117, 180, 76, 145, 158, 117, 145, 124, 102] :

QQplot(*DATA*)



Da tabellens data ligger tilnærmelsesvis lineært, så følger det at der er tale om en normalfordeling.

b)

Lad $\mu := 151.4 :$ og $\sigma := 40.4 :$ Det antages, at $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Sandsynligheden for mere end 200 point er,

$$P(X > 200) = 1 - \int_{-\text{infinity}}^{200} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(- \frac{(\text{mu} - x)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$P(200 < X) = 0.1144939078 \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Dvs. sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt dansk skolebarn får mere end 200 point i en test af denne type er ca. 11.4%

Opgave 9

restart; *with*(*Gym*) :

a)

Forskriften for $K(t)$ bestemmes vha. dsolve.

$dsolve(\{K'(t) = 0.00106 \cdot K(t) \cdot (222.9 - K(t)), K(0) = 18\}, K(t))$

$$K(t) = \frac{13374}{60 + 683\,\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}} \quad \textbf{(3.1.1)}$$

Definér forskriften.

$$K(t) := \frac{13374}{60 + 683\,\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}} :$$

b)

Tallet 222.9 er modellens øvre grænse, dvs. verdens samlede kapacitet til produktion af vedvarende energi kan ikke overstige 222.9GW.

c)

Det sted, hvormed kapaciteten vokser hurtigst kan beregnes på to måder.

Metode 1:

$K''(t) = 0$

$$\frac{435356072695158341 67\left(\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}\right)^2}{62500000000\left(60 + 683\,\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}\right)^3} - \frac{63741738315542949\,\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}}{125000000000\left(60 + 683\,\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}\right)^2} = 0 \quad \textbf{(3.3.1)}$$

$evalf[5](solve(\textbf{(3.3.1)}))$

$$10.294 \quad \textbf{(3.3.2)}$$

Dvs. ved $t = 10.294$ svarende til år 2011 voksede kapaciteten hurtigst.

Metode 2:

$$K(t) = \frac{222.9}{2}$$

$$\frac{13374}{60 + 683\,\mathrm{e}^{-\frac{118137\,t}{500000}}} = 111.4500000 \quad \textbf{(3.3.3)}$$

$solve(\textbf{(3.3.3)})$

$$10.29377036 \quad \textbf{(3.3.4)}$$

Dvs. ved $t = 10.294$ svarende til år 2011 voksede kapaciteten hurtigst.

Opgave 10

restart; *with*(*Gym*) :

a)

Funktionen defineres.

$f(x, y) := \exp(x^2 - 4x + y^2 + 6y)$:

Gradienten for f bestemmes.

$f(x, y) \xrightarrow{\text{gradient } (x0,y0)}$

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-3} \\ 6\,\mathrm{e}^{-3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.1)}$$

Det kan eftervises ved beregning.

$grad(f) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)), \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) \right\rangle$

$$grad(f) = \begin{bmatrix} (2x - 4)\,\mathrm{e}^{x^2 + y^2 - 4x + 6y} \\ (2y + 6)\,\mathrm{e}^{x^2 + y^2 - 4x + 6y} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.2)}$$

Med $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$ er,

$grad(f) = \begin{bmatrix} (2 \cdot 1 - 4)\,\mathrm{e}^{1^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0} \\ (2 \cdot 0 + 6)\,\mathrm{e}^{1^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0} \end{bmatrix}$

$$grad(f) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-3} \\ 6\,\mathrm{e}^{-3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.3)}$$

evalf[5]((**4.1.3**))

$$grad(f) = \begin{bmatrix} -0.099574 \\ 0.29872 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.4)}$$

b)

Det vides, at f har et stationært punkt P. Denne findes ved at løse $grad(f) = 0$. Dvs.

$solve\left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0 \right\}\right)$

$$\{x = 2, y = -3\} \quad \textbf{(4.2.1)}$$

Og dermed er z-koordinaten,

$f(2, -3)$

$$\mathrm{e}^{-13} \quad \textbf{(4.2.2)}$$

Dvs. punktet P er,

$P(2, -3, \mathrm{e}^{-13})$.

Opgave 11

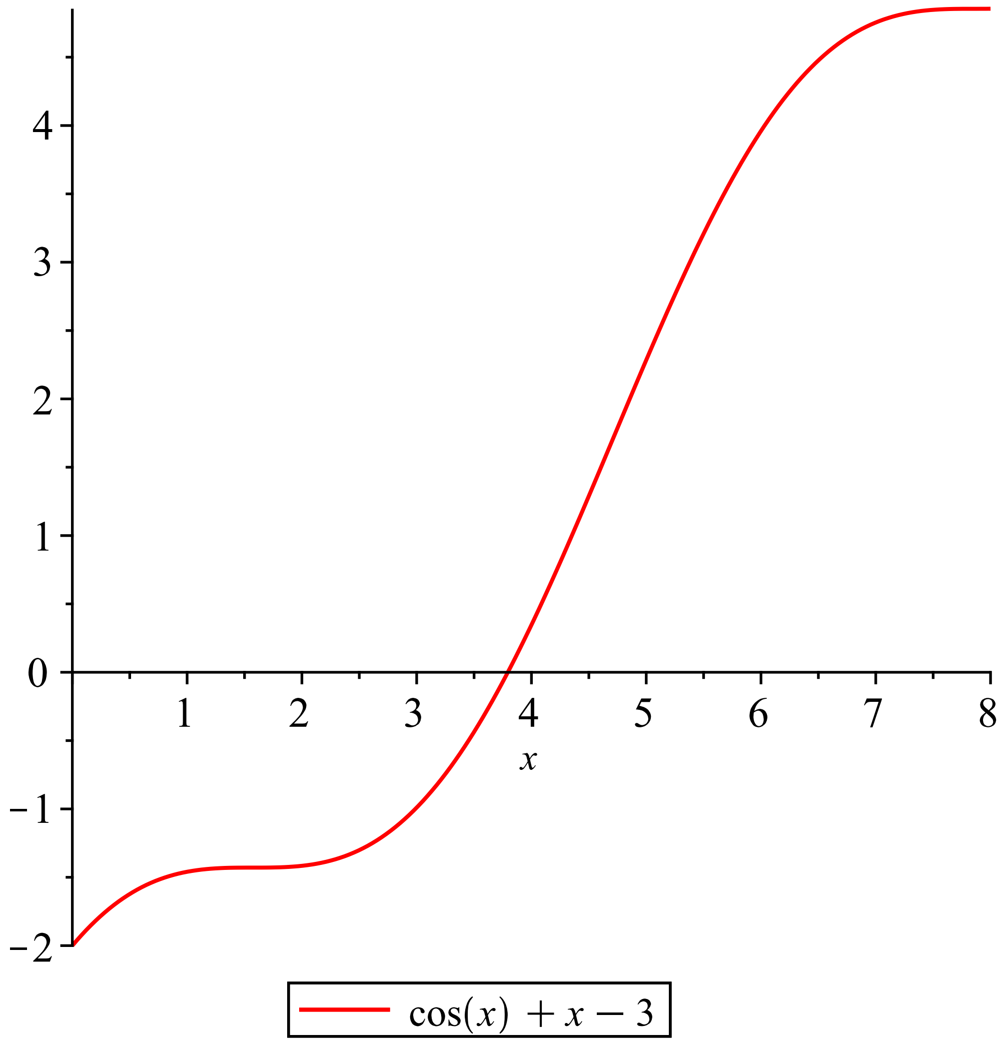
restart; *with*(*Gym*) :

a)

Funktionen defineres.

$f(x) := \cos(x) + x - 3$:

$plot(f(x), x = 0..8, legend = [f(x)], color = red)$



b)

$with(Student[Calculus1])$:

$NewtonsMethod(f(x), x = 5, output = sequence, iterations = 10)$

$$5, 3.834226409, 3.794765356, 3.794388648, 3.794388613 \quad \textbf{(5.2.1)}$$

$evalf[6](\%)$

$$5., 3.83423, 3.79477, 3.79439, 3.79439 \quad \textbf{(5.2.2)}$$

Med 5 betydne cifre, kan det sluttes, at $x = 3.79439$.

Opgave 12

$restart; with(Gym):$

a)

$\vec{r}(t) := \langle k \cdot t, 10\,t - 3\,t^2 \rangle :$
$k := 2 :$

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$
Derfor,
$\vec{v}(t) := \langle k, 10 - 6\,t \rangle :$
$len(\vec{v}(1))$

$$2\sqrt{5} \tag{6.1.1}$$

$evalf[5]((\mathbf{6.1.1}))$

$$4.4722 \tag{6.1.2}$$

Fodboldens fart er 4.4722m/s.

b)

Det sted hvor fodbolden lander på jorden er ved x-aksen, hvilket kræver $y(t) = 0$.
Dermed er ligningen,
$10\,t - 3\,t^2 = 0$

$$-3\,t^2 + 10\,t = 0 \tag{6.2.1}$$

$solve((\mathbf{6.2.1}))$

$$0, \frac{10}{3} \tag{6.2.2}$$

$\vec{r}\left(\frac{10}{3}\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.3}$$

$evalf[5]((\mathbf{6.2.3}))$

$$\begin{bmatrix} 6.6667 \\ 0. \end{bmatrix} \tag{6.2.4}$$

Så bolden lander 6.7m væk efter sparket.

c)

Her landte bolden 26m væk. Næsten samme måde som i b).
$unassign('k')$
$\vec{r}(t) = \langle 26, 0 \rangle$

$$\begin{bmatrix} k\,t \\ -3\,t^2 + 10\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.1}$$

Fra tidligere fik man, at $t = \frac{10}{3}$. Dermed er

$k \cdot \frac{10}{3} = 26$

$$\frac{10\,k}{3} = 26 \tag{6.3.2}$$

$solve(\mathbf{(6.3.2)})$

$$\frac{39}{5} \tag{6.3.3}$$

$evalf[5](\mathbf{(6.3.3)})$

$$7.8000 \tag{6.3.4}$$

Dvs. k er 7.8, når bolden lander 26m væk efter sparket.