Matematik B-niveau HF
15. august 2018

Dette er minimale løsningsskitser til HF B-niveau eksamen d. 15/08/18. Af CAS kræves: Maple 2020.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: `matematikuniverset@hotmail.com`

OBS: Vi har ikke fået den rigtige version. Derfor kan du ikke se løsningerne til opgave 6 og opgave 14. Har du det rigtige sæt? Send gerne. ☺

Delprøve 1.

Opgave 1.

(a) Funktionen f differentieres. Man får

$$f'(x) = (3x+1)' = 3. \tag{1}$$

(b) Funktionen g differentieres. Dette gøres ved hjælp af kædereglen. Endvidere ser man, at $g(x)$ er en sammensat funktion hvor $f(x)$ indgår som den indre funktion, så lad $h(x) = x^5$ være den ydre funktion. Fra a) så man, at $f'(x) = 3$. Dernæst differentieres $h(x)$. Man får $h'(x) = (x^5)' = 5x^4$. Da $g(x) = h(f(x))$ så siger kædereglen $g'(x) = h'(f(x))f'(x)$, så

$$g'(x) = 5(3x+1)^4 \cdot 3 = 15(3x+1)^4. \tag{2}$$

Opgave 2.

(a) Her er $X \sim b(16, 0.5)$. Middelværdien bestemmes. $\mu = np = 16 \cdot 0.5 = 8$. Spredningen bestemmes $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8 \cdot 0.5} = 2$.

Opgave 3.

(a) Afstanden mellem A og B bestemmes.

$$|AB| = \sqrt{(7-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5. \tag{3}$$

(b) Bestem hældningen af linjestykket.

$$a = \frac{4-1}{7-3} = \frac{3}{4}. \tag{4}$$

Hvis l skal stå vinkelret på linjestykket AB kræver det, at $a \cdot c = -1$ hvor $c = -2$. Man tjekker.

$$\frac{3}{4} \cdot (-2) = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \neq -1. \tag{5}$$

Dermed er l ikke vinkelret på linjestykket AB.

Opgave 4.

(a) Størst differentialkvotient kræver størst hældning i det angivende sted. Af graferne ser man, at hældningen for f i $x = 1$ vil være væsentlig større end hældningen for g i $x = 1$. Altså er f svaret. Et godt råd er at tegne tangenter og selv at aflæse.

Opgave 5.

(a) Af 7 farveblyanter er 4 af dem røde, så $7 - 4 = 3$ er ikke røde. Sandsynligheden for at udvælge to farveblyanter, der ikke er røde er

$$\frac{K(3,2)}{K(7,2)} = \frac{\frac{3!}{\cancel{2!}(3-2)!}}{\frac{7!}{\cancel{2!}(7-2)!}} = \frac{\frac{3!}{1!}}{\frac{7!}{5!}} = \frac{3!5!}{7!1!} = \frac{3!\cancel{5!}}{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}. \tag{6}$$

Opgave 6.

(a) Indsend gerne det originale opgavesæt. Denne type opgave indgår ikke til din skriftlige eksamen.

Opgave 7.

(a) De følgende trin beskrives.
Trin 1: Ligningen er skrevet op.
Trin 2: Første kvadratsætning benyttes på venstre side.
Trin 3: Man ganger ind i parentesen på højre side.
Trin 4: Man reducerer højre side.
Trin 5: Man trækker $9x + 19$ fra på begge sider.
Trin 6: Man reducerer venstre side.

(b) Man løser den fremkommende andengradsligning mht. x.

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 10 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \tag{7}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}. \tag{8}$$

Dvs. $x = \frac{3+7}{2} = 5 \vee x = \frac{3-7}{2} = -2$.

Delprøve 2.

Vi kræver du bruger Maple, hvis du skal få mest ud af løsningerne nedenfor, da der efterlades kommandoer til Maple.

Opgave 8.

(a) Man ønsker at bestemme tallene a, b og c. Vha. Maple kan disse bestemmes ved følgende kommandoer:

```
restart;with(Gym):
L1:=[2,8,14, 20,26,32];
L2:=[11.3,17.7,23.2,27.7,31.1,33.9];
PolyReg(L1,L2,2);
```

Gør man det korrekt får man $a = -0.013095$, $b = 1.1962$ og $c = 8.9743$.

(b) Kvinden måler hudfolden til 24mm. Denne x-værdi indsættes i funktionen og man regner fedtprocenten.

$$f(24) = -0.013095 \cdot (24)^2 + 1.1962 \cdot (24) + 8.9743 = 30.14. \tag{9}$$

Dvs. med en hudfold på 24mm har man en fedtprocent på ca. 30.

(c) Man løser ligningen $f(x) = 25$. Det giver andengradsligningen

$$-0.013095 \cdot x^2 + 1.1962 \cdot x + 8.9743 = 25. \tag{10}$$

Denne ligning løses i Maple ved hjælp af en kommando. Husk at definér funktionen.

```
f(x):=-0.013095*x^2+1.1962*x+8.9743:
solve(f(x)=25,x);
```

Løses ligningen korrekt fås $x = 16.31 \vee x = 75.04$. Bemærk dog, at tallet $x = 75.04$ forkastes, idet den ikke ligger i intervallet $2 \leqslant x \leqslant 32$. Derfor er tykkelsen ca. 16.3mm

Opgave 9. Den stykkevise funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 36, & 0 < x \leqslant 10 \\ f_2(x) = 6x - 24, & 10 < x \leqslant 20 \\ f_3(x) = 12x - 144, & 20 < x \leqslant 30 \end{cases} \tag{11}$$

(a) Man udregner $f(15)$. Man kan udregne direkte ved at se, hvor tallet 15 ligger. Man konstaterer, at den ligger indenfor definitionsmængden af $f_2(x) = 6x - 24$, så $f(15) = f_2(15) = 6 \cdot 15 - 24 = 66$. Dvs. hvis turen er 15km, så er prisen 66kr.

Man kan definere funktionen i Maple ved hjælp af `piecewise`. Dernæst udregnes $f(15)$. Det sker i det følgende:

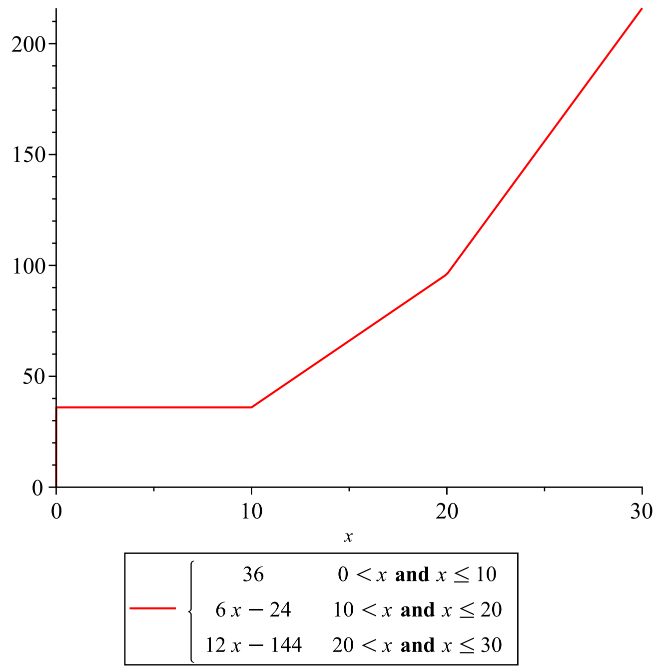
```
restart:with(Gym):
f(x):=piecewise(0<x and x<=10,36,10<x and x<=20,6*x-24,20<x and x<=30,
    12*x-144):
f(15);
```

Så giver Maple $f(15) = 66$, dvs. hvis turen er 15km, så er prisen 66kr.

(b) Hvis man definerede funktionen før, så kan man få Maple til at tegne grafen for $f(x)$.

```
plot(f(x),x=0..30,legend=f(x),color=red);
```

Maple giver plottet



Opgave 10.

(a) En ligning for tangenten bestemmes i punktet $(2, f(2))$. Først udregnes $f'(x)$.

$$f'(x) = (x^3 + 0.75x^2 - 9x + 3)' = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 0.75 \cdot x - 9 = 3x^2 + 1.5x - 9. \qquad (12)$$

Dernæst udregnes $f(2)$ og $f'(2)$.

$$f(2) = 2^3 + 0.75 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 3 = -4, \qquad (13)$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1.5 \cdot 2 - 9 = 6. \qquad (14)$$

Dermed er den søgte tangentligning til f i punktet $(2, f(2))$ lig med

$$y = 6(x-2) + (-4) = 6x - 16. \qquad (15)$$

(b) Monotoniforholdene for $f(x)$ bestemmes. Man løser først ligningen $f'(x) = 0$ for at finde de steder, hvor f har maksimum og/eller minimum.

$$3x^2 + \frac{3}{2}x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x = 3 \tag{16}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 3 + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = \pm\sqrt{\frac{49}{16}} \tag{17}$$

$$x = \pm\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}. \tag{18}$$

Dvs. $x = \frac{-1-7}{4} = -2 \vee x = \frac{-1+7}{4} = 1.5$. Man foretager fortegnsvariation. Vælg $x = -3$, $x = 1$ og $x = 2$. Udregn $f'(-3), f'(1)$ og $f'(2)$.

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 1.5 \cdot (-3) - 9 = 13.5, \tag{19}$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 1.5 \cdot 1 - 9 = -4.5, \tag{20}$$

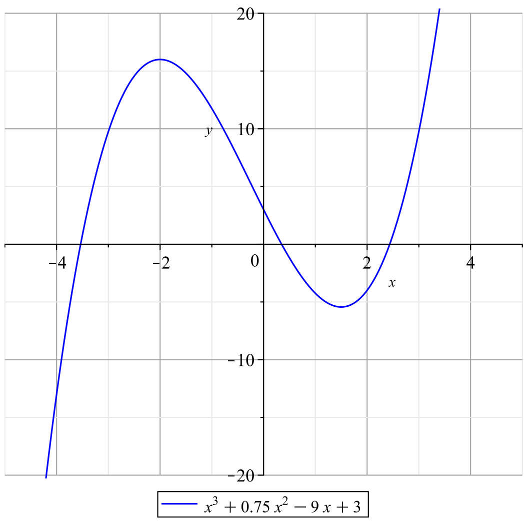
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1.5 \cdot 2 - 9 = 6. \tag{21}$$

Med disse oplysninger kan man se, at grafen for f har et maksimum ved $x = -2$ og et minimum ved $x = 1.5$. For god ordens skyld laves et monotoniskema.

x		-2		1.5	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Man kan derfor konkludere, at f er voksende i intervallerne $]-\infty;-2]$ og $[1.5;\infty[$ samt aftagende i intervallet $[-2;1.5]$. Man kan få Maple til at tegne en graf, det er dog ikke et krav.

```
f(x):=x^3+0.75*x^2-9*x+3:
plot(f(x),x=-5..5,y=-20..20,legend=f(x),color=blue,gridlines);
```



Opgave 11.

(a) Hældningsvinklen v for l bestemmes. Dette gøres ved

$$v = \arctan(2) \approx 63.4^o. \tag{22}$$

Her er tallet 2 hældningskoefficienten for l.

(b) Afstanden mellem l og P bestemmes ved hjælp af dist-formlen.

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|2\cdot 6+3-5|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4.47. \tag{23}$$

Opgave 12.

(a) Man ønsker at løse ligningen $f(x) = 600$ for at finde alderen af fuglen.

$$695\cdot(1-0.716\cdot 0.981^x)^3 = 600 \Leftrightarrow \tag{24}$$

$$(1-0.716\cdot 0.981^x)^3 = \frac{600}{695} \Leftrightarrow \tag{25}$$

$$1-0.716\cdot 0.981^x = \sqrt[3]{\frac{600}{695}} \Leftrightarrow \tag{26}$$

$$-0.716\cdot 0.981^x = \sqrt[3]{\frac{600}{695}} - 1 \Leftrightarrow \tag{27}$$

$$0.716\cdot 0.981^x = 1 - \sqrt[3]{\frac{600}{695}} \Leftrightarrow \tag{28}$$

$$0.981^x = \frac{1-\sqrt[3]{\frac{600}{695}}}{0.716} \Leftrightarrow \tag{29}$$

$$x\ln(0.981) = \ln\left(\frac{1-\sqrt[3]{\frac{600}{695}}}{0.716}\right) \Leftrightarrow \tag{30}$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1-\sqrt[3]{\frac{600}{695}}}{0.716}\right)}{\ln(0.981)} \approx 141. \tag{31}$$

Dvs. fuglen der vejer 600g er ca. 141 døgn gammel.[1]

[1] Som du kan se, blev løsningen til ligningen rimelig lang, og det forventes ikke at du som studerende skal gøre det samme til eksamen. Der kan du med fordele udnytte CAS programmer til at løse ligningen for dig. Det samme gælder, når du skal differentiere funktionen om lidt i delopgave b.

(b) Man differentierer funktionen vha. kædereglen. Den ydre funktion er $a(x) = 695x^3$ og den indre funktion er $b(x) = 1 - 0.716 \cdot 0.981^x$. Dermed er

$$\begin{aligned} f'(x) &= 695 \cdot 3 \cdot (1 - 0.716 \cdot 0.981^x)^2 \cdot (-0.716 \cdot 0.981^x) \cdot \ln(0.981), \quad (32) \\ &= 28.637(1 - 0.716 \cdot 0.981^x)^2 \cdot 0.981^x. \quad (33) \end{aligned}$$

Hvor $0 < x < 400$. Man udregner $f'(50)$, dvs.

$$f'(50) = 28.637(1 - 0.716 \cdot 0.981^{50})^2 \cdot 0.981^{50} = 5.78. \quad (34)$$

Dvs. efter 50 døgn øges fuglens vægt med 5.78g pr. døgn ifølge modellen.

Opgave 13.

(a) Et 95% konfidensinterval opstilles.

$$\left[\frac{28.4}{100} - 2\sqrt{\frac{\frac{28.4}{100}\left(1 - \frac{28.4}{100}\right)}{1026}}; \frac{28.4}{100} + 2\sqrt{\frac{\frac{28.4}{100}\left(1 - \frac{28.4}{100}\right)}{1026}} \right]. \quad (35)$$

Skrevet pænere

$$[0.2558; 0.3122]. \quad (36)$$

(b) Tallet 26.3% indgår i konfidensintervallet, så på baggrund af dette kan man ikke umiddelbart afgøre, om Socialdemokratiet har haft tilbagegang eller fremgang siden sidste valg.

Opgave 14.

(a) Indsend gerne det originale opgavesæt. Denne type opgave indgår ikke til din skriftlige eksamen.