

Matematik A-niveau STX

6. december 2019

Dette er minimale løsningsskitser til STX A-niveau eksamen d. 06/12/19. Af CAS kræves: Maple 2019. NB: Dette er ikke en elevbesvarelse. E-mail: matematikuniverset@hotmail.com

Delprøve 1.

Opgave 1.

- (a) Udtrykket reduceres,

$$\begin{aligned} 5ab - 4a^2 + (2a - b)^2 &= 5ab - 4a^2 + 4a^2 - 4ab + b^2, & (1) \\ &= ab + b^2. & (2) \end{aligned}$$

Opgave 2.

- (a) Man kender $x = 5$ og $f(x = 5) = 2$, endvidere kan $f'(x = 5)$ bestemmes vha. differentialligningen,

$$f'(5) = \frac{5 \cdot 2 + 2}{5} = \frac{12}{5}, \quad (3)$$

$$\implies y = \frac{12}{5}(x - 5) + 2 = \frac{12}{5}x - 10.$$

Opgave 3.

- (a) Beregn $\vec{r}(2)$,

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 2^2 \\ 2^3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Dvs. $P(4, 0)$.

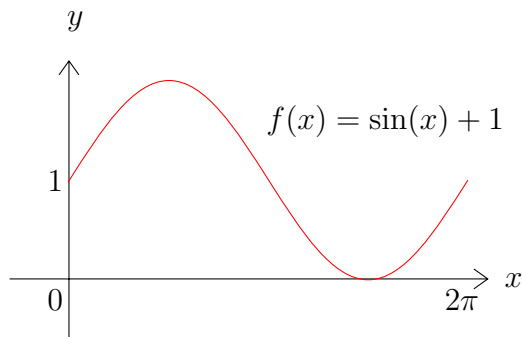
- (b) Løs ligningen,

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

mht. t . Løses $t^2 = 4$ fås hhv. $t = 2$ og $t = -2$. Klart at $t = 2$ er netop en af de værdier der kendes, mens $t = -2$ er en fundet værdi. Løses $t^3 - 4t = 0$ fås løsningerne $t = -2 \vee t = 0 \vee t = 2$. Dvs. den søgte løsning er $t = t_0 = -2$, og $t = 0$ forkastes.

Opgave 4.

(a) Skitsen ses nedenfor. Bemærk, at vi har snydt lidt. ☺



(b) Den afledede er,

$$f'(x) = (\sin(x) + 1)' = \cos(x), \quad (6)$$

$$\text{og } f'(\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

Opgave 5.

(a) Først regnes $F(x)$,

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (\ln(x) + 6x^2)dx = x \ln(x) - x + 2x^3 + k, \quad k \in \mathbb{R}, x > 0. \quad (7)$$

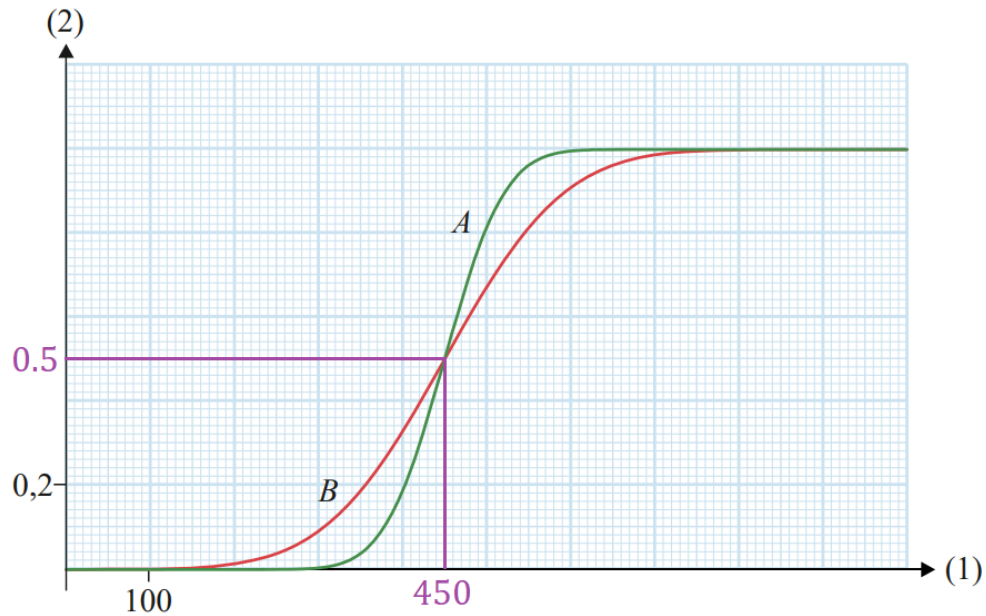
Dernæst løses ligningen mht k .

$$5 = \underbrace{1 \cdot \ln(1)}_{=0} - 1 + 2 \cdot 1^3 + k \iff k = 4, \quad (8)$$

$$\therefore F(x) = x \ln(x) - x + 2x^3 + 4, \quad x > 0. \quad (9)$$

Opgave 6.

(a) Nedenfor er grafen aflæst.

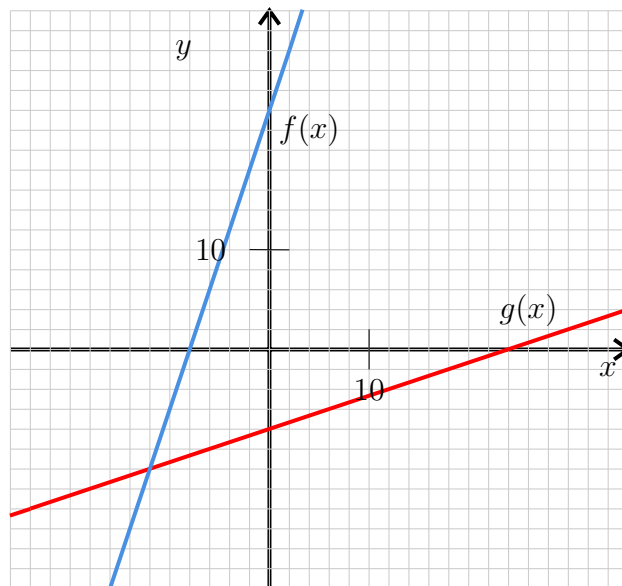


Poserne fra fabrik A vejer i gennemsnit 450g.

- (b) Den pose der afviger mest fra gennemsnittet er poserne produceret ved fabrik B. Det handler om at kigge ud fra gennemsnittet μ . Man kan se, at fabrik A er bedre til at producere poser, som afviger mindre fra gennemsnittet.

Opgave 7.

- (a) Skitsen ses nedenfor. Igen har vi snydt lidt. ☺



- (b) Givet $f(x) = 3x + 24$, den omvendte funktion er $g(x) = \frac{x}{3} - 8$. Dette kan alene bestemmes ved at løse ligningen $f(y) = x$.

Opgave 8.

- (a) Nedenfor ses den korteste rute.

Havrebjerg $\longrightarrow$ Slagelse $\longrightarrow$ Holsted $\longrightarrow$ Rønnede.

Tabellen overlades som en øvelse.

Opgave 9.

- (a) Man indsætter P i cirkelligningen og beregner.

$$2^2 + 6^2 + 2a - 36 = 0 \iff a = -2. \quad (10)$$

- (b) Man omskriver cirkelligningen til

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{1}{4}a^2 + 9. \quad (11)$$

Højresiden sættes lig 25, dvs. man får ligningen,

$$\frac{1}{4}a^2 + 9 = 25 \iff a^2 = 64 \iff a = \pm 8. \quad (12)$$

Delprøve 2.

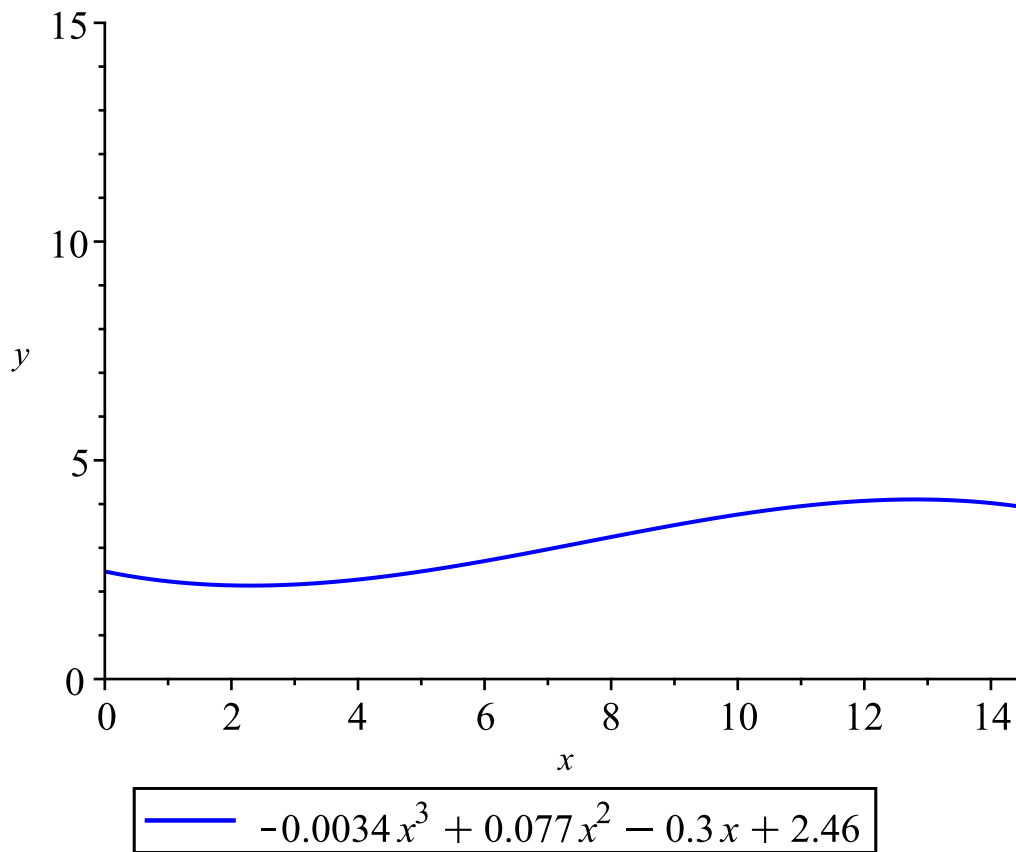
Se Maple fil på næste side.

Opgave 10

restart ; with(Gym) :

(a)

$f(x) := -0.0034 \cdot x^3 + 0.077 \cdot x^2 - 0.3 \cdot x + 2.46 :$
 $plot(f(x), x = 0 .. 14.5, y = 0 .. 15, color = blue, legend = f(x))$



$$A_M = \int_0^{14.5} f(x) \, dx$$

$$A_M = 44.80623854$$

(1.1.1)

Arealet er 44.8.

(b)

$$V_{glas} = \text{Pi} \cdot \int_0^{14.5} f(x)^2 \, dx$$

$$V_{glas} = 460.7460160$$

(1.2.1)

Dvs. rumfanget er $460 \, \text{cm}^3$, eller blot 0.46L.

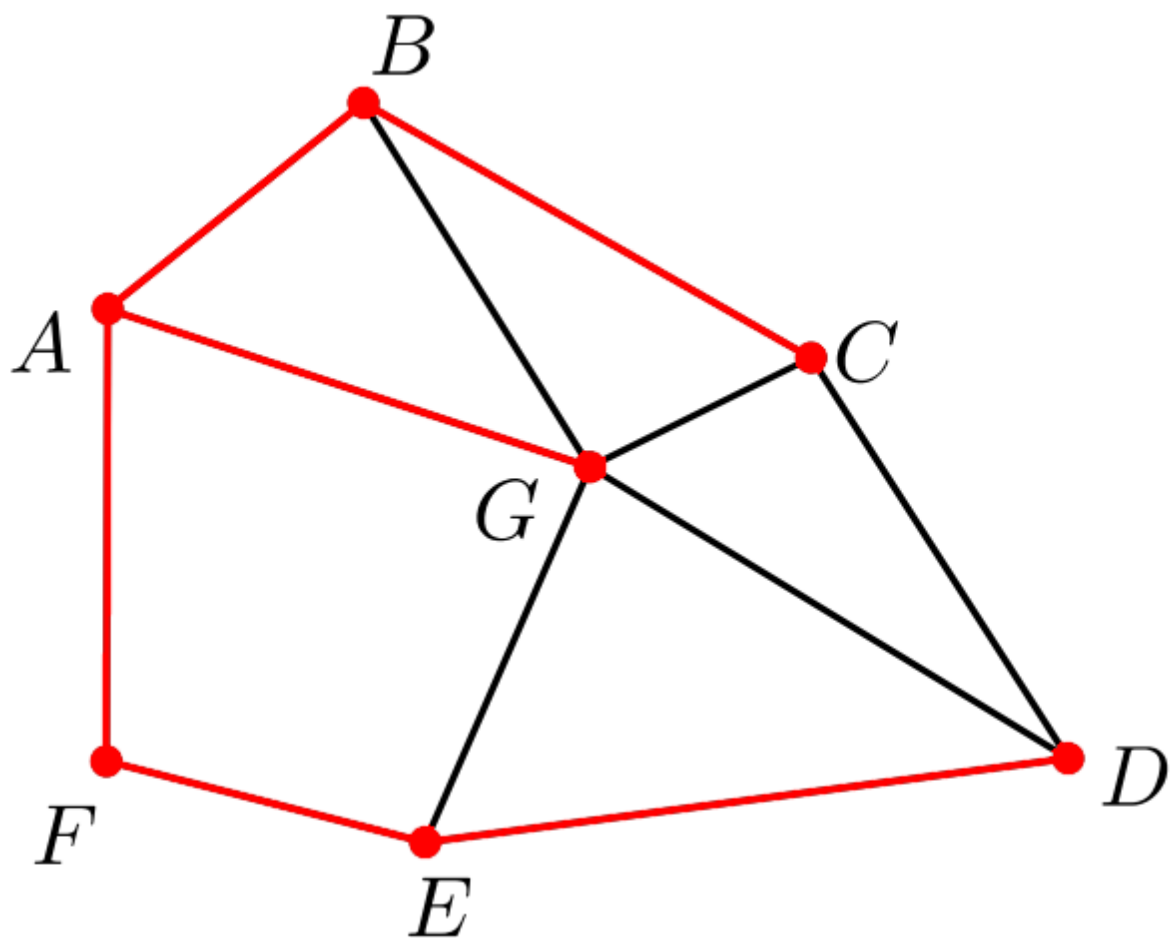
▼ Opgave 11

▼ (a)

Ifølge sætning 2 fra forberedelsesmaterialet følger det, at der ikke er tale om en Eulertur, da der er 4 punkter med ulige valens.

▼ (b)

Nedenfor ses et udspændende træ med start i A.



Opgave 12

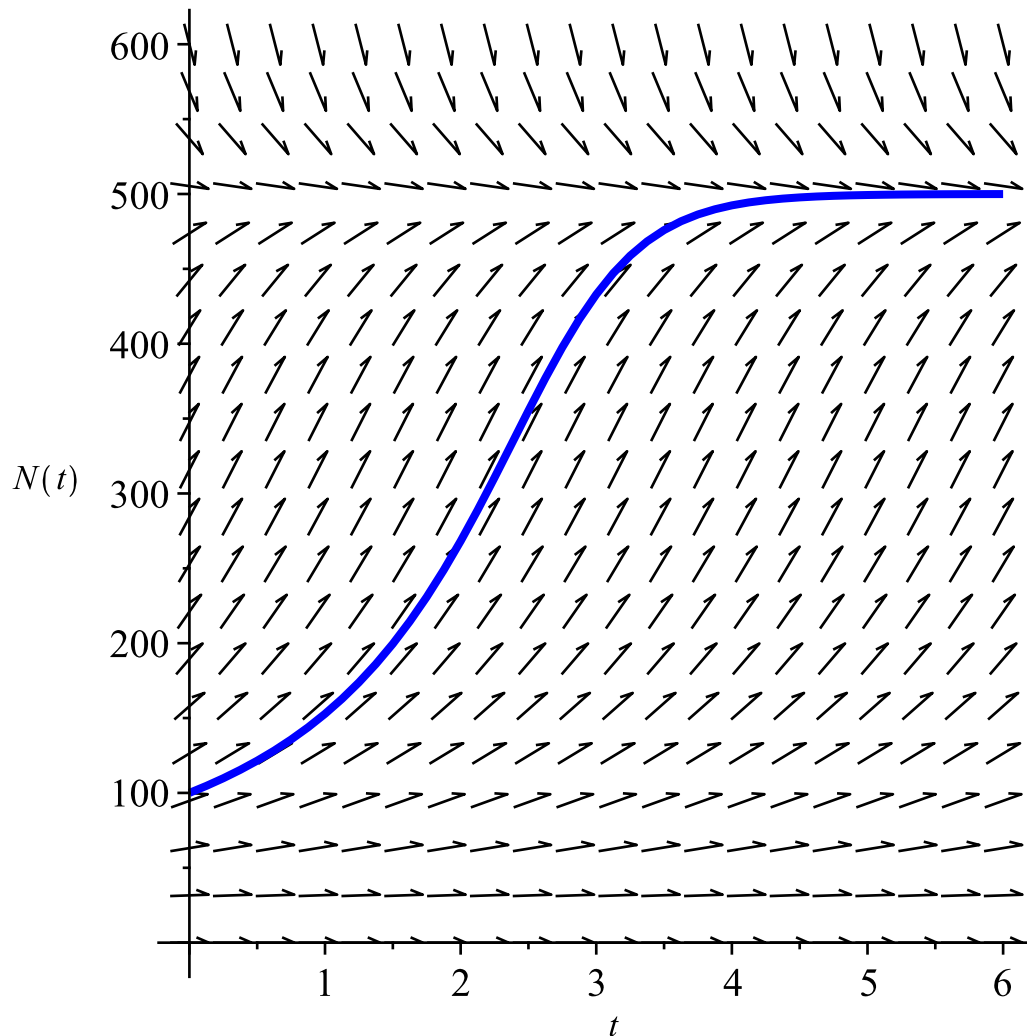
restart :: *with(Gym)* :: *with(DEtools)* :
Læs skript ODE s. 200 for tilsvarende kode.

(a)

$ODE := N'(t) = -0.00001 \cdot N(t)^3 + 0.0051 \cdot N(t)^2 - 0.05 \cdot N(t) :$

$IVP := [N(0) = 100] :$

$DEplot(ODE, N(t), t = 0..6, N = 0..600, IVP, color = black, linecolor = blue);$



(b)

Man beregner væksthastigheden ved

$$N'(t) = -0.00001 \cdot 100^3 + 0.0051 \cdot 100^2 - 0.05 \cdot 100$$

$$D(N)(t) = 36.00000$$

(3.2.1)

Dvs. når der er 100 bjørne i habitatet, så vokser mængden af bjørne hvert år med 36 ifølge differentialligningen.

(c)

Mindste og største svarer til at finde ligevægtsløsningen for differentialligningen (eng. equilibrium solutions).

$$-0.00001 \cdot N^3 + 0.0051 \cdot N^2 - 0.05 \cdot N = 0$$

$$-0.00001 N^3 + 0.0051 N^2 - 0.05 N = 0 \quad (3.3.1)$$

`solve((3.3.1))`

$$0., 500., 10. \quad (3.3.2)$$

Så antallet af bjørne for, at habitatet er voksende er mellem 10 og 500, begge tal er ikke inkluderet, ellers er væksthastigheden 0.

PAS PÅ! Løs IKKE differentialligningen. Det er her, at numeriske metoder kan være gode, hvis man vitterlig ønsker at finde en bestemt løsning.

Se skript ODE kapitel 6.

Opgave 13

`restart ;; with(Gym) ;; with(Statistics) :`

(a)

Data indlæses.

`Bredde := [2.0, 1.9, 2.2, 2.0, 2.0, 1.7, 1.9, 2.4, 1.6, 1.6, 2.4, 1.4, 2.3, 2.3, 2.2, 2.1, 1.9, 2.1, 1.6, 2.2, 2.4, 1.8, 1.5, 1.9, 1.7, 1.7, 1.7, 2.1, 2.3, 1.4, 1.5, 2.3, 1.4, 2.0, 2.4, 1.8, 1.8, 2.1, 2.2, 1.9, 1.5, 1.4, 2.2, 1.8, 1.4, 1.9, 1.5, 2.2, 2.1, 1.7, 1.8, 2.3, 2.4, 2.2, 2.3, 2.4, 2.0, 2.3, 2.0, 1.8, 2.2, 1.5, 2.4, 1.9, 1.4, 1.7, 2.0, 1.5, 1.6, 2.2, 1.9, 2.4, 1.6, 1.9, 1.5, 1.4, 1.9, 2.2, 1.4, 2.2, 1.5, 2.2, 1.6, 1.8, 1.6, 1.8, 1.8, 2.1, 2.1, 2.4, 1.7, 1.8, 1.9, 1.9, 2.2, 1.7, 1.4, 2.1, 2.2, 1.5] :`

`Længde := [5.1, 5.8, 5.7, 5.6, 5.6, 5.9, 6.5, 6.4, 5.0, 5.7, 5.4, 5.6, 5.7, 5.5, 5.7, 4.6, 5.6, 5.7, 5.1, 4.7, 5.4, 5.7, 4.9, 5.2, 4.6, 4.8, 4.7, 5.2, 6.1, 4.4, 4.5, 6.1, 4.4, 6.6, 5.1, 5.1, 6.2, 5.7, 5.8, 5.7, 5.5, 4.9, 4.9, 5.4, 5.3, 5.6, 4.9, 5.5, 5.9, 4.5, 4.6, 5.7, 6.3, 6.0, 6.4, 5.0, 5.1, 6.1, 5.5, 5.6, 4.7, 4.8, 5.5, 5.0, 4.6, 5.7, 5.6, 5.0, 5.2, 5.5, 5.4, 5.7, 5.5, 6.0, 5.3, 6.5, 5.1, 5.6, 5.5, 6.1, 5.1, 5.3, 5.1, 4.6, 4.6, 4.9, 5.5, 5.0, 5.4, 7.0, 5.6, 5.7, 5.2, 5.6, 6.2, 5.3, 4.4, 6.1, 6.2, 5.1] :`

Residualer:

`OBSR := afrund(Fit(a·x + b, Bredde, Længde, x, output=residuals)) :
middel(OBSR)`

$$0.0011000000 \quad (4.1.1)$$

`standardafvigelse(OBSR)`

$$0.492765633587541 \quad (4.1.2)$$

`min(OBSR)`

$$-0.97 \quad (4.1.3)$$

`max(OBSR)`

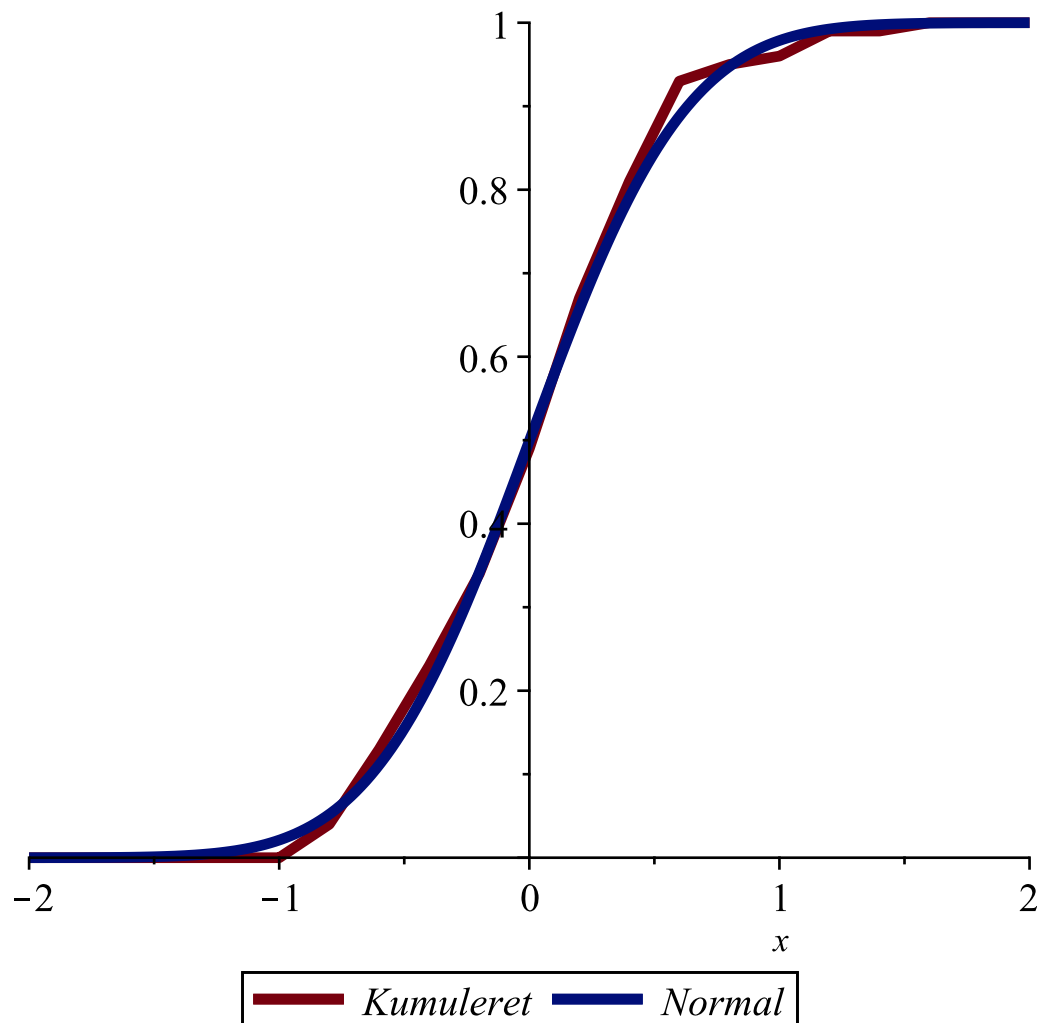
$$1.49 \quad (4.1.4)$$

Endelig er:

$f(x) := \text{kumuleretFrekvens}(\text{OBSG}, x) :$

$g(x) := \text{normalcdf}(0.0011000000, 0.492765633587541, x) :$

$\text{plot}([f(x), g(x)], x = -2 \dots 2, \text{thickness} = 4, \text{legend} = [\text{Kumuleret}, \text{Normal}])$



Dvs. det følger tilnærmelsesvis en normalfordeling.

(b)

$\text{Fit}(a \cdot x + b, \text{Bredde}, \text{Længde}, x, \text{output} = \text{confidenceintervals})$

$\left[\begin{array}{l} 0.492489514358421 \dots 1.12186946000054 \\ 3.26925028388859 \dots 4.48732407508578 \end{array} \right]$

(4.2.1)

Dvs. konfindensintervallet er $[0.492; 1.122]$. Man kan ikke umiddelbart afgøre, om biologernes formodning er korrekt eller forkert.

▼ Opgave 14

restart :: *with*(*Gym*) :

▼ (a)

$$x(t) := \frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{7}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot t\right) ; y(t) := \frac{1}{2} \cdot \sin(t) + \frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot t\right) :$$

$$s(t) := \langle x(t), y(t) \rangle :$$

Man beregner:

$$\text{evalf}[5](\text{interval solve}(y'(t) = 0, t = 0 .. 6 \cdot \text{Pi}))$$

$$[3.4509, 4.7124, 5.9740, 12.875, 14.137, 15.399] \quad (5.1.1)$$

$$s(3.4509)$$

$$\begin{bmatrix} 0.9524752563 \\ 3.042903096 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

Kun ovenstående giver netop det sted, hvor man ønsker at finde den lodrette afstand.

$$d = 2 \cdot 3.042903096$$

$$d = 6.085806192 \quad (5.1.3)$$

Dvs. den lodrette afstand er 6.086cm.

▼ (b)

Man beregner

$$\int_0^{6 \cdot \text{Pi}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

$$8 \text{ EllipticE}\left(\frac{1}{2} \sqrt{21}\right) \quad (5.2.1)$$

at 5 digits →

$$23.013 + -0.1 \quad (5.2.2)$$

Længden er ca. 23cm.

▼ Opgave 15

restart ;; with(Gym) :

(a)

Formlen for volumen er

$$V = x \cdot y \cdot h$$

Overfladearealet er

$$O = 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x \cdot y + y \cdot h$$

Arealet er 48 m^2 .

$$48 = 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x \cdot y + y \cdot h$$

$$48 = 2 x h + y h + 2 x y \quad (6.1.1)$$

isolate((6.1.1), h)

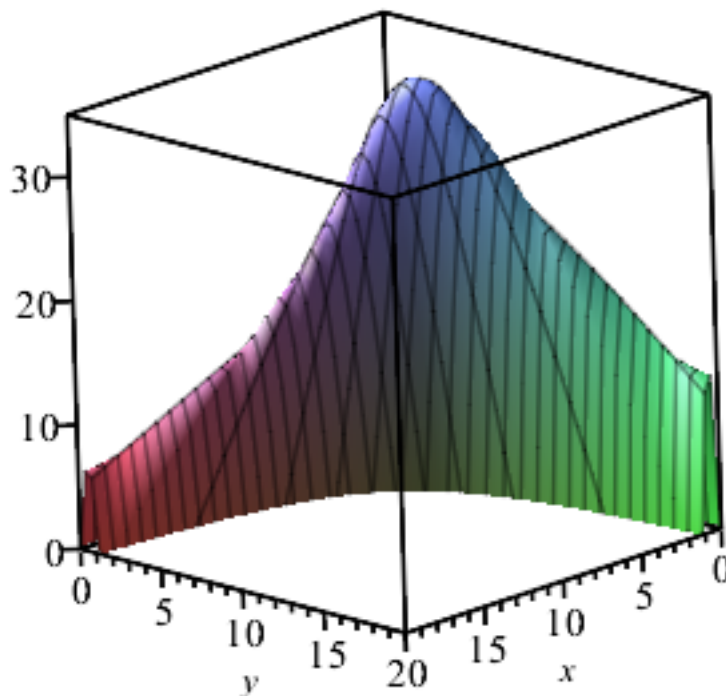
$$h = \frac{2 x y - 48}{-2 x - y} \quad (6.1.2)$$

$$V(x, y) := x \cdot y \cdot \left(\frac{2 x y - 48}{-2 x - y} \right)$$

$$V := (x, y) \mapsto \frac{y x (2 y x - 48)}{-2 x - y} \quad (6.1.3)$$

(b)

plot3d(V(x, y), x = 0 .. 20, y = 0 .. 20)



(c)

$$V(x, y) \xrightarrow{art}$$

$$r = -8 \quad s = -2 \quad t = -2$$

$$\text{Diskriminanten er } \Delta = r t - s^2 = 12$$

Da $\Delta > 0$ og $r < 0$ har funktionen et lokalt maksimum i

$$[2, 4]$$

og funktionsværdien er 32

Tallet fortæller, at volumen er størst for $P(2, 4)$ som vil være 32 m^3 .