Cálculo distancia Tierra-Sol mediante la observación del Transito de Mercurio

Enrique Torres

Planetario de Medellín

Introducción

Desde que los primeros humanos observaron los astros y contemplaron el Sol, la luna, los planetas y las estrellas, una de sus primeras inquietudes fue determinar la distancia a ellos; eso no ha sido tarea fácil debido a las enormes dimensiones que nos ocupan y la complejidad del sistema involucrado. Desde la remota antigüedad griega, ya Eratóstenes y Aristarco, se aventuraron a calcular la distancia al Sol o Unidad Astronómica (UA) y a pesar de ser totalmente correctos sus procedimientos geométricos, sus resultados al sol fueron erróneos debido a la inexactitud de las medidas (aunque hay versiones que afirman que Eratóstenes la habría calculado en un valor de 149 millones de km. pero esto no es totalmente seguro. A pesar de que Copérnico y Kepler ya calculaban las distancias a los diferentes planetas con bastante exactitud, solo lo hacían en función de la distancia Tierra-Sol la cual aún se desconocía. Fue Christian Huygens quien en 1659 estimó indirectamente dicho valor en 160 millones de km., luego en 1672 Jean Richer, astrónomo francés, basándose en la paralaje marciana medida por su equipo entre Paris y Guayana Francesa, determina un valor de 140 millones de km. Posteriormente James Gregory y Edmund Halley proponen el método de la medición de la paralaje de Venus o Mercurio durante sus tránsitos, así como el de la estimación del tiempo total del tránsito para deducir la UA. En los tránsitos de Venus de 1761 y 1769 se obtuvo un valor de 153 millones de km.

En esta experiencia buscaremos aplicar una metodología simplificada del método de la paralaje diferencial de Mercurio para obtener el valor de la UA.

Objetivos Generales

- Usando fotografías del tránsito tomadas por dos estaciones terrenas al mismo tiempo, se busca calcular la Unidad Astronómica usando para ello el método de la paralaje durante el tránsito de Mercurio.

- Introducir a los estudiantes en la metodología de observación y análisis astronómico usando un fenómeno cuantificable de gran relevancia

Objetivos Específicos

- Aplicando conocimientos de trigonometría, leyes de Kepler, física y algebra, lograr que los estudiantes calculen la U.A.

- Entender la dinámica del movimiento planetario

- Dominar el uso del telescopio astronómico, cámaras digitales y métodos de fotografía astronómica

- Uso de programas de reducción y análisis digital, como salsaJ, Registax, Photoshop.

- Fomentar el trabajo colaborativo internacional entre estudiantes

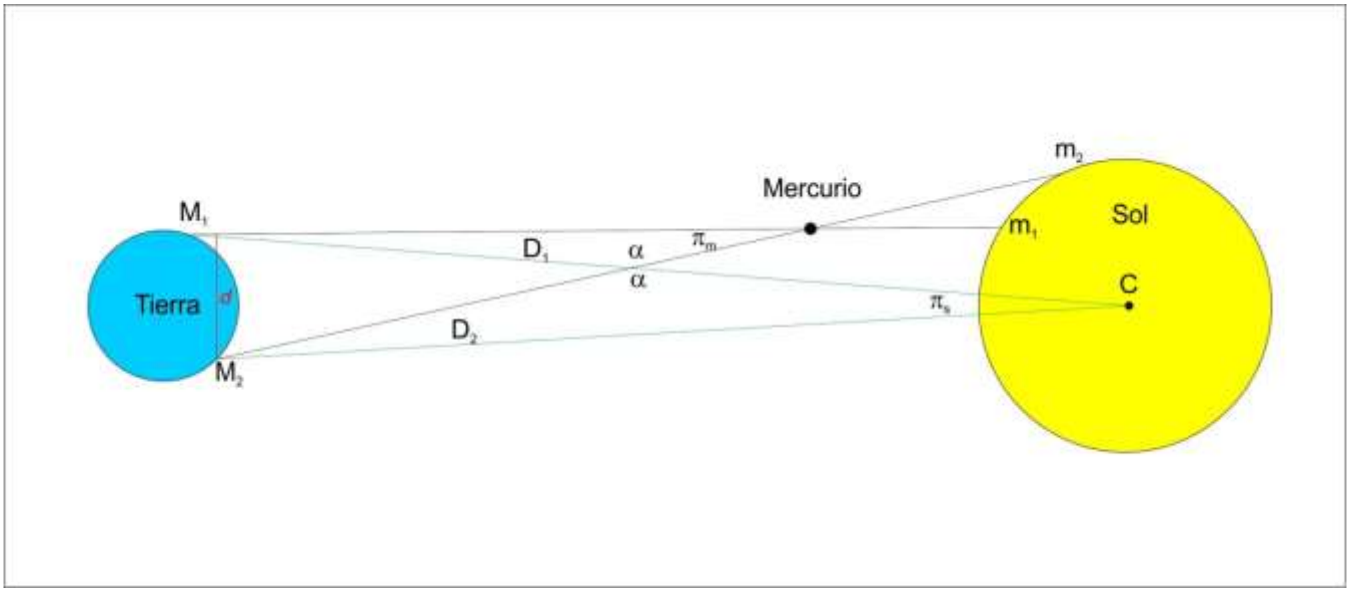
Equipos

- Telescopio de al menos 100 cm de distancia focal sobre montura ecuatorial
- Cámara fotográfica digital SRL adaptable al telescopio

Procedimiento

Medición directa de la paralaje diferencial de Mercurio mediante imágenes simultaneas.

Para este método son necesarias observaciones <u>simultáneas</u> desde dos localizaciones geográficas diferentes. Lo que deseamos medir es el ángulo entre los centros de las sombras de Mercurio sobre el disco del Sol vistos desde los dos lugares lo más distantes posible. En la siguiente figura, el punto O es el centro de la Tierra, C el centro del Sol y m_1 y m_2 los centros observados de la proyección de Mercurio visto desde M1 y M2, respectivamente. Los ángulos D1 y D2 serán las separaciones angulares entre los centros de Mercurio y el Sol vistas desde M1 y M2, respectivamente, es decir, los ángulos de paralaje CM1m1 y CM2m2.



Análogamente, podemos definir los ángulos π_S y π_m como las separaciones angulares entre M1 y M2 vistas desde el Sol y desde Mercurio, respectivamente, es decir, los ángulos π_S = M1-C-M2 y π_m = M1-M-M2.

Por definición tenemos,

$$Sen\,\pi_S = \frac{d}{\mathrm{r_T}} \quad ; \quad Sen\,\pi_M = \frac{d}{\mathrm{r_{MT}}}$$

donde $\mathbf{r_T}$ es la distancia Tierra-Sol, $\mathbf{r_{MT}}$ es la distancia Mercurio-Tierra y "d" es la distancia entre M1 y M2 en línea recta.

Vamos a tomar en cuenta las siguientes aproximaciones:

• Como la distancia entre los objetos es muy grande, y el paralaje es muy pequeño, podemos aproximar el valor del seno del paralaje por el del propio ángulo de paralaje, o lo que es lo mismo

sen $\pi_i \approx \pi_i$

• Supondremos que la Tierra, Mercurio y el Sol están alineados, de manera que

$\mathbf{r_{MT}} = \mathbf{r_T} - \mathbf{r_M}$, donde $\mathbf{r_M}$ es la distancia Mercurio-Sol.

• Los puntos de observación M1 y M2 están en el mismo meridiano, es decir, M1 , M2 , C y V en el mismo plano (son coplanarios).

• También asumiremos que éstos puntos son coplanarios durante todo el tránsito, aunque en realidad esto no es cierto ya que la Tierra rota durante el transcurso del mismo y la geometría del sistema cambia.

Como los ángulos α son opuestos por el vértice, son iguales, por lo que se cumple que:

$$D_2 + \pi_s = D_1 + \pi_M$$

Agrupando tenemos:

$$D_2 - D_1 = \pi_M - \pi_s$$

y podemos visualizar fácilmente que

$$D_2 - D_1 = \pi_M - \pi_s = \Delta\pi$$

Si recordamos que:

$$\pi_s = \frac{d}{\mathrm{r_T}} \quad \text{y} \quad \pi_M = \frac{d}{\mathrm{r_T} - \mathrm{r_M}}$$

y de aquí se deduce que:

$$\pi_M = \frac{\pi_s \, . \, \mathrm{r_T}}{\mathrm{r_T} - \mathrm{r_M}}$$

$$\Delta\pi = \pi_s \left[\frac{\mathrm{r_T}}{\mathrm{r_T} - \mathrm{r_M}} - 1\right] = \pi_s \left[\frac{\mathrm{r_M}}{\mathrm{r_T} - \mathrm{r_M}}\right]$$

y por tanto,

$$\pi_s = \Delta\pi \left[\frac{\mathrm{r_T}}{\mathrm{r_M}} - 1\right] = \frac{d}{\mathrm{r_T}}$$

que despejando nos queda que la distancia Tierra-Sol en el momento de la observación es,

$$\mathbf{r_T} = \frac{\boldsymbol{d}}{\Delta\boldsymbol{\pi}\left(\frac{\mathbf{r_T}}{\mathbf{r_M}} - \mathbf{1}\right)}$$

donde Δπ es la cantidad observable (distancia entre los centros de las sombras de Mercurio en la superficie solar y debe expresarse en radianes), *d* se determina a partir de las localizaciones, y el cociente $\frac{r_T}{r_M}$ entre las distancias Tierra-Sol y Mercurio-Sol podemos deducirlo a partir de las efemérides como se indica más adelante. Si expresamos *d* en kilómetros la unidad de distancia Tierra-Sol será también en kilómetros.

Fotografía y Medición de Δπ

El ángulo Δπ puede medirse tomando dos fotografías exactamente al mismo tiempo desde dos lugares muy distantes sobre la tierra, de manera que al superponer las dos imágenes, previamente alineadas, se puede medir la distancia angular entre los centros de la sombra de Mercurio. Existen varios métodos matemáticos más o menos complejos para este cálculo, sin embargo usaremos uno relativamente sencillo basado en la determinación del norte celeste sobre el disco.

Para esto debemos determinar la línea Este-Oeste sobre la imagen solar, de tal manera que el disco solar fotografiado pueda ser posteriormente identificado con los puntos cardinales.

Para esto seguimos los siguientes pasos:

- Determinamos con un GPS o teléfono celular las coordenadas exactas del lugar de observación incluyendo su altura SNM.

- Sincronizamos nuestro reloj con el tiempo Universal usando la internet o alguna aplicación de teléfono como UTC Time

- La sincronización de nuestros relojes con el tiempo universal es vital para el tomado de las fotografías en el tiempo correcto.

- Instalamos nuestro telescopio (Preferiblemente refractor de más de 100 cm de distancia focal) con filtro solar y cámara fotográfica en su foco principal.

- Es necesario que el Sol salga completo en la fotografía por lo que el campo en el sensor de la cámara no debe ser menor de 30´de arco. Si usamos una cámara de medio formato (14 x 24 mm) el telescopio no debe exceder los 1.6 m de distancia focal efectiva. Para una cámara fullframe la distancia focal efectiva máxima no debe exceder a los 2.7 m

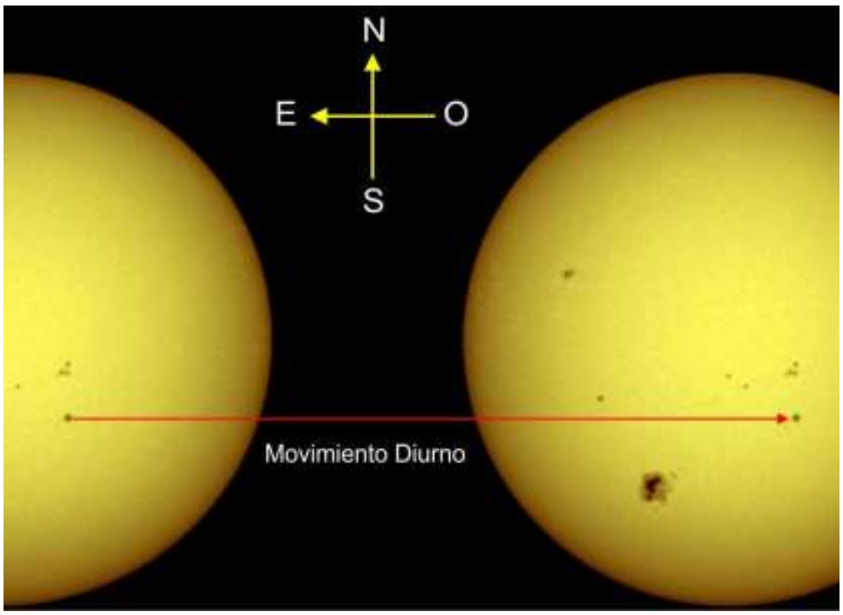
- Alineamos correctamente la montura ecuatorial.

- Alineamos aproximadamente el lado mayor del rectángulo de la imagen de la cámara en dirección Este-Oeste

- Colocamos el sol en la esquina "Este" de la cámara y tomamos una foto, como se ve en la figura siguiente.

- Apagamos el motor del telescopio, vemos como se mueve el Sol, esperamos a que el sol se desplace hacia el otro lado del campo de la cámara, y ahí tomamos otra foto

- Posteriormente, al momento de procesar las imágenes, superponemos ambas imágenes y trazamos una línea conectando una mancha solar en ambas imágenes del sol, así tendremos la línea Este-Oeste.



FOTOGRAFÍA DEL EVENTO

- A fin de mejorar la precisión del resultado, debemos hacer fotografías cada 10 min. desde el momento del primer contacto, o sea los momentos serían:

Tiempo Universal (U.T) de las fotografías a realizar el lunes 11 de noviembre por las diferentes estaciones

Tiempo Universal	12:36:05 Con barlow	12:36:15 Con barlow	12:36:25 Con barlow	12:37 Con barlow	12:37:46 Con barlow	12:38 Sol COmpleto
Hora Legal Colombiana	07:36:05	07:36:15	07:36:25	07:37	07:37:46	07:38

Seguidamente una foto cada minuto, si es posible programar un TimeLapse en la cámara es lo mejor

El máximo ocurre a las 15:20:09 y es importante una foto en ese momento

La secuencia para la salida sería;

18:02:28	18:03:15	18:04:09	18:05	FIN	

Tiempo Universal	18:02:28 Con barlow	18:03:15 Con barlow	18:04:09 Con barlow	18:05 Sol COmpleto	FIN
Hora Legal Colombiana	13:02:28	13:03:15	13:04:09	13:05	FIN

Como vemos el primer contacto ocurre a las 7:36:05 (12:36:05 TU) para Colombia, por lo que las primeras 5 fotos se deben hacer con un suficiente zoom (usando barlow) centradas en el punto de contacto (borde Este del sol), para percibir la entrada, inmediatamente se cambia la disposición de la cámara para fotografiar el sol completo y comenzar las tomas en los tiempos indicados anteriormente. Esto se hace tanto al comienzo como al final, razón por la cual no se toman las fotografías de sol completo en esos momentos inicial y final.

Para mejorar la resolución de cada imagen, se sugiere hacer, para cada tiempo, una ráfaga de al menos 5 tomas para luego sumarlas y obtener el resultante de mejor calidad. Acuérdese de usar un ISO max. de 400 y alta calidad de resolución en el ajuste de la cámara. Para disminuir la vibración al disparar las fotos, se debe bloquear el espejo de la cámara.

Los detalles del transito los podemos obtener en la página web:

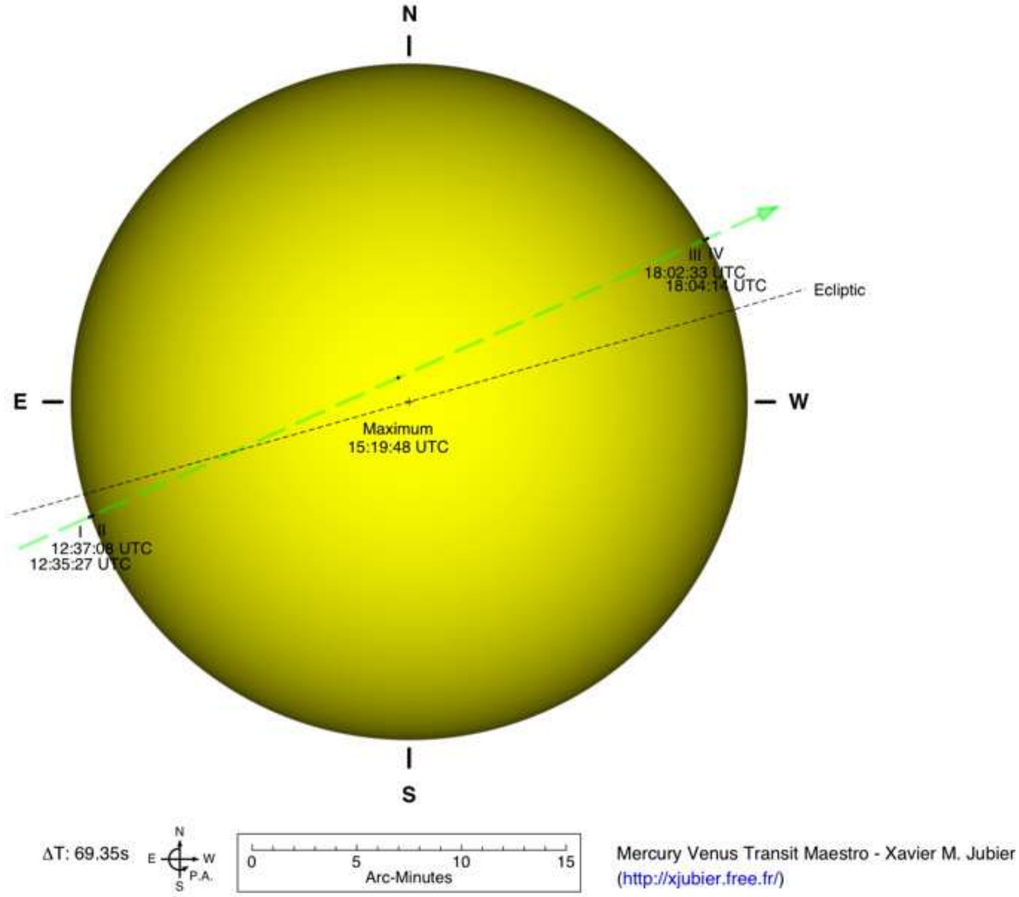
http://xjubier.free.fr/en/site_pages/transits/ToM_2019.html

y su calculador de condiciones locales:

http://xjubier.free.fr/en/site_pages/transits/xST_GoogleMap3.php?Trt=+20191111&Acc=2

Mercury Transit of 2019 Nov 11

Greatest Transit: 15:19:47.8 UT J.D.: 2458799.138748



Mercury Transit of 2019 Nov 11

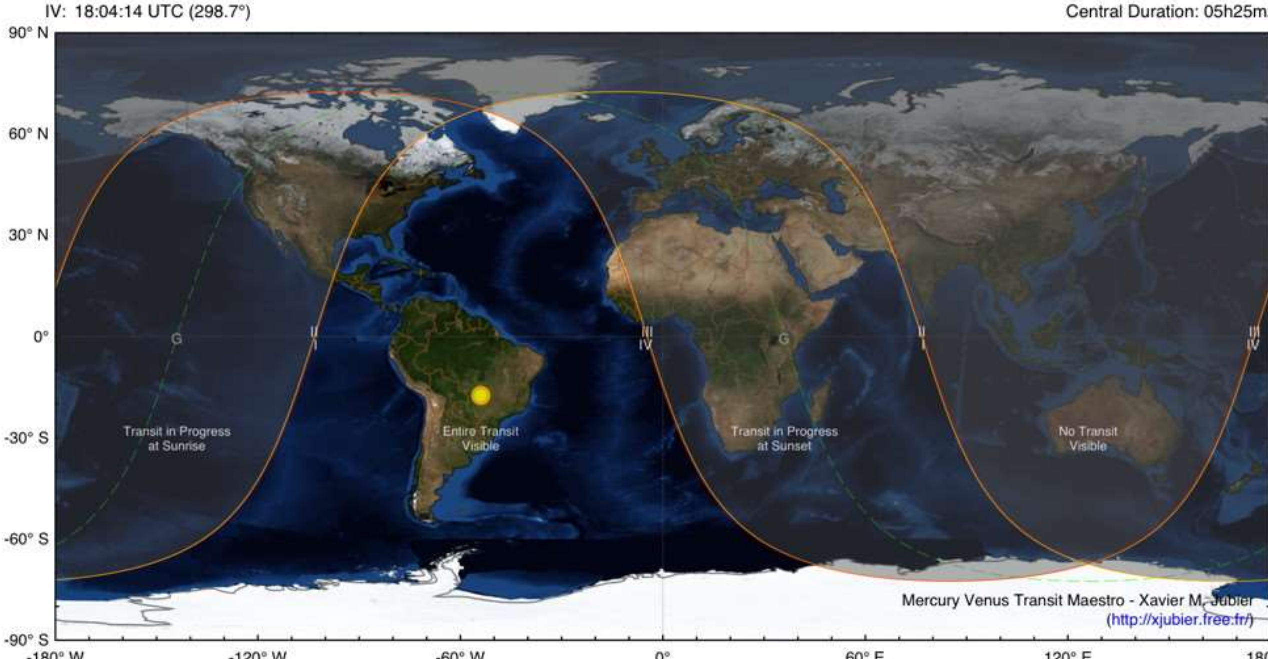
Greatest Transit: 15:19:47.8 UT J.D.: 2458799.138748
ΔT: 69.35s

Transit Geocentric Contacts

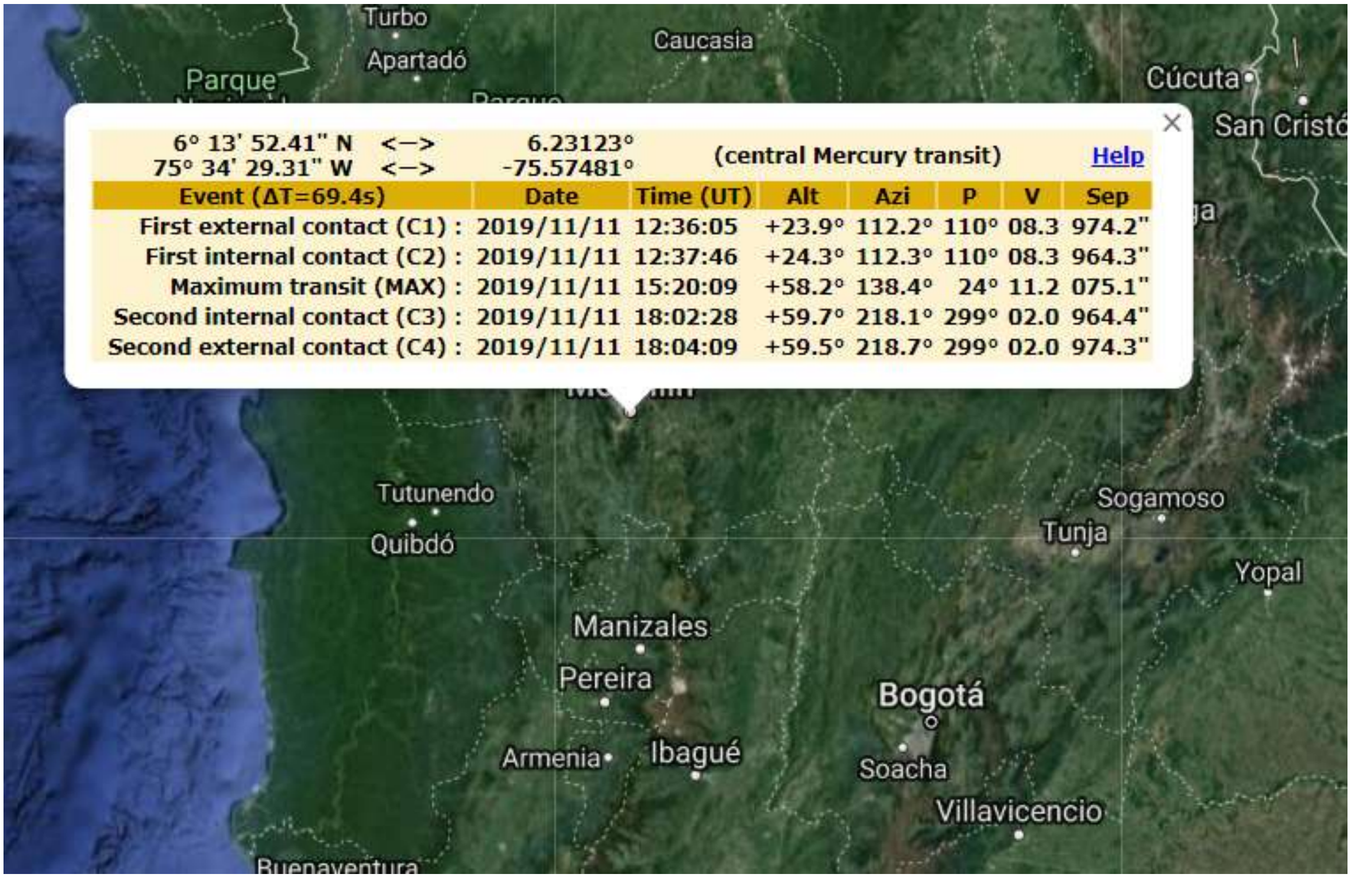
I: 12:35:27 UTC (109.8°)
II: 12:37:08 UTC (109.8°)
G: 15:19:48 UTC (24.3°)
III: 18:02:33 UTC (298.8°)
IV: 18:04:14 UTC (298.7°)

Geocentric Data

Minimum separation: 75.9"
General Duration: 05h28m47s
Central Duration: 05h25m25s

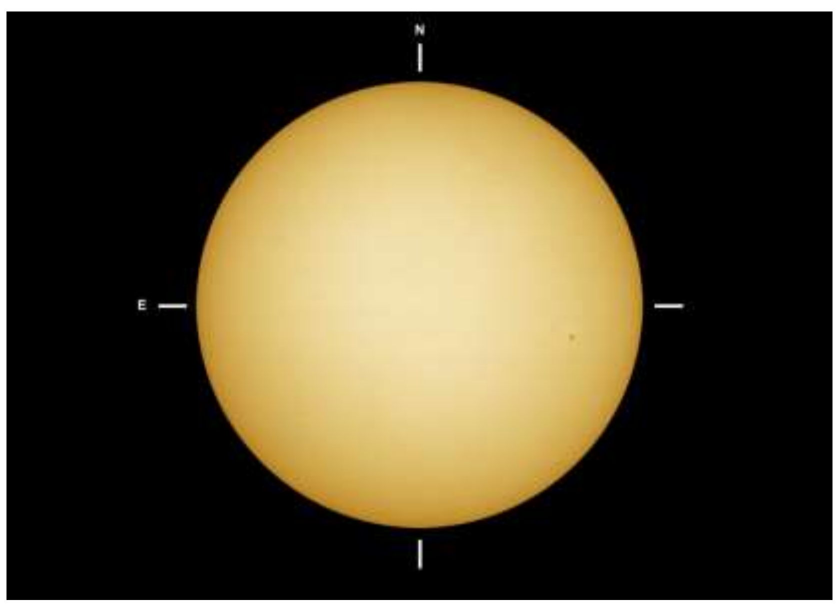


Para Medellín, Colombia los datos en Tiempo Universal (TU) son:



6° 13' 52.41" N <—> 6.23123° 75° 34' 29.31" W <—> -75.57481°		(central Mercury transit)					Help
Event (ΔT=69.4s)	Date	Time (UT)	Alt	Azi	P	V	Sep
First external contact (C1) :	2019/11/11	12:36:05	+23.9°	112.2°	110°	08.3	974.2"
First internal contact (C2) :	2019/11/11	12:37:46	+24.3°	112.3°	110°	08.3	964.3"
Maximum transit (MAX) :	2019/11/11	15:20:09	+58.2°	138.4°	24°	11.2	075.1"
Second internal contact (C3) :	2019/11/11	18:02:28	+59.7°	218.1°	299°	02.0	964.4"
Second external contact (C4) :	2019/11/11	18:04:09	+59.5°	218.7°	299°	02.0	974.3"

Posterior al tránsito de Mercurio y después del post procesamiento de las imágenes, se deben compartir, vía internet, las fotografías tomadas con los observadores internacionales involucrados en el proyecto. Sobre estas fotografías deben marcarse los puntos cardinales N-S-E-O con líneas al estilo de un retículo pero sin trazarlas sobre el disco solar, para esto usamos el programa Photoshop, un ejemplo sería:



Con el mismo programa se superponen ambas imágenes compartidas. Se deben igualar en tamaño los discos y rotar si fuera necesario para hacer coincidir los puntos cardinales de ambas; si existieran manchas solares, podemos utilizarlas como guía para superponer y alinear ambas imágenes.

Ya en este punto veremos las pequeñas imágenes del planeta Mercurio muy cercanas o casi superpuestas. Al combinar ambas imágenes podemos usar la opción de transparencia de capa del photoshop para poder visualizar ambas imágenes al mismo tiempo.

Ahora usando la herramienta de "regla" medimos el diámetro del disco en pixeles Varias Veces y sacamos un promedio, al que llamamos "D_{pix}", seguidamente, ampliando la imagen sobre mercurio medimos la distancia entre los centros de ambas manchas de mercurio, esto es precisamente nuestra $\Delta\pi_{pix}$ pero antes debemos convertirla de pixeles a valor angular, para esto, usando una "regla de tres" y sabiendo que el diámetro angular del Sol para ese día es de: 0° 32' 18.3" de arco o sea 1938.3 segundos de arco, tenemos que:

$$\Delta\pi = \Delta\pi_{pix}\ \frac{1938.3}{D_{pix}}$$

Calculo del cociente $\frac{\mathbf{r_T}}{\mathbf{r_M}}$

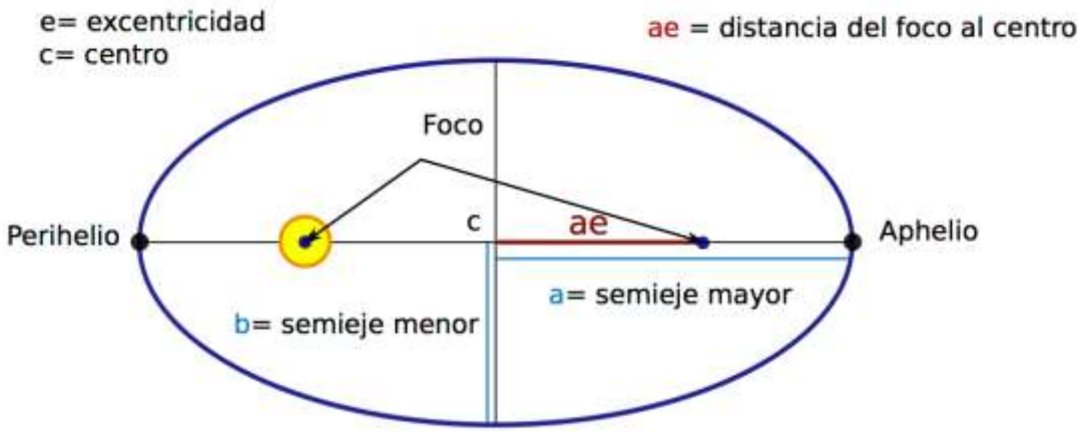
Para ello usamos las leyes de Kepler, veamos primero una introducción.

Leyes de Kepler.

El tema de los movimientos planetarios es inseparable de un nombre: Johannes Kepler, la obsesión de Kepler por la geometría y la armonía del universo le permitió, luego de varios intentos, enunciar las tres leyes que describen con extraordinaria precisión, el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Desde una posición cosmológica copernicana, que en esa época era más una creencia filosófica que una teoría científica, Kepler logró esta magnífica empresa de manera totalmente empírica, sin más teoría que su propio convencimiento sobre el carácter fundamental (divino) de la geometría, y utilizando la gran cantidad de datos experimentales obtenidos por Tycho Brahe.

1. - **Primera Ley**:

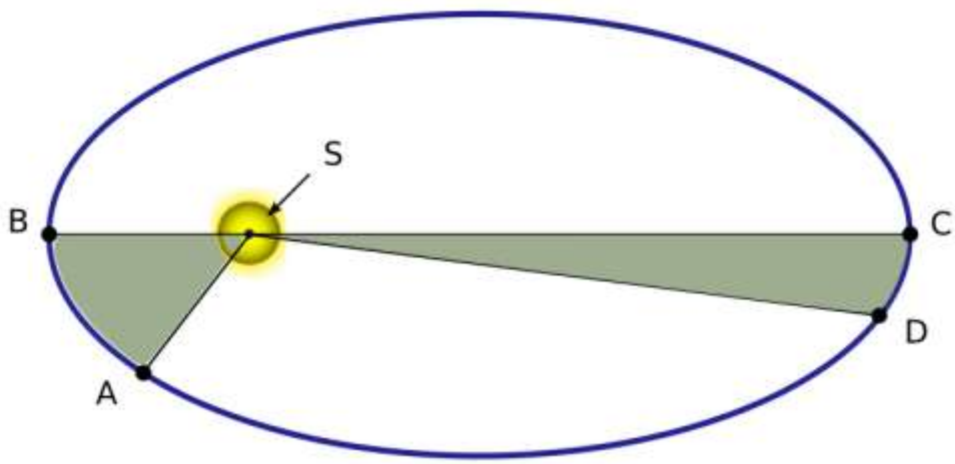
"La órbita que describe cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos"



Descripción de los elementos de la órbita de un objeto alrededor del Sol

Las elipses de las trayectorias planetarias son de muy poca excentricidad, de tal manera que difieren muy poco de la circunferencia. Así por ejemplo, la excentricidad de la órbita de la Tierra es e=0,017, y como la distancia Tierra-Sol es aproximadamente 150.000.000 de Km. la distancia del Sol (foco) al centro de la elipse es de ae=2.500.000 Km.

La segunda ley se refiere a las áreas barridas por la línea imaginaria que une cada planeta al Sol, llamada radio vector. Kepler observó que los planetas se mueven más rápido cuando se hallan más cerca del Sol, pero el radio vector encierra superficies iguales en tiempos iguales. (Si el planeta tarda el mismo tiempo en ir de A a B en la figura , que de C a D, las áreas en blanco son iguales).



Representación gráfica de la segunda ley de Kepler.

2. - **Segunda Ley**:

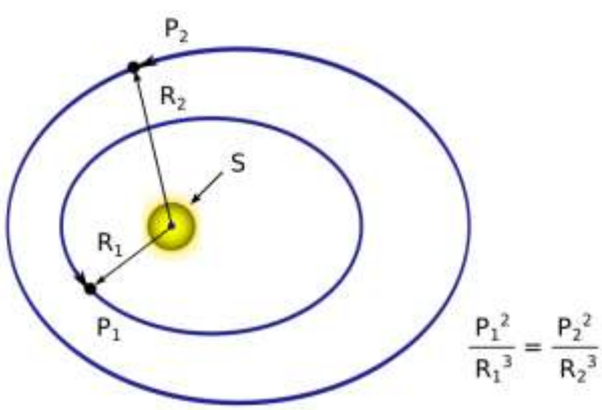
"Cada planeta se mueve de tal manera que el radio vector (recta que une el centro del Sol con el planeta) barre áreas iguales en tiempos iguales"

El radio vector r, o sea la distancia entre el planeta y el foco (S) es variable, pues es mínima en el perihelio y máxima en el afelio. Como la velocidad areal (área barrida en la unidad de tiempo) es constante, la velocidad del planeta en su órbita debe ser variable. En virtud de esta ley, si las áreas ASB y CSD son iguales, el arco AB será mayor que el CD, lo que indica que el planeta se desplaza más rápido en el perihelio. Es decir, su velocidad es máxima a la mínima distancia al Sol y mínima a la máxima distancia.

Finalmente, **la tercera ley** relaciona el semieje mayor de la órbita, llamado R, al período orbital del planeta P, de la siguiente manera: R^3/P^2 = constante. De acuerdo a esta ley, la duración de la trayectoria orbital de un planeta (P) aumenta con la distancia al Sol y así sabemos que el "año" (definido como el tiempo empleado por el planeta en volver al mismo punto de su órbita) en Mercurio tiene 88 días (terrestres), en Venus 224, en la Tierra 365 y sigue aumentando a medida que nos alejamos del Sol. Estas leyes permiten también deducir las distancias relativas de los objetos del sistema solar, si conocemos sus periodos. Determinando independientemente alguna de ellas es posible conocer sus valores absolutos.

3. - **Tercera Ley:** "El cuadrado de los períodos de revolución de dos planetas es proporcional a los cubos de sus distancias medias al Sol."

Si R1, y R2 son las distancias medias al Sol de dos planetas, por ejemplo Marte y la Tierra, y P1 y P2 son los respectivos tiempos de revolución alrededor del Sol, de acuerdo con esta ley resulta que:



Relación entre los periodos y radios de las órbitas alrededor del Sol de dos objetos, que describe gráficamente la tercera ley de Kepler.

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

donde el tiempo está dado en años y la distancia en unidades astronómicas (UA=150.000.000 Km.)

Posteriormente al enunciado de esta ley hecho por Kepler, Newton probó que en la misma deben aparecer las masas de los cuerpos considerados, y de esta manera obtuvo la siguiente fórmula:

$$\frac{P_1^2(M+m_1)}{P_2^2(M+m_2)} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

donde M es la masa del Sol (el cuerpo situado en el foco de la Órbita), igual a 330.000 veces la masa de la Tierra, y m1 y m2 son las masas de los de cuerpos considerados que se mueven a su alrededor en orbitas elípticas. Esta expresión permite calcular la masa de un planeta o satélite, si se conoce su periodo de traslación P y su distancia media a al Sol.

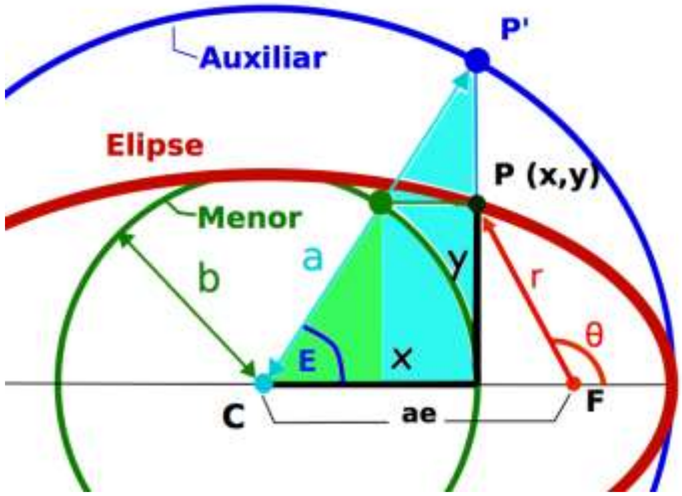
En general para los planetas del sistema solar solo las masas de Júpiter y Saturno no son despreciables respecto a la del Sol. De esta manera, en la mayoría de los casos se considera (M+mi) igual a: 1 masa solar y se obtiene así la expresión dada originalmente por Kepler. Por primera vez una única curva geométrica, sin agregados ni componentes, y una única ley de velocidad resultan suficientes para predecir las posiciones planetarias, y por primera vez también, las predicciones son tan precisas como las observaciones.

Estas leyes empíricas recién encontraron su sustento físico y matemático en la teoría de la gravitación universal de Newton, quien estableció el principio físico que explica los movimientos planetarios. La construcción de este cuerpo de ideas que comienza con Copérnico y culmina en la mecánica de Newton es un ejemplo por excelencia de lo que se considera un procedimiento científico, al que se puede describir muy esquemáticamente de la siguiente forma: *se observa un hecho, se mide y se confecciona una tabla de datos; luego se trata de encontrar leyes que relacionen estos datos y, finalmente, se busca un principio que sustente o explique las leyes*.

Aplicación en el caso que nos ocupa.

Las órbitas de la Tierra y Mercurio en torno al Sol son ligeramente elípticas y por tanto, la relación de distancias $\frac{r_T}{r_M}$ no se mantiene constante a lo largo del tiempo. Para saber esta relación en el instante *t* de observación es necesario remitirse a la primera ley de Kepler que dice que el Sol es uno de los focos de la elipse y que por tanto, la distancia entre el Sol y un planeta $r_p(t)$ se obtiene como:

$$r_p(t) = R_p\big(1 - e_p \cos E_p(t)\big)$$



Sección de la elipse que muestra la anomalía excéntrica (E) y verdadera (θ) anomalía.
Créditos M. A. Pío (IAC)

donde $\boldsymbol{R_p}$ es el semieje mayor de la órbita, $\boldsymbol{e_p}$ la excentricidad y $\boldsymbol{E_p(t)}$ la anomalía excéntrica (ángulo medido desde el centro de la elipse, ángulo formado entre la proyección del planeta en el círculo llamado “auxiliar”, y el eje mayor elipse, en el instante *t*.

Según esto:

$$\frac{r_T}{r_M} = \frac{[R_T(1-e_T.\cos E_T)]}{[R_M(1-e_M.\cos E_M)]}$$

La tercera ley de Kepler relaciona los semiejes mayores de las órbitas con los períodos de revolución:

$$\left(\frac{R_T}{R_M}\right)^3 = \left(\frac{P_T}{P_M}\right)^2$$

de manera que:

$$\frac{r_T}{r_M} = \sqrt[3]{\left(\frac{P_T}{P_M}\right)^2} \cdot \frac{(1-e_T.\cos E_T)}{(1-e_M.\cos E_M)}$$

donde, obtenemos una relación que nos permite conocer el valor del cociente $\frac{r_T}{r_M}$ en cualquier instante de tiempo, pues tanto e_T, e_M, así como E_T y E_M, no son constantes sino que varían con el tiempo. Es cierto que los valores de la excentricidad de la órbita varían muy poco, por lo que se suelen considerar constantes, por lo que sólo conociendo los valores de la anomalía excéntrica E_T y E_M de ambos planetas para un determinado momento t, se puede entonces calcular la relación $\frac{r_T}{r_M}$ para un "t" determinado.

Calculo de las anomalías Excéntricas E_T y E_M

Existen tres métodos para dicho cálculo, estos son:

- Iterativo
- De Newton
- Ecuación del Centro y series de expansión de potencias

En este instructivo no vamos a extendernos en esos métodos debido a lo dispendioso, en vez usaremos el calculador de anomalías excéntricas disponible en la dirección web:

http://www.jgiesen.de/kepler/kepler.html

allí nos piden saber la excentricidad y la **anomalía media** del planeta en cuestión.
La excentricidad de Mercurio es: 0.20563069 y de la tierra es: 0.016711233

Para calcular la anomalía media M usamos la siguiente expresión:

$$M = n(t - t_0)$$

donde "n" es el movimiento medio o velocidad angular del astro, t_0 es el instante de paso del planeta por el perigeo y t es el instante para el cual se desea saber M. el valor "n" lo calculamos así:

$$n = \frac{360º}{Periodo\ Sideral}$$

El periodo orbital sideral de Mercurio es: 87d 23,23h o sea 87,96791667 días
El periodo orbital sideral de la Tierra es: 365,256363004

lo que nos da:

Mercurio: n = 4,092401112 grados / día
Tierra n = 0,985609113 grados / día

y el momento del paso por el perihelio de los planetas en cuestión es:

Mercurio: 25 de febrero
Tierra: 3 de enero, 05h TU. O sea 3.08

O sea que el número de días transcurridos entre las fechas del perihelio y el 11 de noviembre de 2019 a las 15:19:48 TU, momento del máximo del tránsito, serían:

Mercurio: $\boldsymbol{t - t_0}$ **= 259,64 días**
Tierra: $\boldsymbol{t - t_0}$ **= 312,43 días**

así tenemos que la anomalía media $M = n(t - t_0)$ es:

Mercurio M_M = 4,092401112 grados / día x 259,64 días = 342,5459092 grados
Tierra M_T = 0,985609113 grados / día x 312,43 días = 307,9342658 grados

introduciendo estos valores en la calculadora de anomalías excéntricas "E" de (http://www.jgiesen.de/kepler/kepler.html) tenemos:

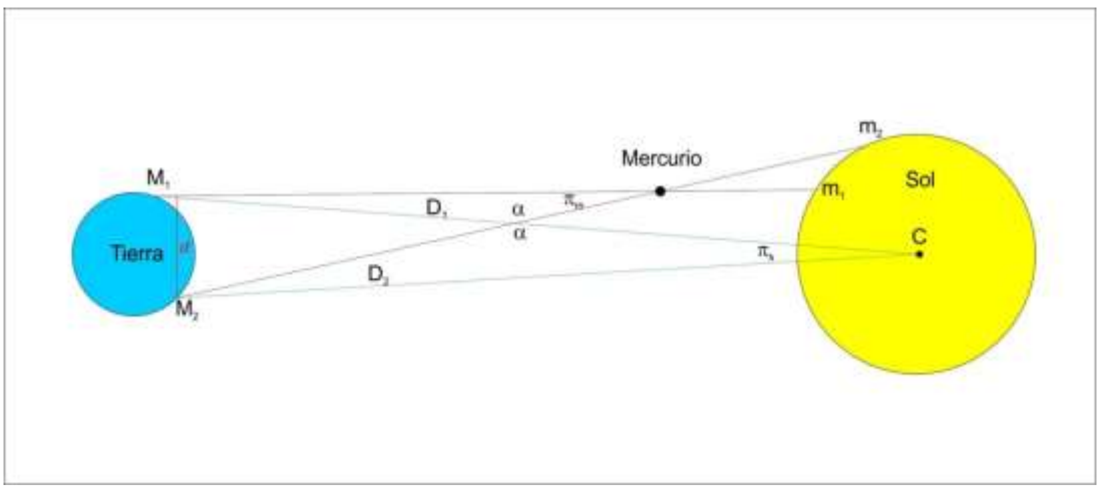
E_M = 338.16359 grados y la anomalía verdadera es: phi m = -26.73603
E_T = 307.17124 grados y la anomalía verdadera es: phi t = -53.59562

Esto es válido para el día 11 de noviembre a la hora del máximo del tránsito de Mercurio

Estos valores los introducimos en la ecuación del cálculo de la relación $\frac{r_T}{r_M}$ para luego aplicar este cociente en la ecuación del cálculo de la distancia Tierra Sol que vimos inicialmente.

Determinemos el valor de "d"

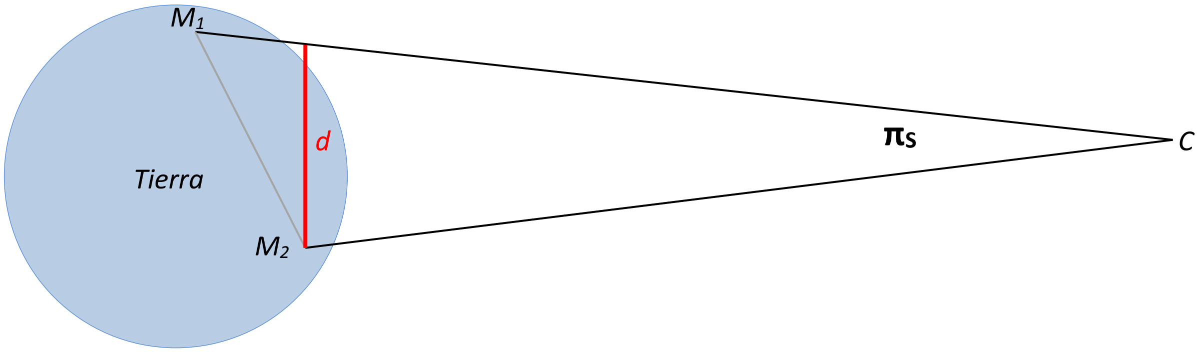
Recordando la gráfica



y la ecuación que nos permite calcular la distancia Sol-Tierra:

$$\mathrm{r_T} = \frac{d}{\Delta\pi\left(\frac{\mathrm{r_T}}{\mathrm{r_M}} - 1\right)}$$

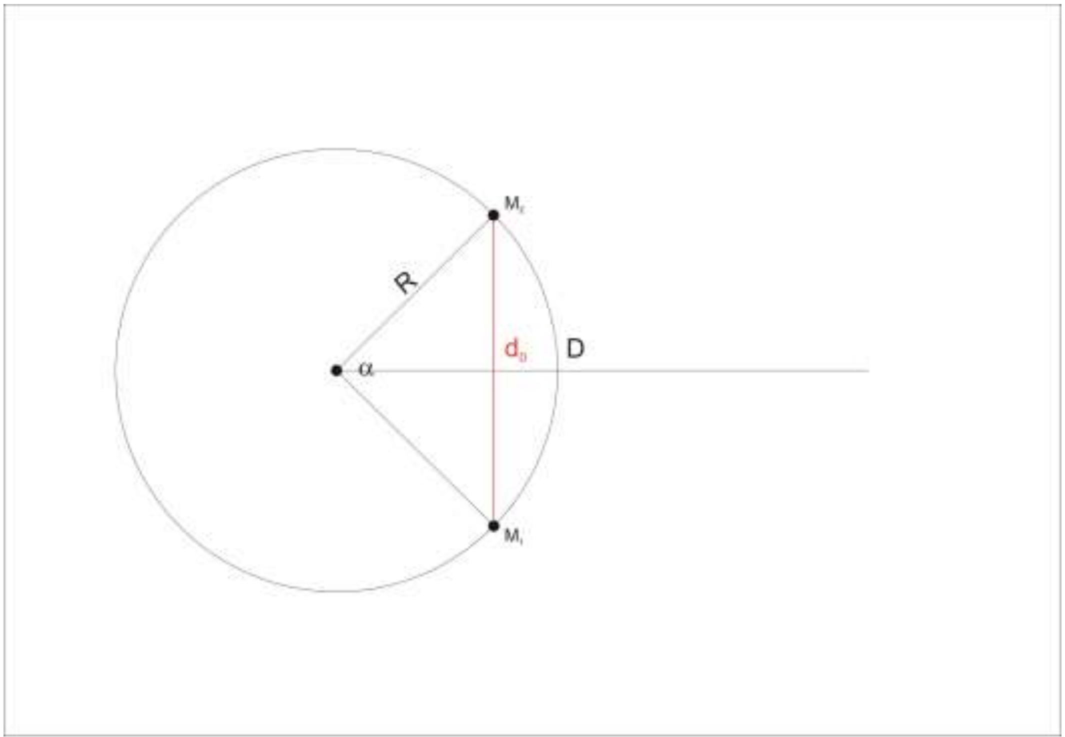
Vemos que debemos ahora calcular la distancia entre los dos puntos de observación M_1 y M_2 o sea la distancia "d", pero esta distancia NO es la distancia ni sobre la superficie de la tierra, que en ese caso sería la longitud del arco que une ambas ciudades, NI la distancia lineal entre ellas, o sea a través de la tierra, SINO la distancia Lineal y perpendicular a la línea Tierra- Sol, como se indica en la siguiente figura:



Observando a la tierra vista desde el Sol en el momento del máximo del tránsito (15:19:48TU), tenemos la siguiente vista:

Esta distancia cambia constantemente a medida que la tierra gira, por lo que deberíamos entonces calcular "d" para cada uno de los pares de fotografías tomadas en cada hora. En principio procedemos a calcular la distancia lineal "d" entre ambas ciudades:

en la imagen siguiente vemos el planteamiento gráfico del problema



Procedemos a calcular mediante Google Earth la longitud del arco M1-M2 la que llamamos D; estableciendo proporciones entre longitudes y ángulos en la circunferencia tenemos:

$$\frac{D}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi} \qquad \text{de donde tenemos:} \qquad \alpha = \frac{D}{R}$$

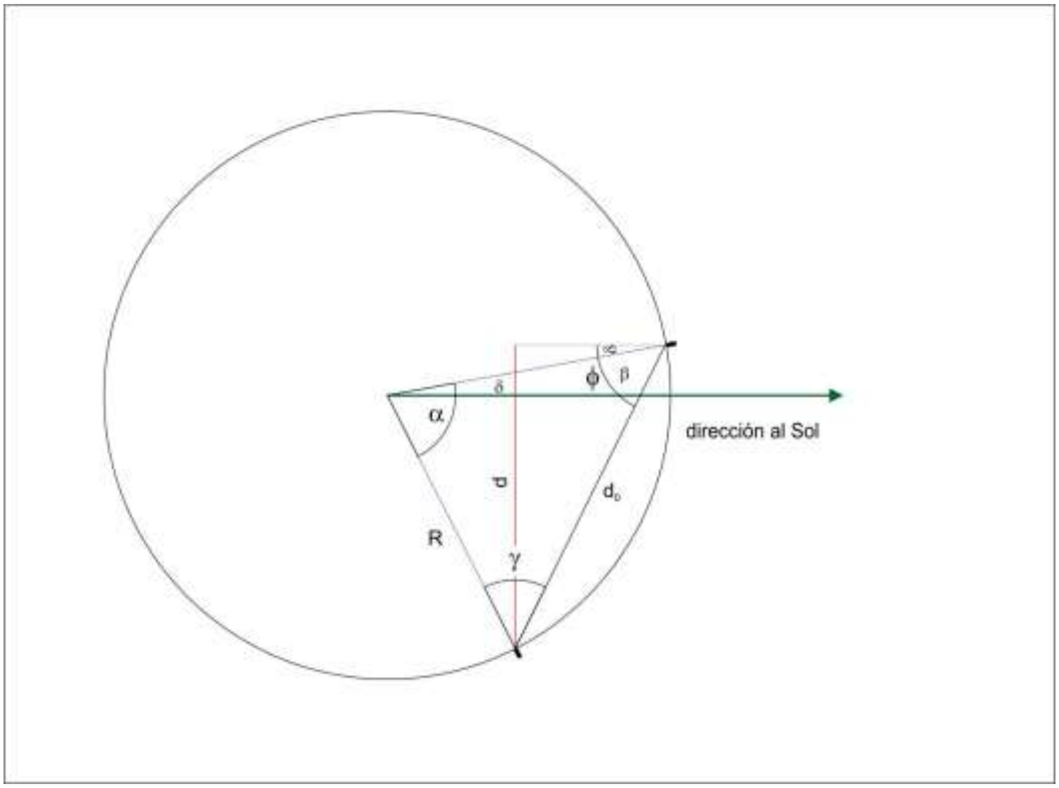
ahora aplicando la ley del coseno tenemos:

$$do^2 = 2R^2 - 2R^2Cos(\alpha) = 2R^2(1 - Cos(\alpha))$$

$$do^2 = 2R^2(1 - Cos(\frac{D}{R}))$$

$$do = R\sqrt{2 - 2Cos(\frac{D}{R}))}$$

Como explicamos, la distancia "d" a tomar en cuenta es aproximadamente la proyección sobre la perpendicular a la línea Tierra-Sol, esta la obtenemos así:



Mediante el teorema del seno tenemos:

$$\frac{R}{Sen(\beta)} = \frac{d_0}{Sen(\alpha)} \quad \text{y} \quad \beta = ArcSen(\frac{R.Sen(\alpha)}{d_0})$$

y

$$\phi = \beta + \delta$$

donde δ es igual a el ángulo que ha recorrido el punto de observación después del medio día solar o sea 12 TU el cual hallamos restándole 12 h al tiempo de la observación mas la diferencia en longitud al meridiano central del uso horario. Teniendo el ángulo ϕ podemos calcular la proyección de d_0 que sería "d":

$$d = d_0.Sen(\phi)$$

De esta manera y mediante la siguiente ecuación ya explicada

$$r_T = \frac{d}{\Delta\pi\left(\frac{r_T}{r_M} - 1\right)}$$

procedemos a calcular la Distancia Tierra Sol "r_T" que es el objetivo de este proyecto.

Referencias:

- Proyecto GLORIA, Actividad 8.- Cálculo distancia Tierra-Sol a partir de imágenes tránsito de Venus.)
- http://xjubier.free.fr/en/site_pages/transits/ToM_2019.html
- **Calculador de Anomalia Excentrica: http://www.jgiesen.de/kepler/kepler.html**
- Consultas a los Drs. Carlos Abad y Elvis Lacruz, CIDA.