

Ortvay Rudolf verseny megoldások 1. rész

A cikksorozat azon célkitűzéssel készül, hogy a lassan ötvenéves Ortvay Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó verseny feladatai közül néhánynak a -lehetőségek szerinti részletességű- ismertetését bemutassa.

Ezzel párhuzamosan felhívás a hallgatóság és a feladatkitűzők részére, a minél több és minél teljesebb megoldások elkészítésének irányába.

A megoldások a feladatok kitűzőivel egyeztetve készültek el. Reméljük hogy hasznosnak bizonyulnak az érdeklődők számára.

Az összeállítás nem meghatározott sorrend szerint történik, azok megszerkesztésében való részvételre bátorítjuk a közönséget.

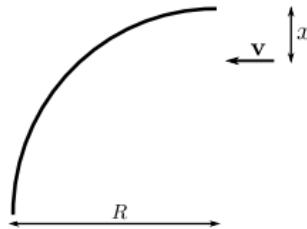
A jelen cikk a 2016.évi 6. és 16., illetve a 2017.évi 4. és 7. feladatokat, illetve azok megoldásait tartalmazza.

Az itt szereplő megoldásokat túlnyomórészt Gombkötő Ákos állította össze. A 2017/7. feladat megoldásának leírása Galzó Ákos Ferenc közreműködésével történt.

Köszönet a szervezőknek és a feladatok kitűzőinek, valamint minden feladatmegoldónak!

2016/6. Feladat

Egy vízszintes lapon álló, R sugarú, negyedkörív alakú fal homorú oldalához érkezik egy test a vízszintes lapon v sebességgel csúszva, a fal széléhez húzott érintővel párhuzamosan, a fal szélétől x távolságra. Súrlódás sehol sincs. Hány pattanás után, és mekkora sebességgel hagyja el a test a falat, ha az ütközés a fallal a) tökéletesen rugalmas, b) tökéletesen rugalmatlan? Vizsgáljuk az x lim 0 határesetet!



(Tichy Géza)

A feladatmegoldásunk szempontjából lényeges az a ki nem mondott feltétel, hogy a fal rögzített pozíciójának és merevnek, a test pedig pontszerűnek tekinthető.

Ezenfelül ha $x < 0$, vagy $x > R$, akkor triviálisan nincs ütközés, míg $x = 0, x = R$ esetekben a test éppen a fal 'csúcsaival' ütközne, ahol viszont rosszul definiált a felületi normális. Ebből eredően a továbbiakban kikötjük hogy: $0 < x < R$.

A feladat szimmetriája miatt érdemes polárkoordinátákban megfogalmazni a feladatot.

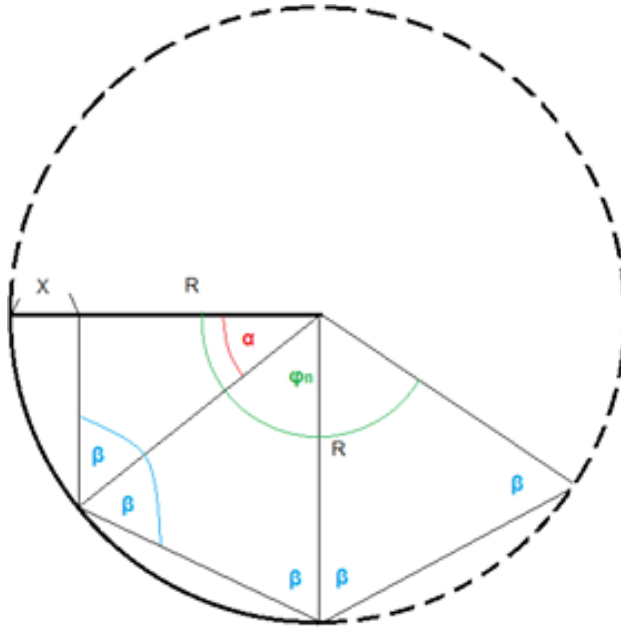
Először megoldjuk a feladat a), majd b) részét, ezt követően megvizsgáljuk a megoldást tetszőleges köztes ütközési szám esetére.

A gondolatmenet minden esetben azonos, vagyis veszünk egy képzeletben kiegészített körperemet, és ezen belül az ' N '-edik ütközés koordinátáját vizsgáljuk.

Az ütközés koordinátáját egyértelműen lehet jellemezni egy szöggel.

Ha ez a szög az ' N '-edik ütközésnél olyan tartományba esik, ahol nincs fal, kijut a kiegészített körből. Természetesen ekkor ' $N-1$ ' pattanás után hagyja el a falat a test.

a) Az 1.ábránkon megtekinthető a rugalmas ütközések esete.



Jól látható módon, az első ütközéshez rendelhető szöget a $\cos \alpha = \frac{R-x}{R} = 1 - \frac{x}{R}$ egyenlet definiálja.

Az első ütközés során a felületi normálissal bezárt szög $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, és tökéletesen rugalmas esetben az ütközés után is ugyanekkora marad a sebesség és a felületi normális által bezárt szög.

Az egyenlő szárú háromszögek elemi tulajdonságai miatt lesz igaz hogy ezek a szögek 'öröklődnek' az egyes ütközések között.

Ebből eredően az 'N+1'-edik ütközéshez -amelynél el tud szakadni a faltól- (és ezért 'N' valódi pattanáshoz) tartozó szög:

$$\phi_n = \alpha + N(\pi - 2\beta) = \alpha + N(\pi - (\pi - 2\alpha)) = \alpha(1 + 2N) \quad (1)$$

Ezek alapján a fal elhagyásához az szükséges, hogy a $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \phi_n < 2\pi + k2\pi$ reláció teljesüljön, ahol "k" (nemnegatív) egész szám.

Természetesen a célunk a legkisebb ennek eleget tevő ϕ_n megkeresése. Látható, hogy negyedkörív esetén a test semmilyen kezdőfeltétel esetén nem tud megtenni egy teljes fordulatot, ebből eredően a számítás könnyen elvégezhető analitikusan, elegendő a $k = 0$ esetet vizsgálni.

Mindössze azt kell kiszámítani, hogy a $\phi_n = \frac{\pi}{2}$ egyenlőség milyen (nem feltétlenül egész) 'N'-re teljesül, majd ennek a felső-egészrészét kell venni.

Ez utóbbi természetesen magyarázatra szorul: Valójában, ha a $\phi = \frac{\pi}{2}$ szög-koordinátájú pontot nem tekintjük a falhoz tartozónak, akkor 'N' felső-egészrésze adja meg a valódi pattanások számát.

Ha azonban, és most nem így számolunk a továbbiakban, a sarok még a falhoz tartozik, és onnan úgy tud visszapattanni mintha csak a segédkör egy részlete volna, akkor az 'N' egész értéke esetén hozzá kell adni egyet, hogy megkapjuk a pattanások számát.

Azt hogy nem így számolunk, az is indokolja -ahogyan már fentebb leírtuk-, hogy a csúcsoknál a felületi normális nem jól definiált.

Elvégezve a számolást:

$$\phi_n = \alpha(1 + 2N) = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$N = \frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lceil N \rceil = \lceil \frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2} \rceil \quad (4)$$

Ezek alapján tehát, feltételezve hogy a csúcsok nem részei a falnak, a pattanások száma :

$$\lceil N \rceil = \lceil \frac{\pi}{4 \arccos(1 - \frac{x}{R})} - \frac{1}{2} \rceil \quad (5)$$

Az eredményt ábrázolja az alábbi ábra:

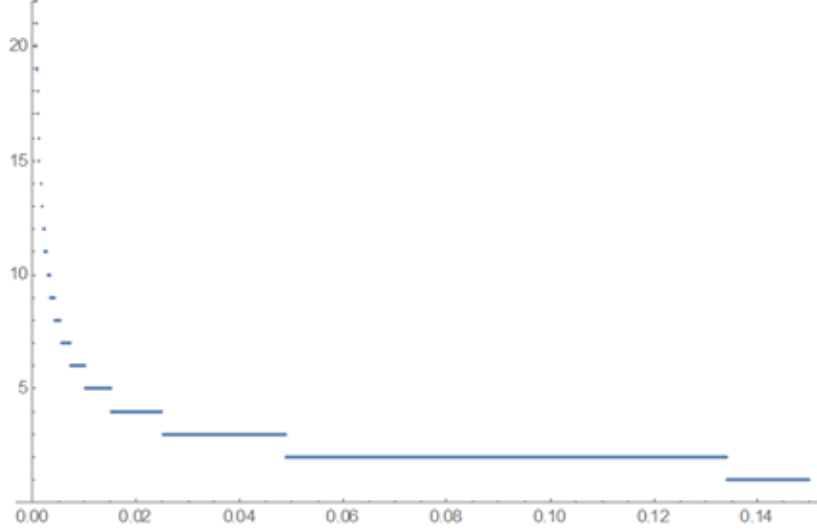


Figure 1: Függőleges tengelyen a pattanások száma, vízszintes tengelyen az x/R érték látható.

A sebesség nagysága rugalmas esetben természetesen a kezdeti 'v' sebességgel megegyező.

Mivel minden pattanásnál a szögeltérülés $\pi - 2\beta = 2\alpha$, ezért a kezdeti sebesség irányához képest $2\lceil N \rceil \arccos(1 - \frac{x}{R})$ szöget fog bezárni a végső sebesség.

Az 'x' kisértékű határértékét tekintve, az első megállapításunk nyilván az lehet, hogy ekkor α szintén nullához tart, vagyis a pattanások száma

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lceil N \rceil \approx \lceil \frac{\pi}{4\alpha} \rceil \quad (6)$$

jelleggel tart a végtelenbe.

A kérdés csak az, hogy vajon az α értékei 'x' milyen függvénye szerint tartanak nullához, ha 'x' értékei nullához tartanak.

Wolfram Mathematica program segítségével sorbafejtjük az α -t:

$$\alpha \approx \sqrt{2 \frac{x}{R}} + O(x^{1.5}) \quad (7)$$

Ezek alapján a pattanások számára

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lceil N \rceil \approx \lceil \frac{\pi \sqrt{R}}{4\sqrt{2x}} \rceil \quad (8)$$

b) Teljesen rugalmatlan ütközésnél a felületi normális irányú sebességkomponensek eltűnnek. Intuitívan nem nehéz látni, hogy a pattanások száma független lesz az 'x' értéktől, nevezetesen 1.

Elképzelhető természetesen olyan gondolatmenet, amely a körívet határértékként fogja fel, és ekkor végtelen számú rugalmatlan ütközés következne be, azonban folytonos és differenciálható görbe mentén való mozgás esetén nem érzem indokoltnak "pattogás"-nak nevezni az ilyen infinitézimális hatásokat.

A sebesség iránya minden esetben $\frac{\pi}{2}$ szögeltérést szenved a kezdeti irányhoz képest. A sebesség nagysága kiszámolandó, és az érdekesség kedvéért végezzük el ezt úgy, hogy a negyedkörívet egyenletes beosztású szakaszokra osztjuk, majd határértéket veszünk.

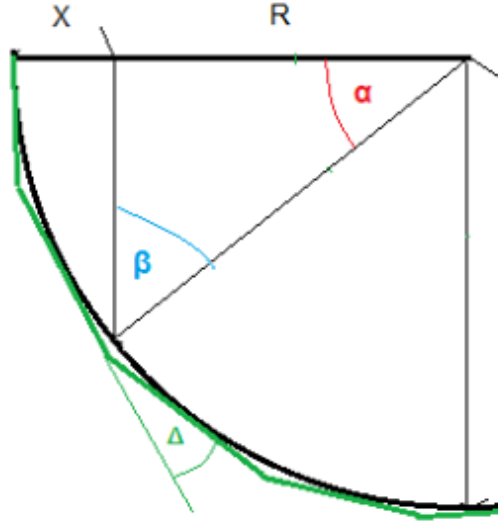


Figure 2:

Mindig amikor a test egy újabb szakaszhoz érkezik, a sebességének csak a felülettel párhuzamos komponense marad meg, oly módon hogy a nagyságra $v_{n+1} = v_n \cos(\Delta)$.

Ha a negyedkörhíjat egyenletesen osztjuk fel 'M' darabra, akkor $\Delta = \frac{\pi}{2M}$. Ha $l \leq M$ darab ütközés történik, akkor:

$$v_1 \geq v_{vegso} = v_1 \cos^l\left(\frac{\pi}{2M}\right) \geq v_1 \cos^M\left(\frac{\pi}{2M}\right) \quad (9)$$

Itt a v_1 sebesség a fallal való első ütközést követő sebesség, vagyis

$$v_1 = v \sin(\beta) = v \cos(\alpha) = v\left(1 - \frac{x}{R}\right) \quad (10)$$

Ha a körhíj határértékbe megyünk át, vagyis az 'M' szám végtelen határértékét vesszük, akkor a (9)-es egyenlőtlenség átmegy az alábbi alakba:

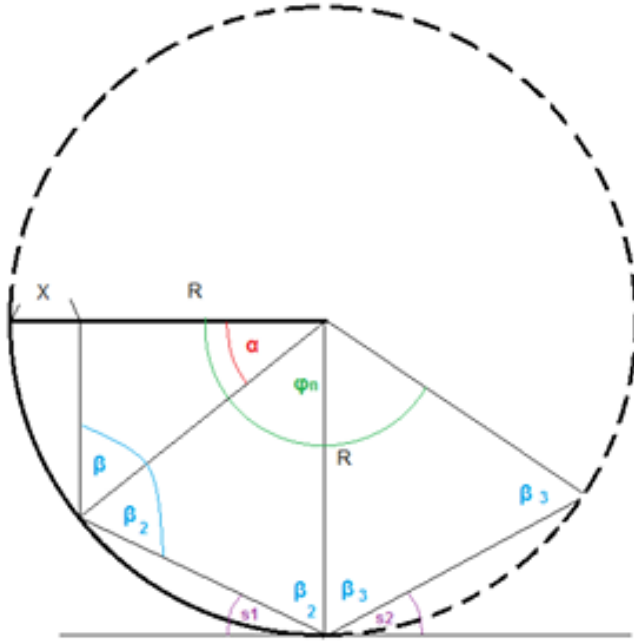
$$v_1 \geq v_{vegso} \geq v_1. \quad (11)$$

Ez természetesen csak úgy teljesülhet, ha egyenlőség áll fenn.

Ebből eredően a végső sebesség $v_{vegso} = v\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ nagyságú, és $\frac{\pi}{2}$ -vel elfordult irányú.

Az 'x' kis értékű határértékénél az egyetlen releváns változás, hogy a ' v_{vegso} ' érték tartani fog 'v'-hez.

c) Vizsgáljuk most a 'k' ütközési számú esetet. Ekkor egy ütközés után a felületi normális irányú sebességkomponens 'k'-szeresére növekszik, ahol ($0 < k < 1$).



Az ábrán látható ' s_1 ' és ' s_2 ' (sebességeknek a felület érintőjével bezárt szögei) kapcsolata felírható mint:

$$k \tan(s_1) = \frac{kv_{\perp}}{v_{\parallel}} = \tan(s_2) \quad (12)$$

Látható α és s_1 kapcsolata is, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta_1 = s_1$.

Jól látható, hogy a ϕ_n (A segédkörön való 'N'-edik ütközési ponthoz tartozó szög) felírható mint:

$$\phi_n = \alpha + \sum_{i=1}^N (\pi - 2\beta_i) = \alpha + \sum_{i=1}^N 2s_i \quad (13)$$

Fejezzük ki most az s_i tagokat.

$$s_i = \arctan(k^i \tan \alpha) \quad (14)$$

Meg kell keresnünk azt a legkisebb 'N'-et, amelyre fennáll az:

$$\phi_n = \alpha + \sum_{i=1}^N 2 \arctan(k^i \tan \alpha) \geq \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

egyenlet. Ezt numerikusan/grafikus módszerrel lehet megoldani, feltéve hogy létezik megoldás.

Ha ez $N = \infty$ határesetben sem tud teljesülni, az fizikailag azt jelenti, hogy a test végtelen számú pattanás után is kevesebb távolságot tud megtenni a fal mentén, mint amennyi az elszakadáshoz szükséges volna.

Természetesen a végtelen sok pattanás után a sebességnek még mindig lesz a felülettel párhuzamos komponense, így a falat a b) részhez hasonlóan el tudja hagyni.

Ilyen esetekben megoldásnak az $N = \infty$ fogadható el. Arra a kérdésre, hogy mely α és k paraméterek mellett fog véges, és melyekre végtelen N pattanás történni, grafikusan válaszolhatunk.

Vizsgáljuk a kis ' x ', illetve ebből eredően a kis ' α ' határt az analitikus megoldhatóság szempontjából. Ekkor ugyanis:

$$\arctan(k^i \tan \alpha) \approx k^i \alpha \quad (16)$$

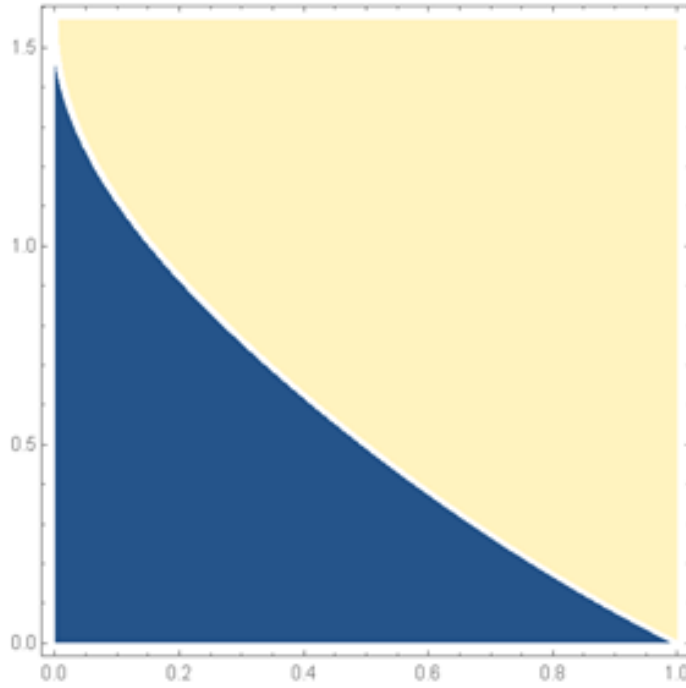


Figure 3: Vízszintes skálán az ütközési paraméter, függőlegesen az α szög szerepel (radiánban). A sárga terület azon paraméter-tartományt jelölik, amelyre 5000-nél kevesebb ütközés történik.

Így, analóg módon az a) résszel, meg tudjuk keresni azt a nem feltétlenül egész 'N'-et, amelyre teljesül az egyenlőség, majd felső-egészrészét veszünk, természetesen feltéve hogy véges számú pattanással el tudja hagyni a test a falat.

Ez utóbbi feltétel akkor teljesül ha:

$$\phi_{\infty} = \alpha(1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2k^i) = \alpha(1 + 2\frac{k}{1-k}) > \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\pi}{2}(1-k) < \alpha(1+k) \quad (17)$$

ahol kikötjük hogy $k \neq 1$. A nemegész N értéket a következő egyenlet segítségével keressük meg:

$$\phi_n = \alpha(1 + \sum_{i=1}^N 2k^i) = \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

A geometriai sorösszeget folytonos függvénynek értelmezzük, így meg tudjuk keresni a megfelelő 'N'-et.

$$\alpha(1 + 2\frac{k - k^{N+1}}{1-k}) = \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

Ebből rendezések után végül megkapjuk a végeredményt:

$$\lceil N \rceil = \lceil \log_k [k - (1-k)(\frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2})] - 1 \rceil \quad (20)$$

Konkrét esetet tekintve, például $\alpha = 0.01$, $k = 0.999$ értékekre 82 pattanás után szabadul el a test a faltól. Az a) feladatrész megoldásából 79 jön ki. Néhány hasonló kísérletből megállapítható, hogy a pattogás-szám meglehetősen lassan konvergál a rugalmas határesethez, ha 'k' tart 1-hez.

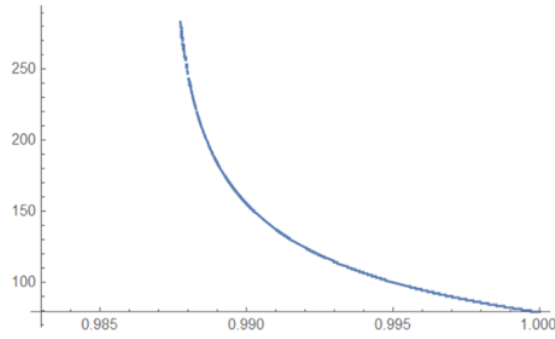


Figure 4: Vízszintes skálán az ütközési paraméter, függőlegesen a pattanások száma szerepel. $\alpha=0.01$

Tehát összességében, kis 'x' paraméterek esetén, ha fennáll:

$$\arccos\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 + 2\frac{k}{1-k}\right) \leq \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

reláció, akkor végtelen sok pattanás következik be, míg ennek hiányában

$$\lceil N \rceil = \lceil \log_k \left[k - (1-k) \left(\frac{\pi}{4 \arccos\left(1 - \frac{x}{R}\right)} - \frac{1}{2} \right) \right] - 1 \rceil \quad (22)$$

kifejezés adja meg az ütközések számát, kivéve ha $k=1$. A sebesség nagysága a b)-beli eredménnyel egyezik meg végtelen sok ütközés esetén, egyébként $\sqrt{v^2\left(1 + \frac{x^2}{R^2} - \frac{2x}{R}\right) + v^2 k^{2\lceil N \rceil} \left(\frac{2x}{R} - \frac{x^2}{R^2}\right)}$.

Megjegyezzük hogy az elsőrendű sorbafejtés nem csak kis 'x', hanem kis 'k' együttható esetén is jó eredményt nyújt.

Mindazonáltal ha a (17.) egyenletet átírjuk a kis 'x' határesetre, ezzel megkaphatunk egy szép, tömör feltételt a pattanások végtelen számára:

$$x \leq \frac{R\pi^2}{8} \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} \quad (23)$$

[1] Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I.

Gombkötő Ákos beküldött megoldás alapján került összeállításra.

2016/16. Feladat

A súlytalanság állapotában egy R sugarú higancsepp lebeg. Ha a cseppet gyenge E_0 térerősségű, homogén elektromos térbe helyezzük, a csepp a tér irányában kissé megnyúlik. Adjuk meg a higancsepp egyensúlyi alakját! A higany felületi feszültsége α , és tegyük fel, hogy $\epsilon_0 E_0^2 R \ll \alpha$! (Vigh Máté)

A feladatot alapvetően két részfeladatra osztva lehet megoldani:

-Meghatározzuk az elektromos tér által keltett lokális nyomás-eloszlást. Ezt elvileg iteratívan tudjuk elvégezni, vagyis először gömbre vonatkozóan kell kiszámítani.

-Ez alapján kiszámítjuk a gömbalaktól való eltérést, és a megváltozott alak ismeretében megismételjük a nyomás-eloszlás számítását.

-Ezt a két lépést felváltva ismételjük. Mi most csak az első iterációt végezzük el, aminek az elégségességét utólag indokoljuk meg.

Feltételezzük a feladat megoldása során, hogy a higanycsepp körül a közeg nem áramlik, a közeg külső nyomása statikus és homogén, a higanycsepp belsejében nem lép fel áramlás, illetve hogy a higanycsepp összenyomhatatlan.

Gömbi polárkoordinátában dolgozunk, azonban felhasználjuk a hengerszimmetriát. Az elektromos tér iránya jelöli ki a tengelyt amelytől a θ szöget mérjük.

Felírva az egyensúlyi esetre vonatkozó Young-Laplace egyenletet:

$$\alpha \left(\frac{1}{R_1(\theta)} + \frac{1}{R_2(\theta)} \right) = P_{belső} - P_{külső} \quad (24)$$

A külső nyomás igen bonyolult lehet, ha a higanycsepp körül áramlik a közeg. Ahogyan feljebb említettük, számításunk során az ebből adódó tagokat nem vesszük figyelembe. A külső nyomás a statikus atmoszférikus nyomás, és az elektromos térből eredő perturbáló tag összege lesz.

A belső nyomás, -mivel a súlytalanság esetén nem kell a hidrosztatikus nyomással számolni- a folyadék belsejében lévő statikus nyomás.

Az elektromos tér hiányában kezdetben 'R' sugarú gömb alakú cseppünk van, ezért a perturbált állapotot fel tudjuk írni úgy mint:

$$r(\theta) = R(1 + f(\theta)), \quad (25)$$

ahol az $f(\theta)$ a geometriai perturbáció.

A perturbáció hatása a görbületre kifejezhető mint:

$$\left(\frac{1}{R_1(\theta)} + \frac{1}{R_2(\theta)} \right) \approx \frac{2}{R} - \frac{2f(\theta)}{R} - \frac{1}{R} \left[\cot(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] \quad (26)$$

Ennek az eredménynek a részletes levezetése megtalálható [1]-ben.

Ebből eredően felírható az $f(\theta)$ -ra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$-\frac{2f(\theta)}{R} - \frac{1}{R} \left[\cot(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\Delta P(\theta)_{belső} - \Delta P(\theta)_{külső}}{\alpha} \quad (27)$$

ahol $\Delta P(\theta)_{belső} - \Delta P(\theta)_{külső} = P(\theta)_{belső} - P(\theta)_{külső} - \frac{2\alpha}{R}$.

Fontos észrevenni, hogy $f(\theta)$ nem egyértelmű, mert tetszőlegesen hozzá lehet adni egy "A cos(θ)" tagot. Ez a fenti egyenlet linearitásából ered, és abból a tényből, hogy:

$$-\frac{2 \cos(\theta)}{R} - \frac{1}{R} \left[\cot(\theta) \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \cos(\theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

Ezenfelül feltételezve a higany összenyomhatatlanságát, -ami az adott körülmények között elfogadható- a térfogat konstans, vagyis a perturbált felületre meg tudunk fogalmazni egy feltételt:

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin(\theta) d\theta = 0 \quad (28)$$

Ezenfelül ha a koordináta-rendszerünk origóját a tömegközéppontban rögzítjük, akkor fennáll, hogy:

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = 0 \quad (29)$$

A három (27, 28, 29) egyenleteket kell egyszerre kielégítenie a megoldásnak.

Bontsuk fel a ' $\Delta P(\theta)$ ' perturbáló nyomást, és az ' $f(\theta)$ ' perturbált felületet Legendre-polinomok terén.

$$\Delta P(\theta) = \sum q_n P_n(\cos(\theta)) \quad f(\theta) = \sum c_n P_n(\cos(\theta)) \quad (30)$$

Az egymásra ortogonális tagok szerint rendezve, a (27) egyenlet az együtthatókra vonatkozó lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, ahogyan lentebb látni fogjuk.

Ezen a ponton kell meghatározni a homogén elektromos mező által keltett mechanikai feszültség-eloszlást a gömb mentén.

Hivatkozunk pl: [2] eredményeire, amely szerint semleges töltésű vezető gömb felülete mentén a homogén elektromos tér által keltett nyomás:

$$\Delta P_{kulso}(\theta) = \frac{9\epsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(\theta) \quad (31)$$

Mivel $\cos^2(\theta) = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0)$, ezért ennek a nyomás-perturbációnak a sorbafejtése triviálisan elvégezhető.

$$-2 \sum c_n P_n - \left[\cot(\theta) \frac{\partial \sum c_n P_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \sum c_n P_n}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{9R\epsilon_0 E_0^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3} P_2 \right) + \Delta P_{belso} P_0 \quad (32)$$

Kifejtve a megfelelő tagokat, azt kapjuk hogy:

$$\sum_n c_n \left[-2P_n + 2 \cos(\theta) \frac{\partial P_n}{\partial \cos \theta} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 P_n}{\partial \cos^2 \theta} \right] = (\Delta P_{belso} - \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{2\alpha}) P_0 - \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{\alpha} P_2 \quad (33)$$

Ezekután tekintsük a nevezetes Legendre-féle differenciálegyenletet. Amennyiben a változó $\cos \theta$, a következő formában írandó:

$$-2 \cos \theta P_n' + \sin^2 \theta P_n'' + n(n+1)P_n = 0$$

Jól látható módon a Legendre-egyenlet behelyettesíthető, végeredményben:

$$\sum_n c_n P_n \left[-2 + n(n+1) \right] = (\Delta P_{belso} - \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{2\alpha}) P_0 - \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{\alpha} P_2 \quad (34)$$

A fenti egyenletet megszorozzuk valamelyik Legendre-polinommal, majd integráljunk θ szerint 0-tól π -ig. Ezt elvégezve, felhasználva az ortogonalitási relációt, kapjuk hogy rendre:

$$\begin{aligned} -2c_0 &= -\frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{2\alpha} + \Delta P_{belso} \\ 4c_2 &= \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Illetve $n > 2$ esetén:

$$(n^2 + n - 2)c_n = 0.$$

A ' c_0 ' és ' c_1 ' együtthatók értékét a térfogatra, illetve tömegközéppontra vonatkozó feltételek rögzítik. Az összenyomhatatlanságból:

$$\sum_n \int_0^\pi c_n P_n(\cos \theta) \sin(\theta) d\theta = \sum_n c_n \frac{2 \sin(n\pi)}{(n+n^2)\pi} = 0; \implies c_0 = 0. \quad (35)$$

A vonatkoztatási rendszerünk megválasztásából eredően pedig:

$$\sum_n \int_0^\pi c_n P_n(\cos \theta) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = \sum_n c_n \frac{2 \sin(n\pi)}{(2-n-n^2)\pi} = 0; \implies c_1 = 0. \quad (36)$$

Az egyenletekből következik az is, hogy az elektromos tér hatására a belső nyomás $\Delta P_{belső} = \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{2\alpha}$ értékkel növekszik meg.

A higanycsepp alakja első közelítésben:

$$r(\theta) \approx R \left(1 + \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{8\alpha} (3 \cos^2(\theta) - 1) \right) = R \left(1 - \frac{3R\epsilon_0 E_0^2}{8\alpha} \right) + R \frac{9R\epsilon_0 E_0^2}{8\alpha} \cos^2(\theta) \quad (37)$$

A feladat szövege alapján az $R\epsilon_0 E_0^2/\alpha$ tagok nagyon kicsinyek, ebből eredően utólagosan elfogadható a perturbációs számítás mint számolási módszer, egyszersmind a felület kis torzulása miatt nem szükséges az elektromos térből eredő nyomást korrigálni.

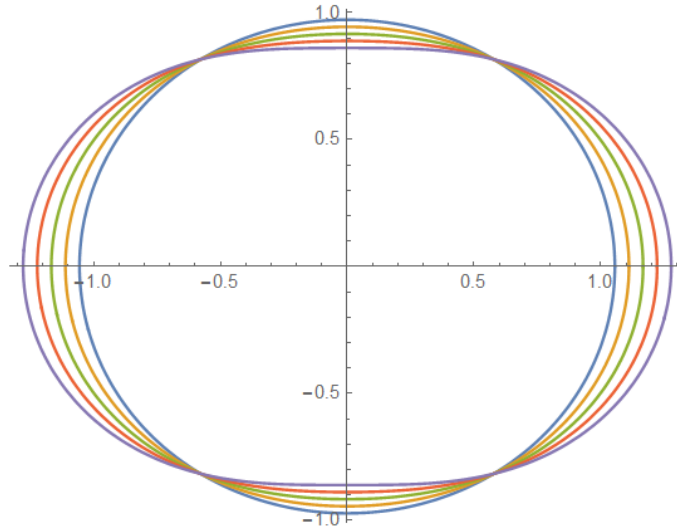


Figure 5: A higanycsepp erős megnyúlásának szemléltetése. $R=1$, az adatok szándékosan nagyok lettek választva.

[1] Landau – Lifsic: Elméleti fizika VI. Hidrodinamika

[2] Kenneth V. Beard, James Q. Feng, and Catherine Chuang: A Simple Perturbation Model for the Electrostatic Shape of Falling Drops

[3] C. N. Richards and G. A. Dawson: Stresses on a raindrop falling at terminal velocity in a vertical electric field—A numerical method

Gombkötő Ákos beküldött megoldás alapján került összeállításra.

2017/4. Feladat

A statisztika nagyon sokszor használja pénzérme feldobását a sztochasztikus folyamatok szemléltetésére. Kétségtelen hogy minden részletével együtt ez egy igazán bonyolult folyamat, de bizonyos egyszerűsítő feltételek mellett -vákuumkamrában, jól definiált paraméterekkel történő gépi dobás- mégis bizonyos mértékig előrejelezhető a végeredmény.

Vizsgáljunk egy, a padló magasságából függőlegesen feldobott vékony, kicsiny sugarú érmét ($r \gg z$). Az érme a feldobás pillanatában vízszintes, síkmenti irányban helyezkedik el, megegyezéssel alapon a fej van felül. Az érme a talajról nem pattan el, közegellenállás nincs, az r sugár elhanyagolhatóan kicsi az érme tömegközépponti mozgásához tartozó trajektória jellemző hosszához képest.

A dobás paramétereinek (sebesség, szögsebesség) függvényében írja fel hogy mikor lesz a dobás eredménye fej, és mikor írás. Fogalmazza meg kvalitatívan a véletlenszerűség feltételeit.

Fogalmazzon meg felső becslést a $|P_{fej} - \frac{1}{2}|$ értékére vonatkozóan.

Hozzávetőlegesen mekkora ez az érték egy valóságos pénzfeldobó-automatára?

(Gombkötő Ákos)

Érdeemes megjegyezni a pénzfeldobással kapcsolatban, hogy bár a mai napig felhasználják a látszólag véletlenszerű eredményeit döntéshozatalok során, azonban ismerve a kezdeti feltételeket, a klasszikus fizika keretein belül a dinamika elvileg meghatározható, ebből eredően a pénzfeldobások kimenetelét is meg tudnánk jósolni.

Ugyanakkor a részletes folyamat igen bonyolult módon számolható.

A feladat lényege az, hogy -a zavaró tényezőktől eltekintve, mint a közegellenállás, precesszió, és az érme tényleges alakja és mérete - ismerjük fel a véletlenszerűség eredetét egy kellően leegyszerűsített modellen belül.

Érdeemes hangsúlyozni, hogy míg a fentebb említett tényezők egy részét bizonyos esetekben figyelembe lehetne venni perturbációként, a legnagyobb leegyszerűsítés az érme pattogásainak a figyelmen kívül hagyása.

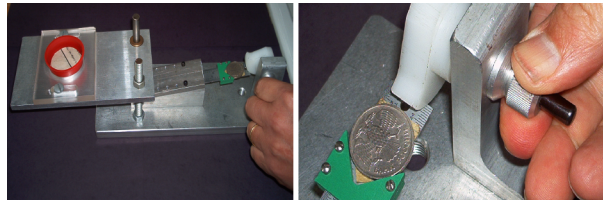


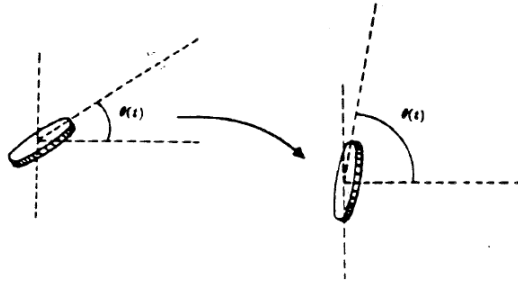
Figure 6: Egy konkrét pénzfeldobó kísérleti elrendezés. [3]

Feltételezve hogy a feladatban szereplő érme szimmetrikus, homogén, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az érme tömegközéppontja azonos a geometriai középpontjával.

A szimmetria miatt két főtételenségi nyomaték azonos.

Jól ismert, hogy a merev testek mozgása felbontható a tömegközéppont mozgására, és forgásra.

A feladat által megadott egydimenziós modellben az érme kinematikájának kettő lényeges paramétere az érme tömegközéppontjának a függőleges sebessége, és az érme forgásának szögsebessége. A forgástengely az érme síkjában van.



A koordináta-rendszerünket úgy vesszük fel hogy $h(0) = 0$, és definiálunk egy, az érméhez rögzített egységvektort, melynek elfordulását $\theta(t)$ -vel jelöljük, rögzítve hogy: $\theta(0) = 0$.

A dobás paraméterei az érme átadott impulzus és impulzusmomentum, az egyszerűség kedvéért azonban az ezektől (ebben az elrendezésben csak konstanssal való szorzás erejéig) különböző kinematikai mennyiségeket, $\dot{h}(0) = v$, és $\dot{\theta}(0) = \omega$ használjuk.

A feladat alapján a pénzérme nem pattan el a talajról, vagyis a dinamikát véges (T) ideig vizsgáljuk, amíg az érme a kiindulási magasságával megegyező síkkal nem érintkezik. A dobás végeredményét, vagyis azt hogy fejet vagy írást dobunk-e, azzal az egyszerű megfontolással döntjük el, hogy mekkora volt $\theta(T)$.

Feltételezzük, hogy amelyik oldala az érme a "T" pillanatban felül volt, az felül is marad. Fizikailag ezt egy puha és erősen tapadó felületen realizálhatnánk, de az érme kézzel való elkapása is közelítőleg teljesíti ezt a feltételezést.

A feladat alapján kezdetben a fej oldala van felül. Ebből -valamint abból, hogy az érme "z" vastagsága elhanyagolható a sugárhoz képest- eredően a dobás végeredménye akkor fej, ha:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \theta(T) < \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in Z \quad (38)$$

és akkor írás, ha:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \theta(T) < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in Z. \quad (39)$$

A két egyenlőtlenség nem fedi le a teljes szögtartományt, de mivel az érme "z" vastagsága elhanyagolható, a modellünkön belül nulla a valószínűsége annak, hogy az érme az oldalára esik.

A kinetikai egyenletek:

$$\theta(t) = \omega t \quad (40)$$

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + vt. \quad (41)$$

Az egyetlen kérdés a "T" időpont meghatározása. A fenti egyszerű modellen belül ezt a

$$vT - \frac{gT^2}{2} = r|\sin \omega T| \quad (42)$$

egyenlet első, pozitív, nemnulla gyöke adja. Az ábra alapján az is könnyen belátható, hogy a dobásra az érme geometriai tulajdonságai és a modellünk feltételezései korlátot jelentenek. A dobás csak olyan lehet, hogy teljesüljön:

$$v > r\omega,$$

különben az érme pereme geometriailag keresztülhatolhatna a kiindulási síkon.

A feladat ugyanakkor kimondja, hogy olyan dobásokra szorítkozunk, melyek esetén a trajektória hosszához képest a sugár elhanyagolható.

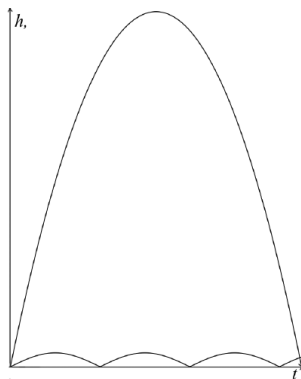


Figure 7: A tömegközéppont trajektóriája grafikusán. A "T" időpontelvbén a két függvény metszéspontjaiból olvasható le.

Ez közelítően annyit jelent, hogy $r \ll v^2/g$, ami lehetővé teszi hogy elhagyjuk a sugarat tartalmazó tagot. A hatását utólagosan, perturbatíván vesszük figyelembe.

Ezzel az egyszerűsítéssel $T = \frac{2v}{g}$, ebből pedig a megoldás triviálisan felírható.

A dobás végeredménye fej, ha:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \frac{2v\omega}{g} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (43)$$

különben írás. Az írás és fej dobásokat a $\frac{2v\omega}{g} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ hiperbolák választják el a paraméterek (v, ω) terén.

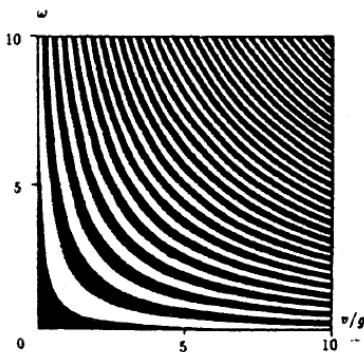


Figure 8: Az érmedobások paramétertere. A fekete területek jelölik azon paramétereket, amelyek esetén fejet dobunk.

A valóságos kísérletek során természetesen mindig van egy, mérési pontosság által korlátozott bizonytalanság, a "v" és "omega" paraméterekre is. Az hogy ezen két paraméter méréseinek hibái korreláltak-e, a feladat kérdése szempontjából lényegtelen, a két paramétert függetlennek vesszük.

Ekkor egy adott elrendezés esetén, a konfidencia-intervallum rögzítése után, a dobásunkat jellemző paraméterek a paraméterter egy adott téglalapjába esnek.

Ha ezen téglalap teljesen két hiperbola közti területre esik, akkor azt mondhatjuk hogy a dobás végeredményét determinisztikusan, a konfidencia-intervallum által meghatározott bizonyossággal ismerjük. A továbbiakban ezt nevezzük determinisztikusnak.

Amennyiben azonban a téglalap átfed több tartományt, vagyis -egyszerűen szólva- ha az ábrán lévő fekete és fehér tartományokat is tartalmaz, akkor a dobás eredménye már nem dönthető el determinisztikusan az

előre rögzített bizonyosság mértékével.

Az ábrán látható, hogy a hiperbolák jellemzően egyre sűrűbben helyezkednek el, ahogyan a szögsebesség és sebesség növekszik.

Még ha az előre rögzített mérési bizonytalanságunk roppant kicsiny is, egyidejűleg kellően nagy átlagos "v" és "ω" paraméterek esetén a fenti értelemben vett determinizmus megszűnik, a mindig jelenlévő statisztikai bizonytalanság egyre jelentősebb lesz, mígnem a konfidencia-intervallumon belül is megjelenik. Ez a véletlenszerűség megjelenésének kvalitatív magyarázata.

A feladat kérdése ezenfelül egy felső becslés a $|P_{fej} - 0.5|$ értékre.

Tételezzük fel hogy adott egy, a dobást jellemző $f(v, \omega)$ valószínűsűrsűrűség.

A formula levezetéséhez élnünk kell azzal a feltételezéssel, hogy mind a "v", mind az "ω" paraméterek lehetséges tartományai alulról korlátosak, a paraméterek ezért úgy írhatóak, hogy: $\omega = \omega' + a$; $v = v' + b$.

Az eloszlásfüggvényre vonatkozóan -mely csak a vesszővel jelzett komponensekre vonatkozik-, teljesül, hogy a tartója a paraméterter (+,+) kvadránsában van.

Természetesen teljesül, hogy:

$$f(v', \omega') \geq 0 \quad ; \quad \int \int f(v', \omega') dv' d\omega' = 1 .$$

Definiáljuk ezenfelül a csak az egyes paramétereket jellemző valószínűsűrsűrűségeket,

$$f_1(\omega') = \int f(v', \omega') dv' \quad ; \quad f_2(v') = \int f(v', \omega') d\omega'$$

melyek segítségével a feltételes valószínűsűrsűrés kifejezhetőek:

$$f_\omega(v') = \frac{f(\omega', v')}{f_1(\omega')} \quad ; \quad f_v(\omega') = \frac{f(\omega', v')}{f_2(v')}$$

A $|P_{fej} - 0.5|$ mennyiségre felső korlátot adhatunk, ennek levezetése megtalálható [1]-ben.

$$|P_{fej} - \frac{1}{2}| \leq \frac{g\pi}{8} \min \left(\frac{V_v}{b}, \frac{V_\omega}{a} \right) \quad (44)$$

Itt

$$V_v = \int V[f_v(\omega)] f(v) dv = \int \int |\partial_\omega f_v(\omega)| f(v) d\omega dv$$

$$V_\omega = \int V[f_\omega(v)] f(\omega) d\omega = \int \int |\partial_v f_\omega(v)| f(\omega) dv d\omega;$$

ahol $V(f)$ az f függvény teljes megváltozását jelöli.

Persi Diaconis mérési adatait használjuk fel az érték konkrét becslésére, de természetesen ez a gép, illetve kézi dobás esetén a személy tulajdonságaitól erősen függhet.

A sebességet 2.1 – 2.7 m/s, a szögsebességet 226 – 251 rad/s korlátok közöttinek vehetjük. Amennyiben egyenletes eloszlást tételezünk fel ezen értékek között -ez realizztikusan nem indokolt, de felső becslés révén nem hamisítjuk meg az állításunkat ezzel- , $|P_{fej} - 0.5| \leq 0.056$.

A feladat lényegét meghaladja, de érdemes lehet foglalkozni az érme sugarának kicsi, de véges méretéből eredő effektussal.

Egyrésztől, ahogyan korábban már említésre került, a paraméterterből csak azon tartományokat tekintjük érvényesnek, melyre $v > r\omega$.

Ha szeretnénk figyelembevenni az érme sugarának méretét, azt az alábbi eljárással lehet egyszerűen elvégezni.

Abból kiindulva, hogy az érme "r" sugara kicsi, keressük a dobás időtartamát a következő alakban: $T = \frac{2v}{g} + \epsilon r + o(r^2)$, és a 42. egyenletben hanyagoljuk el minden olyan tagot, ahol az "r" elsőnél magasabb kitevővel szerepel.

$$v\epsilon r - 2v\epsilon r + o(r^2) \approx r \left| \sin\left(\frac{2v\omega}{g}\right) \cos(\omega\epsilon r) + \cos\left(\frac{2v\omega}{g}\right) \sin(\omega\epsilon r) \right| \quad (45)$$

Az egyenletben szereplő trigonometrikus kifejezéseket "r" szerint sorbafejtve, majd a magasabbrendű tagokat elhagyva:

$$-v\epsilon r \approx r \left| \sin\left(\frac{2v\omega}{g}\right) \right| \quad (46)$$

$$\epsilon \approx -\frac{\left| \sin\left(\frac{2v\omega}{g}\right) \right|}{v} \quad (47)$$

Ebből

$$\phi(T) = \frac{2v\omega}{g} - \frac{r\omega}{v} \left| \sin\left(\frac{2v\omega}{g}\right) \right| \quad (48)$$

Természetesen figyelembe kell vennünk, hogy a fenti eredmény csak $v > r\omega$ egyenlőtlenség teljesülése esetén vehető érvényesnek. Egyenlőség fennállása esetén, $\phi(T) = 0$.

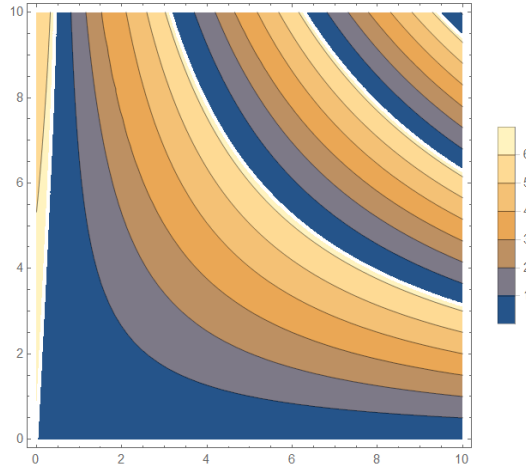


Figure 9: A dobás végén felvett szög (mod 2π) eloszlása, az érme méretének elsőrendben való figyelembevételével. $g = 10m/s^2, r = 0.05m$

Bár a korábban tárgyalt modellünkön túlmutat, de érdemes megemlíteni, hogy az érme visszapattanásainak figyelembevétele jelentősen növeli a végeredmény véletlenszerűségét, a paramétertéren szereplő hiperbolák fokozatosan elmosódnak.

A rendezettség elvesztése a visszapattanások megengedésével érdekes folyamat, de bonyolult, pillanatnyilag csak numerikusan számolható.

[1] Eduardo M.R.A. Engel: A road to randomness

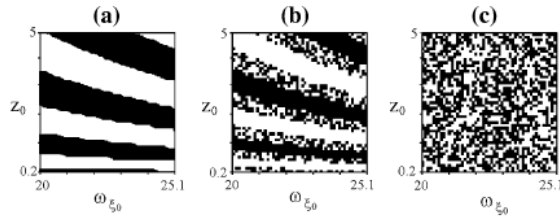


Figure 10: A végeredmények eloszlása a paramétertéren. Sebesség helyett egy kezdeti magasság jellegű paraméter szerepel. Az ábrán a visszapattanások száma rendre 0, 3, 10. [2]

[2] Jaroslaw Strzalko, Juliusz Grabski, Andzej Stefanski, Przemyslaw Rzemyslaw Perlikowski, Tomasz Kapitaniak: Understanding Coin-Tossing

[3] Persi Diaconis, Susan Holmes, Richard Montgomery: Dynamical bias in the coin toss

[4] Razvan C. Stefan, Tiberius O. Cheche: Coin toss modeling

Az összeállítás során felhasználásra kerültek Jose Betancourt és Stefan Constantin Razvan megoldásai.

2017/7. Feladat

Vizsgáljuk meg a következő, ún. Norton-kupolán történő mozgást. Itt az r paraméter a csúcstól mért ívhossz,

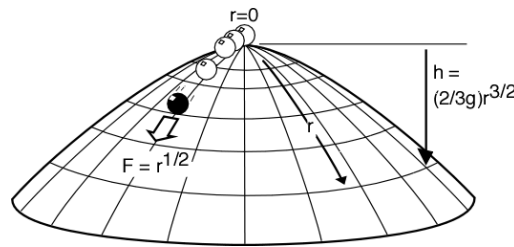


Figure 11:

a csúcstól nem túl távol egy pontszerű test mozgásegyenlete $\ddot{r} = \sqrt{r}$. Vezessük le ezt a mozgásegyenletet, és írjuk fel az általános megoldást akkor, ha a $t = 0$ pillanatban a test a csúcson nyugalomban áll.

Filozófusok számos cikket írtak erről a rendszerről, fejtsük ki mi lehet ennek az oka. Mutassunk rá legalább két különféle úton, hogy milyen módon is érvénytelenedik a modell mint a valóság leképezése.

Mutassuk meg, hogy egy ezzel ekvivalens rendszer minden különösebb kuriózum nélkül megoldható. Vizsgáljuk meg a Norton-kupola kvantumos változatát is, ahol a hullámfüggvény felülethez kötött. Írjuk fel a nulla impulzusmomentummal rendelkező, akkora energiával rendelkező energia-sajátállapotot, amely klasszikusan éppen elegendő volna a csúcson nyugváshoz!

(Gombkötő Ákos)

A feladat lényeges része az alapvető fogalmaink tisztázása, ezért ezekkel kezdjük, és ezt követően térünk rá a konkrét feladatra.

A klasszikus kauzalitást elfogadó fogalmi rendszereken belül, -amelyek közé a mechanika is tartozik- elvárjuk, hogy az objektumok (mozgás)állapotának megváltozása valamilyen, múltban vagy jelenben történt/történő hatás eredményeképpen történjen.

A mechanika elméletében a Newton-törvények azt mondják ki, hogy inerciarendszerben a mozgásállapot megváltozásaihoz mindig hozzárendelhetünk egy eredő külső erőt, ez lényegében a mechanika kauzalitását

definiálja.

A determinisztikusság elve a kauzalitástól annyiban különbözik, hogy az események végtelen láncolata között olyan kauzális kapcsolatot jelent, ami lehetővé teszi, hogy a jelen és a múlt egyértelműen meghatározza a jövőbeli eseményeket.

Más módon megfogalmazva, a szűk értelemben vett kauzalitás tulajdonképpen már megtörtént eseményeket köt össze a múlttal, a determinizmus pedig ezenfelül a még meg nem történt eseményekkel kapcsolatos jóslat lehetőségét tartalmazza.

A klasszikus mechanika a tapasztalatból levont, az idő próbáját kiálló, a mindennapok változásait jól magyarázó terület. Jellegéből fakadóan, illetve a tapasztalataink alapján szokás megfogalmazni azt az -egyébként a klasszikus fizika egészére kiterjesztett- elvárást, hogy az elmélet determinisztikus.

Logikailag ennek a teljesülését elvben könnyű ellenőrizni, mindössze a Newton-egyenletekre (amelyek másodrendű differenciál-egyenletek) kell megmutatni, hogy a megoldásukra teljesül a globális egzisztencia és unicitás.

Problémának látszik, hogy legáltalánosabb esetben ez nem teljesül, ám a fizikai elméletek a matematikai elméletnek csak egy szűk, és speciális a esetét jelentik. Sajnos általános módszer nem létezik arra, hogy egyértelműen megítéljünk egy adott modellt, fizikai valóság tartalom szempontjából.

Ugyanakkor fontos szem előtt tartani, hogy minden fizikai fogalmat a tapasztalatainkból kiinduló absztrakciók sorozatának végeredményeként kapunk. Legáltalánosabb esetben ezen lépéseket minden konkrét modell esetén el kellene végezni.

A testek trajektóriáit általában egyszerűsítő fogalomként használjuk. A modellezendő testek tömegközéppontjához, mint pontszerű testhez rendeljük hozzá annak trajektóriáját, és ezzel jellemezzük első közelítésben a kiterjedt testeket.

Korántsem triviális, hogy egy test állapotát milyen mennyiségekkel jellemezhetjük kielégítően. A tömegközéppont trajektóriája csak akkor tartalmaz minden információt az objektumról, amennyiben a vizsgált jelenségek szempontjából a kiterjedt testet jogos pontszerűnek tekinteni.

Egy test akkor tekinthető pontszerűnek, amennyiben a rá ható erők függetlenek a test geometriai alakjától, kiterjedésétől, és belső szerkezetétől.

A belső szerkezet figyelmen kívül hagyása a test modelljének homogenitását és merevségét, a geometria figyelmen kívül hagyása a gömbszimmetria feltételezését, a kiterjedés figyelmen kívül hagyása a test kiterjedésének infinitézimális méretének feltevését vonhatja maga után.

Azonban általában nem garantált, hogy az ezen tulajdonságokkal felruházott pontszerű test trajektóriája megegyezik az eredeti, valódi test tömegközéppontjának trajektóriáival.

Egy módszer lehet az ilyen módon felmerülő problémák kikerülésére, ha a helyettesítő-testek egy sorozatát tekintjük, ami fokozatosan tart a pontszerű testhez. Amennyiben az ilyen sorozat minden tagjára kiszámoljuk a trajektóriát, megállapítható hogy azok mennyiben tértek el az eredeti test trajektóriájától. Ha meghatározunk egy előre rögzített korlátot az eltérésre, lehetővé válik annak megállapítása, hogy az egyes tulajdonságok milyen mértékben hanyagolhatóak el.

Fontos hangsúlyozni, hogy általában szintén nincs garancia arra, hogy a trajektóriák fenti értelemben vett határértéke egybeessen a testek sorozatának határértékére vonatkozó trajektóriáival.

Az ilyen típusú számításokat általában igen bonyolult lenne elvégezni bármely konkrét esetre, azonban ezen feladat szempontjából fontosnak bizonyul.

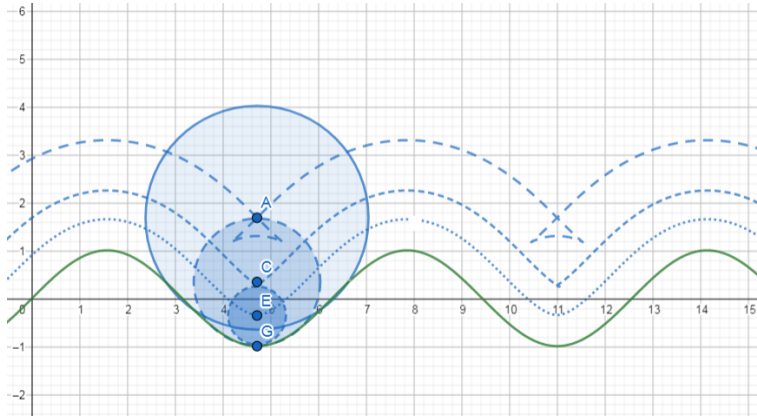


Figure 12: Egy szinuszfelületen mozgó, azzal végig érintkező, véges kiterjedésű golyó tömegközéppontjának a trajektóriája általában nem fog megegyezni egy kisebb sugarú golyó tömegközéppontjának trajektóriájával, egy eltolástól eltekintve sem. Az ábrán látható többértékűség csak az ábrázolás numerikus módszeréből fakad, minden pontban a legmagasabb koordináta realizálódhat.

A feladat azon típusú feladatok közé tartozik, amely a klasszikus mechanika determinizmusának megcáfolásával kacérkodik.

Ebbe a kategóriába esnek a gravitációs soktest-problémának olyan speciális közelítő-megoldásai, ahol egy kis test véges idő alatt végtelen sebességre tesz szert.

Ennek időbeli megfordítása (amely a mechanikában természetesen lehetséges) azt a megjósolhatatlan eseménysorozatot írja le, amikor a végtelen messzeségből egy kicsi tömeggel rendelkező objektum véges idő alatt eljut egy előre kijelölt helyre.

Ezek a közelítő megoldások csakugyan sértenék a determinizmust, de sértik az energiamegmaradást, és Newton harmadik törvényét is. Az ilyen esetekben a közelítés ténye az, amivel fel lehet oldani a látszólag meglepő indeterminizmust.

Ennél érdekesebbek a teljesen egzakt megoldások, mint amilyen a fenti feladatunk is. [1][2][3][4]

Tekintsük a feladat által megadott kupolán mozgó tömegpontot. Adott határsebességig a felület mentén való mozgás biztosított, a feladat által vizsgált esetben ez elegendő, hiszen a csúcs környezetére szorítkozunk.

A tömegpontra gyakorolt eredő erő a nehézségi erőnek a kényszerfelülettel párhuzamos vetülete.

A feladat jelöléseit használva $F_{\parallel} = mg \sin(\theta) = mg \frac{dh}{dr}$. (Az "r" a felület mentén, a csúcstól mért radiálisan megtett út.)

A Newton-egyenletből a részecske érintő irányú gyorsulása:

$$\ddot{r} = \frac{F}{m} = r^{1/2}. \quad (49)$$

Illesszük a tömegpontot kezdősebesség nélkül a felület csúcspontjába, vagyis válasszuk az $r(0) = 0, \dot{r}(0) = 0$ kezdőfeltételeket. Magától értetődően adódik ekkor a mozgásegyenlet következő megoldása:

$$r(t) \equiv 0. \quad (50)$$

Könnyen ellenőrizhető azonban, hogy szintén érvényes a megoldások következő osztálya:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < T \\ (1/144)(t - T)^4, & \text{ha } t \geq T \end{cases}$$

ahol a kezdeti feltételek kielégítéséhez az szükséges, hogy $T \geq 0$ legyen, de egyébként T tetszőlegesen választható állandó, amit semmilyen múltbeli esemény nem rögzít.

Eszerint tehát a részecske a $t < T$ időpontokban nyugalomban van, míg a $t > T$ pillanatokban véges sebességgel mozog. A $t = T$ időpontban a testre ható erő nulla, emiatt tehát nemcsak a determinizmus, de maga a kauzalitás is sérül – továbbá az elindulás irányát semmi sem határozza meg – a dinamika jósolhatósága nem teljesül.

Matematikai értelemben a determinizmus hiánya az egyenlet alakjához kapcsolható, amely megoldásaira nem teljesül az unicitás.

Fizikai értelemben a vizsgált rendszer több olyan elemmel is rendelkezik, amely a valóságban soha nem jelenik meg egzaktul. A legrelevánsabbak:

- Nincsenek egzaktul pontszerű klasszikus testek.
- Nem lehetséges tetszőlegesen hegyes vagy éles, másszóval tetszőlegesen nagy görbületű felületeket kialakítani.
- Nincsenek ideálisan merev testek.

Mindezek figyelembevételével érdemesnek tűnik elvégezni az idealizációink ellenőrzésére a fentebb részletezett módszert.

Mivel a testről semmi közelebbit nem tudunk, eleve feltételezzük a gömbszimmetriát, homogenitást, illetve az egyszerűség kedvéért a merevséget. Mint azt látni fogjuk, ebben az esetben elegendő a test méretére összpontosítani.

Sok más esetben is ez lehet a pontosabb modellezés kulcsa, ilyen a jólismert két pontszerű test rugalmas ütközése, amely esetben semmi sem rögzíti azt, hogy az ütközés után melyik egyenes mentén mozognak a testek.

A rosszul-definiáltságot elsősorban a felületi normális -egyúttal az erő- irányának nem-egyértelmősége okozza akkor, ha az érintkezési ponton legalább valamelyik testnek nincs véges görbülete.

Tekintsünk tehát egy, a csúcspontra helyezett, ϵ sugárral rendelkező gömbszimmetrikus merev testet. A test tömegközéppontja ekkor a kupola ϵ -sugarú simításán mozog, amelyet úgy definiálunk, mint azon \vec{R} koordinátájú pontok halmazát, melyekre teljesül hogy:

$$\min |\vec{R} - \vec{r}_i| = \epsilon ; \vec{r}_i \in \text{kupola}. \quad (51)$$

A kupola csúcának közvetlen közelében a test tömegközéppontja a csúcspont felett, egy lokálisan ϵ sugarú gömbfelülettel megegyező felület mentén mozdulhat el. A mozgásegyenlet pontos alakja függ attól, hogy a test gördül-e, de ez kvalitatív szerepet nem játszik.

A csúcs közelében az "r" mennyiség kifejezhető $r = \epsilon \phi$ kifejezéssel, ahol a ϕ az ϵ sugarú simuló kör középpontjából mérve a tömegközéppont függőleges tengelytől mért dőlésszöge. A mozgásegyenlet a csúcs közelében

$$\epsilon \ddot{\phi} = g \sin \phi.$$

Ekvivalensen a csúcstól mért ívhosszra

$$\ddot{r} = g \sin\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \approx \frac{gr}{\epsilon}. \quad (52)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása egyértelmű, tetszőlegesen kicsi ϵ érték esetén a csúcson nyugvás egy jóldefiniált instabil egyensúlyi-helyzet.

Ebből eredően a kis- ϵ sorozat dinamikája határértékben is determinisztikus, hiszen tetszőlegesen kicsiny, véges ϵ esetén a dinamika determinisztikus.

Ellenben a kis- ϵ sorozat határértékének -azaz a pontszerű testnek- a dinamikája nemdeterminisztikus.

Hogy bizonyos filozófusok milyen okból írhattak számottevő mennyiségű cikket a problémáról, azt talán kevésbé érdemes boncolgatni, de talán érdemes [4]-ből idézni: "Norton responds that virtually all of the idealizations he uses are used elsewhere in classical mechanics without complaint or harassment, and Malament concurs."

Amit bizonyíthatóan állíthatunk, hogy ugyanannyi joggal írtak erről a témáról, mintha a két rugalmasan ütköző pontszerű testben rejlő indeterminizmust járták volna körbe. A következtetéseket mindenki maga vonja le.

A feladat utolsó, kevésbé alaposan diszkutált része; a kupola felületéhez rendelhető egyik kvantummechanikai energia-sajátállapot felírása. A feladat során a magasság zérusszintjét éppen úgy választottuk, hogy a csúcst is tartalmazza, ezért az az energia, ami a csúcson nyugváshoz elegendő volna, $E = 0$.

Kvantummechanikai számítás esetén fontos tisztázni a peremfeltételeket. Fejezzük ki a szokásos hengerkoordináták és az ívhossz kapcsolatát.

A "z" függőleges tengelyt most az előzőekkel ellentétben a gravitációval ellentétesen irányítottnak választjuk, a rá merőleges sugárirányú koordinátát "R"-el jelöljük.

$$z(r) = -\frac{2}{3g}r^{3/2} \quad ; \quad r(z) = \left(-\frac{3g}{2}z\right)^{2/3}$$

$$\text{Igaz továbbá hogy } dR = \sqrt{(dr)^2 - (dz)^2} = dr \sqrt{1 - \frac{r}{g^2}}.$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy $r = g^2$ ívhossz mellett a kúp oldala már függőleges irányú. A feladat szövege nem mondja meg, hogy a kúpot milyen pontig tekintjük létezőnek, hiszen a klasszikus vizsgálat szempontjából a csúcs környezete a lényeges.

Amennyiben elvárjuk, hogy a felület koordinátái valós számokkal legyenek leírhatóak, a felületet le kell vágnunk valamilyen $r_l \leq g^2$ ívhossz mellett.

Ezt elfogadva, a továbbiakban úgy tekintjük, hogy a hullámfüggvény csak a kupola felülete mentén, kétdimenzióban értelmezett. A levágási peremen túl végtelen magasságú potenciálfalat tételezünk fel.

Fizikailag elvárható a $\Psi(r_l) = 0$, illetve a $\Psi'(0) = 0$ peremfeltétel.

A hullámfüggvény véges tartójú, a rendszernek csak kötött állapotai léteznek, emiatt az energiaspektrum diszkrét, és nem garantálja semmi azt, hogy az $E=0$ energiasajátérték, eltekintve esetleg bizonyos paraméterek esetétől.

Kifejezhetjük az $R(r)$ függvényt, vagyis a sugár-ívhossz függését.

$$R(r) = \frac{2g^2(1 - (1 - r/g^2)^{3/2})}{3}$$

A Schrödinger-egyenlet hengerkoordinátákban felírt alakja, felhasználva hogy az impulzuszómomentum nulla:

$$0 = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right) + mgz\right] \Psi(R, z) \quad (53)$$

átírható az ívhosszra vonatkozó közönséges differenciálegyenletre.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{g}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{1 - r/g^2}} \frac{\partial}{\partial r}$$

Ezeket behelyettesítve, összevonások után:

$$0 = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\left[\frac{g^2}{r} + \frac{1}{1 - r/g^2} \right] \partial_{rr} + \left[\frac{1}{2g^2(1 - r/g^2)^2} - \frac{g^2}{2r^2} - \frac{3}{2g^2} \frac{1}{\sqrt{1 - r/g^2} - (1 - r/g^2)^2} \right] \partial_r \right) + m \frac{2}{3} r^{3/2} \right] \Psi(r) \quad (54)$$

egyenletet kapjuk.

A kérdésben szereplő energiasajátállapot ennek az egyenletnek a $\Psi'(0) = 0$, $\Psi(g^2) = 0$ peremfeltételeket kielégítő megoldása.

Fontos hangsúlyozni, hogy ilyen feltételeket kielégítő megoldások csak bizonyos paraméterek esetén léteznek. Analitikus kifejezést az egyenletre egyszerű módon nem lehet felírni, így az egyenlet, és a peremfeltételek implicit definícióját fogadjuk el megoldásnak.

A normálást el nem végezve, a numerikus megoldást itt csak speciálisan a $\hbar = 1, g = 1$ értékek esetén írjuk fel. Az "m" tömeget variálva lehet olyan megoldásokat kapni, melyek kielégítik a $\Psi(g^2) = 0$ feltételt is.

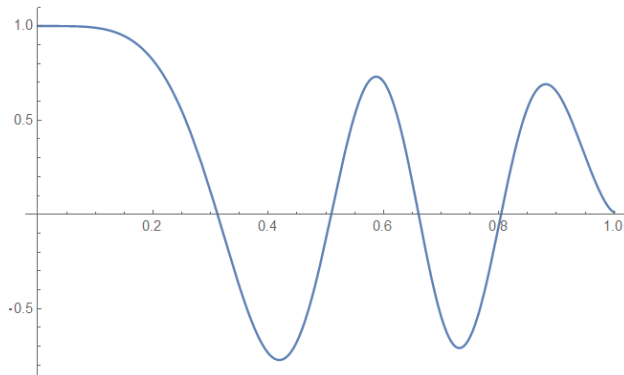


Figure 13: Egy $E=0$ sajátenergiájú $\Psi(r)$ hullámfüggvény menete, mely kielégíti a megfelelő peremfeltételeket is.

[1] <http://www.pitt.edu/~jdnorton/Goodies/Dome/>

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Norton's_dome

[3] David B. Malament: Norton's Slippery Slope

[4] Samuel C. Fletcher: What Counts as a Newtonian System?: The View from Norton's Dome

[5] <http://www.kozmoforum.hu/>