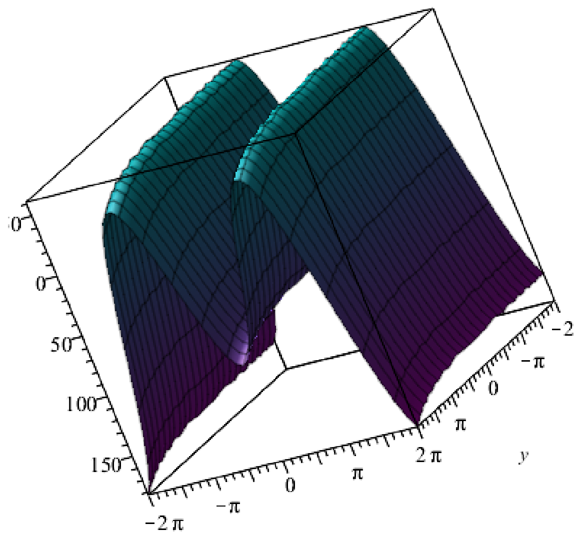
Matematik A, STX, gl
15. august 2018
Delprøve 2, Maple format



MATEMATIK UNIVERSET

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

Delprøve 1 læses i det andet dokument.

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :
Bemærk venligst, at 1960 → $x = 0$, 1970 → $x = 10$ osv.

Spgm. a

Der er tale om en eksponentiel funktion, så
$E1 := [0, 10, 20, 30, 40, 50, 56]$:
$E2 := [10.28, 12.51, 14.69, 17.07, 19.15, 22.03, 24.13]$:
Vha. eksponentiel regression er
$f(x) := ExpReg(E1, E2, x)$:
$evalf[5](f(x))$

$$10.659\ 1.0149^{x} \tag{1.1.1}$$

Dermed er tallene a og b bestemt til:
$a = 1.0149$
$b = 10.659$

Spgm. b

Man benytter fordoblingskonstanten.

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0149)}$

$$T_2 = 67.61286147\ \ln(2) \quad \textbf{(1.2.1)}$$

$evalf[5](\%)$

$$T_2 = 46.866 \quad \textbf{(1.2.2)}$$

Så befolkningstallet er fordoblet 47 år efter første observation. Kan også udregnes sådan:
$10.659\ 1.0149^x = 2 \cdot 10.659$

$$10.659\ 1.0149^x = 21.318 \quad \textbf{(1.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 46.86566429]] \quad \textbf{(1.2.4)}$$

Spgm. c

Her beregnes
$f'(x) = 0.38$

$$0.157533816752802\ 1.01488921343000^x = 0.38 \quad \textbf{(1.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 59.57804104]] \quad \textbf{(1.3.2)}$$

Så efter ca. 59.6 år, vil man overstige 0.38mio pr. år i Australien. Dette vil formentlig ske inden år 2020.

Opgave 8

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Man bestemmer vinkel C vha. sinusrelationerne.
$\frac{Sin(40)}{4} = \frac{Sin(C)}{6}$

$$0.1606969024 = \frac{\sin(0.01745329252\ C)}{6} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for C}}$

$$[[C = 74.61856828]] \quad \textbf{(2.1.2)}$$

Ovenstående vinkel er spids! Vi skal finde den stumpe.
$C_{stump} = 180 - 74.61856828$

$$C_{stump} = 105.3814317 \quad \textbf{(2.1.3)}$$

Spgm. b

Arealet af ABC er
$T = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot Sin(180 - 40 - 105.3814317)$

$$T = 6.817325708 \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Arealet af BCD er
$T = 13.5 - 6.817325708$

$$T = 6.682674292 \quad \textbf{(2.2.2)}$$

Så bestemmes $|CD|$.

$6.682674292 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot CD \cdot Sin(74.61856828)$

$$6.682674292 = 1.928362829\, CD \tag{2.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for CD}}$

$$[[CD = 3.465465208]] \tag{2.2.4}$$

Som er det ønskede.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

En nulhypotese vil være:

H_0: Holdningerne til statslig adfærdsreguleringen indenfor sundhed er uafhængigt af kønnet.

De observerende værdier defineres.

$A := \begin{bmatrix} 250 & 190 \\ 179 & 186 \\ 78 & 49 \end{bmatrix}:$

Så er

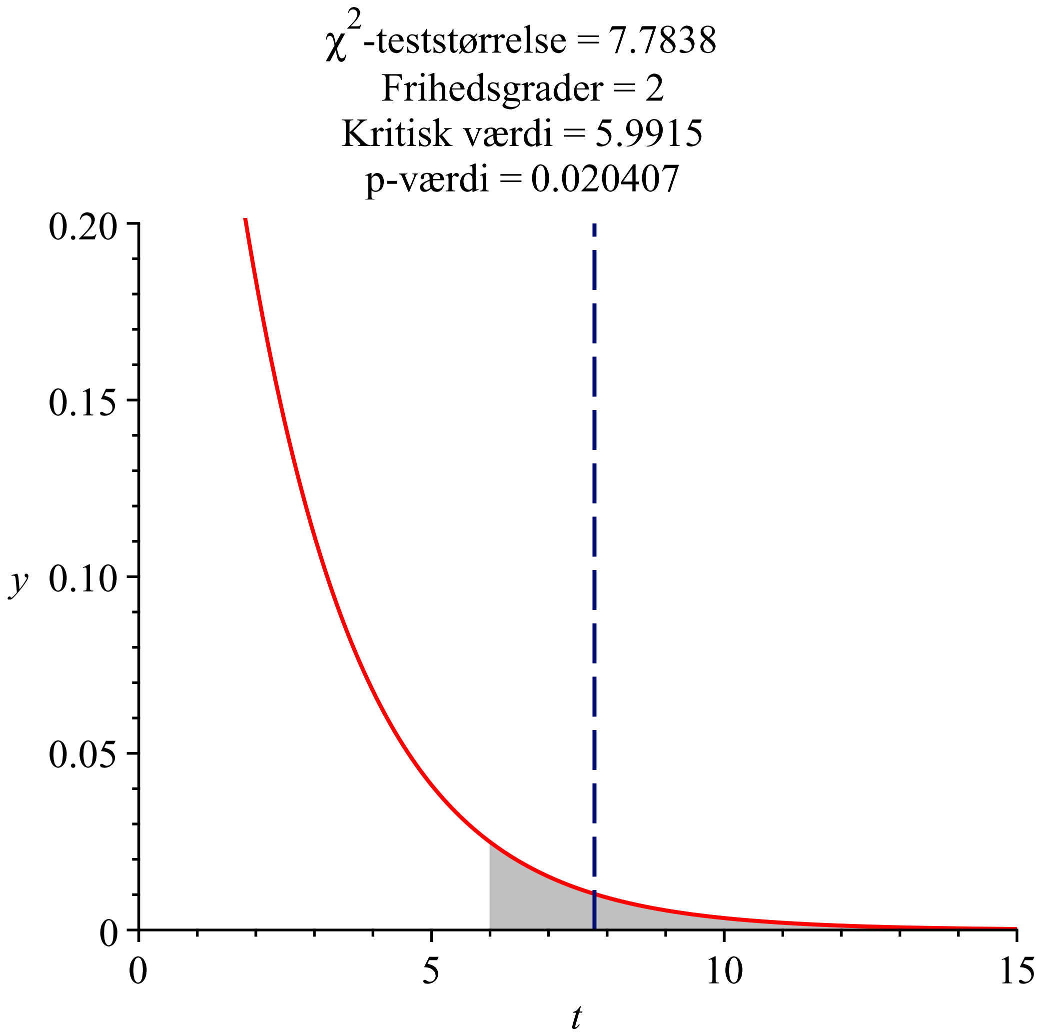
forventet(*A*)

$$\begin{bmatrix} 239.36 & 200.64 \\ 198.56 & 166.44 \\ 69.087 & 57.913 \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

Spgm. b

Man benytter en uafhængighedstest.

$ChiKvadratUtest(A, level = 0.05)$



Da p-værdien er 0.020407<0.05, så er nulhypotesen falsk, og dermed skal den forkastes. Der er altså en sammenhæng mellem holdning og køn.

Opgave 10

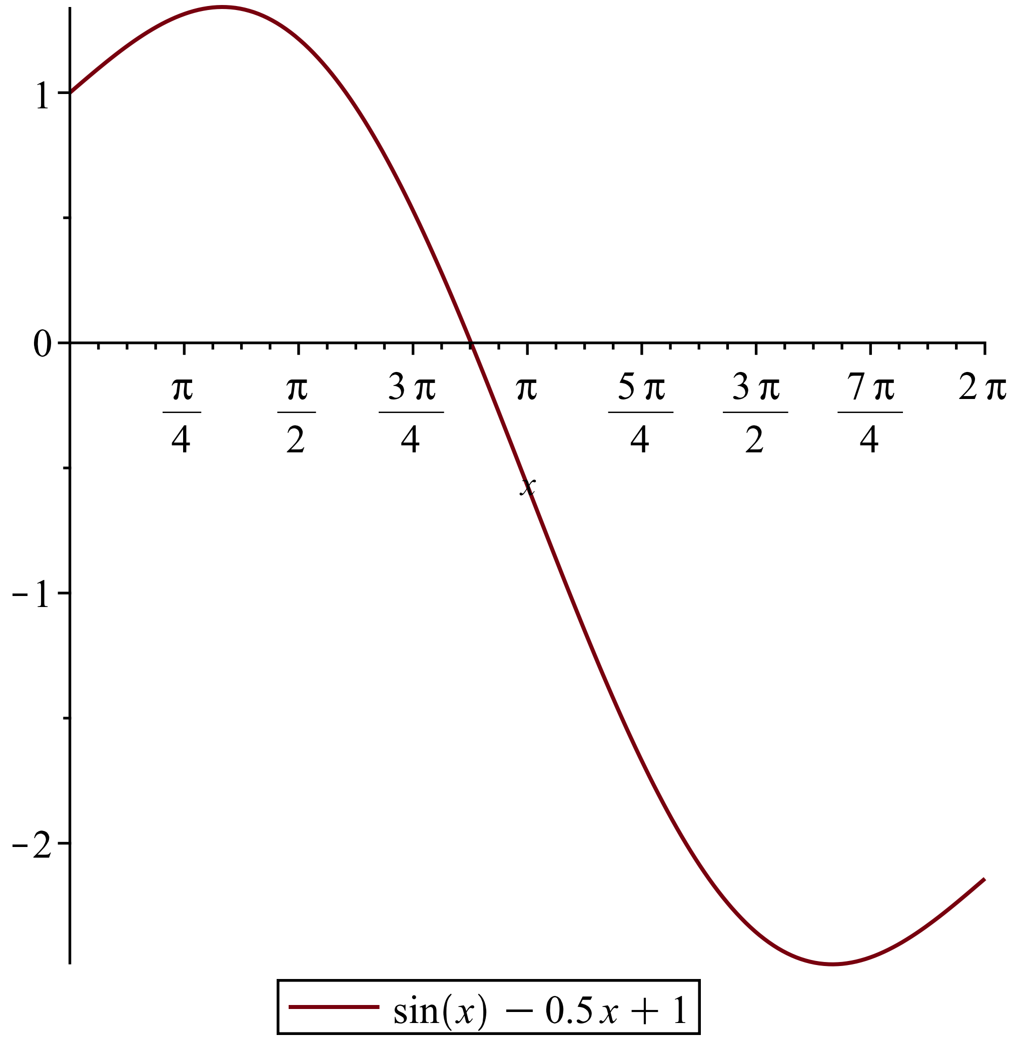
$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Først defineres funktionen.

$f(x) := \sin(x) - 0.5 \cdot x + 1 :$

$plot(f(x), x = 0 ..2 \cdot \mathrm{Pi}, legend = f(x))$



Nulpunktet bestemmes.
$intervalsolve(f(x) = 0, x = 0..2 \cdot \mathrm{Pi})$

$$[2.754673754] \qquad (4.1.1)$$

Dermed er nulpunktet
$A = (2.754673754, 0)$.

Spgm. b

Monotoniforholdene bestemmes. Man differentierer $f(x)$ og sætter den afledede lig 0, da løsningerne skal være i intervallet 0 til 2 π, så gælder følgende ligning:
$intervalsolve(f'(x) = 0, x = 0..2\ \mathrm{Pi})$

$$[1.047197551, 5.235987756] \qquad (4.2.1)$$

Man benytter nu den anden afledede test.
$f''(1.047197551) < 0 \xrightarrow{\text{test relation}} true$
Så har man lokalt maksimum i $x = 1.047197551$
$f''(5.235987756) > 0 \xrightarrow{\text{test relation}} true$
Så har man lokalt minimum i $x = 5.235987756$

Dermed kan der sluttes, at:
$f(x)$ er voksende i intervallet fra 0 til 1.047 og 5.236 til 2 π.

$f(x)$ er aftagende i intervallet fra 1.047 til 5.236.

Spgm. c

Integralet bestemmes.

$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^2 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$

$$V = 9.256922239 \tag{4.3.1}$$

Da formlen ovenfor er volume-formlen omkring x-aksen, kan det sluttes, at volumen af $f(x)$, drejet 360^o om førsteaksen, afgrænset af $x = 0$ og $x = 2$ giver et resultat på $V = 9.26$

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :
$A := [11, 0, 10.5]$:; $B := [5, 0, 15]$:

Spgm. a

Det oplyses, at l går gennem A og B. Så opstilles en retningsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ for parameterfremstillingen og A er et fast punkt. Dermed fås
$\langle x, y, z\rangle = \langle A\rangle + t \cdot \langle B - A\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 - 6\,t \\ 0 \\ 10.5 + 4.5\,t \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

Spgm. b

Ligningen for kuglen er
$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 15^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 225 \tag{5.2.1}$$

Spgm. c

Man indsætter parameterfremstillingens værdier i kuglens ligning og så
$(11 - 6\,t)^2 + 0^2 + (10.5 + 4.5\,t)^2 = 225$

$$(11 - 6\,t)^2 + (10.5 + 4.5\,t)^2 = 225 \tag{5.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 0.3333333333], [t = 0.3333333333]] \tag{5.3.2}$$

$\begin{bmatrix} 11 - 6 \cdot 0.333 \\ 0 \\ 10.5 + 4.5 \cdot 0.333 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 9.002 \\ 0 \\ 11.9985 \end{bmatrix} \tag{5.3.3}$$

Så de må skære hinanden i punktet
$P = (9, 0, 12)$.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Parablen bestemmes.
Det vides, at den er 25m bred, så
$x = -12.5 \lor x = 12.5$.
Højden er $f(x) = 3.75$ ved $x = 0$, så man har
$3.75 = a \cdot (0 - (-12.5)) \cdot (0 - 12.5)$

$$3.75 = -156.25\, a \tag{6.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a = -0.02400000000]] \tag{6.1.2}$$

Så fås
$f(x) = -0.024 \cdot (x - (-12.5)) \cdot (x - 12.5)$, så man får
$f(x) := -0.024\, x^2 + 3.75$

$$f := x \mapsto -0.024\, x^2 + 3.75 \tag{6.1.3}$$

Spgm. b

Afstanden d bestemmes.
$f(x) = 3.7$

$$-0.024\, x^2 + 3.75 = 3.7 \tag{6.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -1.443375673], [x = 1.443375673]] \tag{6.2.2}$$

Så d må være
$d = 1.443375673 + 1.443375673$

$$d = 2.886751346 \tag{6.2.3}$$

Dvs. $d = 2.887\ m$.

Spgm. c

Højden af de to laveste stolper må være:
$d = \dfrac{2.886751346}{2} + 3 \cdot 2.886751346$

$$d = 10.10362971 \tag{6.3.1}$$

$f(10.10362971)$

$$1.300000001 \tag{6.3.2}$$

Dermed må højden ved de laveste stolper være $1.3\ m$

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Først bestemmes

$y'(0) = 0.25 \cdot ((48 \cdot 0.985^0 + 22) - 5)$

$$D(y)(0) = 16.250 \quad \textbf{(7.1.1)}$$

Dvs. ved tidspunktet $t = 0$ vokser stegens temperatur hvert minut med $16.25^o C/\text{min}$.

Spgm. b

Differentialligningen løses med de oplyste tal.

$dsolve(\{y'(t) = 0.25 \cdot ((48 \cdot 0.985^t + 22) - y(t)), y(0) = 5\}, y(t))$

$$y(t) = \frac{48\ 197^t\ 200^{-t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right) \quad \textbf{(7.2.1)}$$

Funktionen defineres.

$$y(t) := \frac{48\ 197^t\ 200^{-t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right)$$

$$y := t \mapsto \frac{48\ 197^t\ 200^{-t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right) \quad \textbf{(7.2.2)}$$

Den maksimale temperatur er

$y'(t) = 0$

$$\frac{48\ 197^t \ln(197)\ 200^{-t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} - \frac{48\ 197^t\ 200^{-t}\ln(200)}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} - \frac{e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right)}{4} = 0 \quad \textbf{(7.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = -\frac{4\ln\left(\frac{-\frac{17\ln\left(\frac{200}{197}\right)}{48} + \frac{65}{192}}{\ln\left(\frac{200}{197}\right)}\right)}{-1 + 4\ln\left(\frac{200}{197}\right)}\right]\right] \quad \textbf{(7.2.4)}$$

$evalf[5](\%)$

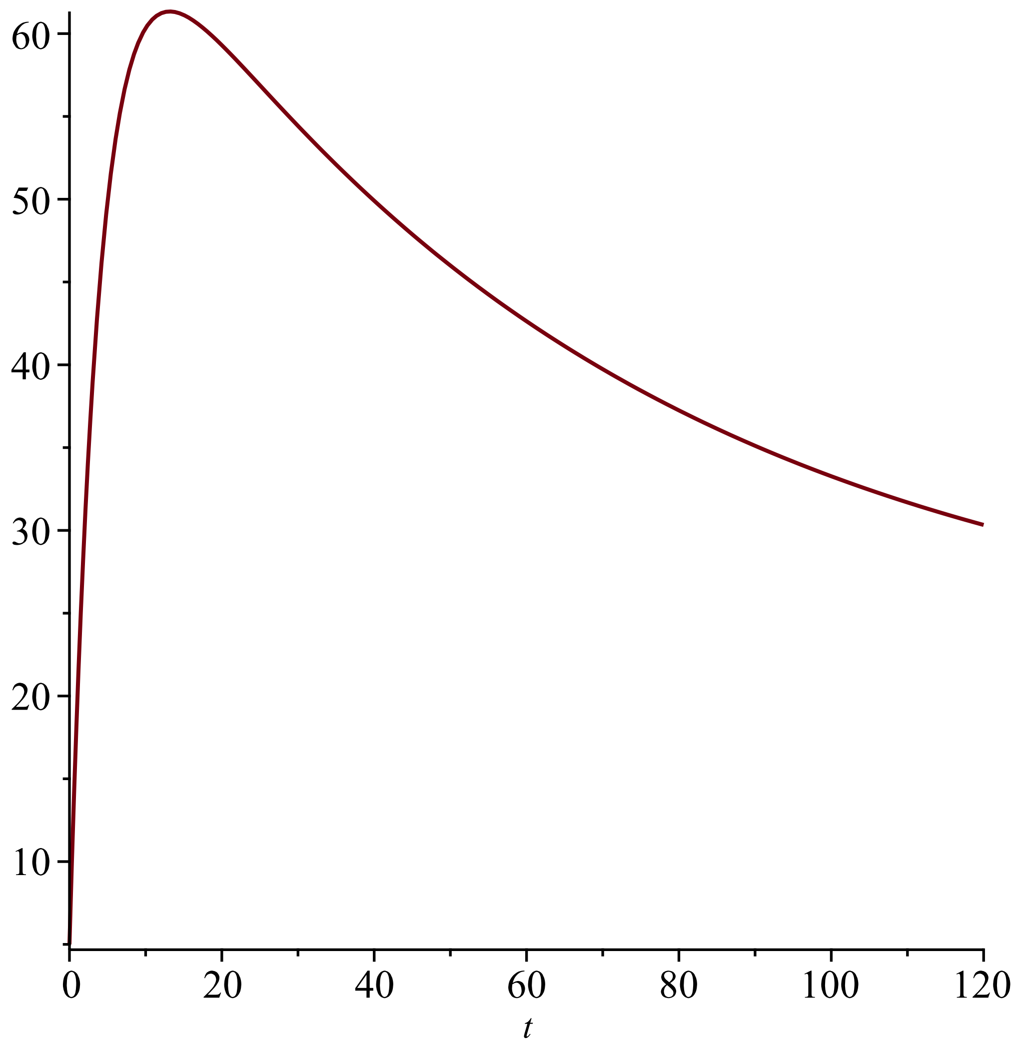
$$[[t = 13.175]] \quad \textbf{(7.2.5)}$$

Ved anden afledede test er

$y''(13.175) < 0 \xrightarrow{\text{test relation}} true$

Dermed blev tidspunktet hvorved stegens maksimale temperatur fundet.

$plot(y(t), t = 0..120)$



Spgm. c

$f(t) := 48\cdot 0.985^t + 22$:

Det mindste temperatur er ved vendetangent, så ligningen $y''(t) = 0$ løses,

$y''(t) = 0$

$$\frac{48\ 197^t \ln(197)^2\ 200^{-t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} - \frac{96\ 197^t \ln(197)\ 200^{-t} \ln(200)}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + \frac{48\ 197^t\ 200^{-t} \ln(200)^2}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + \frac{e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right)}{16} = 0 \quad \textbf{(7.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = -\frac{4\ln\left(\frac{\frac{65}{768} - \frac{17\ln\left(\frac{200}{197}\right)}{192}}{\ln\left(\frac{200}{197}\right)^2}\right)}{-1 + 4\ln\left(\frac{200}{197}\right)}\right]\right] \tag{7.3.2}$$

evalf[5](%)

$$[[t = 25.114]] \tag{7.3.3}$$

$is(y'''(25.114) > 0)$

$$true \tag{7.3.4}$$

Hvor væksthastigheden er mindst er $t = 25.114$ for $y(t)$, så $t = 25.114$ indsættes i f og man får $f(25.114)$

$$54.83966590 \tag{7.3.5}$$

Så temperaturen vil være 54.9 grader celsius.