PAT 1 (ก.พ. 62)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 23 กุมภาพันธ์ 2562 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 6 คะแนน

1. กำหนดให้ P แทน $2^{67} < 5^{30}$ และ Q แทน $2^{69} > 5^{31}$
   ประพจน์ $(Q \leftrightarrow \sim P) \rightarrow Q$ มีค่าความจริงตรงกับค่าความจริงของประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้
   1. $(Q \wedge P) \rightarrow P$
   2. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
   3. $(\sim Q \rightarrow P) \rightarrow Q$
   4. $(P \leftrightarrow \sim Q) \wedge P$
   5. $P \leftrightarrow (\sim Q \wedge P)$

2. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ประพจน์ $\exists x[4^x + 2^x = 72]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตในข้อใดต่อไปนี้
   1. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| \leq 7 \}$
   2. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |3x - 2| > 7 \}$
   3. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 8 = 6x \}$
   4. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| > 1 \}$
   5. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 3 \}$

3. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $|x^2 - 2x| - x \leq 4$
   จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
   1. 4
   2. 8
   3. 16
   4. 32
   5. 64

4. เซตคำตอบของอสมการ $2^{2x+1} + 3^{2x+1} \leq 5(6^x)$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
2. $(-\infty, -3) \cup (-1, 3)$
3. $(-5, -1) \cup (0, 5)$
4. $(-3, 0) \cup (1, \infty)$
5. $(-2, 1) \cup (3, \infty)$

5. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + x = |x| \}$ และ $g = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x = |x| \}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $g \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ g$

(ข) $(g \circ f) - f = (f \circ g) + f$

(ค) $f \circ (f \circ g) = fg$

ข้อใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

6. ค่าของ $\arccos\left(\sin\frac{17\pi}{7}\right) - \arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{5\pi}{14}$
2. $\frac{\pi}{14}$
3. $\frac{2\pi}{7}$
4. $\frac{\pi}{2}$
5. $\frac{3\pi}{2}$

7. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$(x+y)3^{y-x} = \frac{2}{9} \quad \text{และ} \quad 2\log_2(x+y) = x-y$$

แล้วค่าของ x^2+y^2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 8 3. 9 4. 10 5. 16

8. ให้พาราโบลารูปหนึ่งมีสมการ $y = x^2 + 1$ สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่จุด A เป็นจุดยอดของพาราโบลา จุด $\mathrm{B}(x, y)$ และจุด $\mathrm{C}(2, 5)$ เป็นจุดบนพาราโบลา ถ้ามุม $\mathrm{A\hat{B}C}$ เป็นมุมฉาก แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}$ ตารางหน่วย 2. 3 ตารางหน่วย 3. $3\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
4. 4 ตารางหน่วย 5. $4\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

9. กำหนดให้ $a = \cos 15° + \cos 50°$ และ $b = \sin 15° + \sin 50°$ ค่าของ $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + \cos 25°$ 2. $1 + \cos 35°$ 3. $1 + \cos 65°$
4. $1 + \cos 75°$ 5. $1 + \cos 85°$

10. ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งผ่านจุด $(0, 1)$ และจุด $(1, 1)$ และเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ มีความชันเท่ากับ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้า $f'(0) = 1$ และ $f''(1) = 2$ แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{27}$ 2. $\frac{13}{27}$ 3. $\frac{31}{27}$ 4. $\frac{34}{27}$ 5. $\frac{43}{27}$

11. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกัน 3 สี สีละ n ลูก เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องนี้โดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนลงในกล่อง ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละลูก เท่ากับ $\frac{2}{5}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล 3 ลูกโดยมีเพียง 2 สีเท่านั้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{4}{15}$ 3. $\frac{7}{15}$ 4. $\frac{8}{15}$ 5. $\frac{9}{15}$

12. เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันและสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

(ก) $\log_2 a < \log_2 b$

(ข) $2^b \times 3^d > 2^d \times 3^b$

(ค) $6^a - 9^c > 3^c(2^a - 3^a)$

ผลบวกในข้อใดต่อไปนี้ ที่มีค่ามากที่สุด

1. $a + b$ 2. $b + d$ 3. $a + c$ 4. $c + d$ 5. $a + d$

13. ลูกอมรสนม ราคาเม็ดละ 5 บาท และลูกอมรสน้ำผึ้ง ราคาเม็ดละ 7 บาท ต้องการซื้อลูกอมทั้งสองรสเป็นเงินทั้งสิ้น 287 บาท (โดยมีลูกอมรสนมอย่างน้อย 1 เม็ดและลูกอมรสน้ำผึ้งอย่างน้อย 1 เม็ด) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) จำนวนวิธีที่ได้ลูกอมทั้งสองรส มีทั้งหมด 9 วิธี

(ข) ได้จำนวนลูกอมทั้งสองรส อย่างน้อย 43 เม็ด

(ค) ได้ลูกอมทั้งสองรส มีจำนวนมากที่สุด 57 เม็ด

ข้อใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

14. วงกลมวงหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ และสัมผัสกับแกน y ที่จุด P ให้ L เป็นเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและขนานกับเส้นตรง $2x - 2y = 1$ ระยะระหว่างจุด P กับเส้นตรง L เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sqrt{2}$
4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
5. $\sqrt{5}$

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $b = a(\sqrt{3} - 1)$ และมุม C มีขนาด $30°$ แล้วค่าของ $\sin 3B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. 1
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ และให้ F เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา H ที่อยู่ทางขวาของจุด $(0, 0)$ ให้ E เป็นวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ F โดยที่จุด $(0, 0)$ และจุด F อยู่ทางซ้ายของจุดศูนย์กลางของวงรี E ถ้าผลต่างของความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท เท่ากับ 2 แล้วความเยื้องศูนย์กลางของวงรี E ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.2 2. 0.3 3. 0.4 4. 0.5 5. 0.6

17. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ที่สอดคล้องกับ $CA = AB$ ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $\det(C^2 + xB) = -20$ แล้วค่าของ $x^2 + x + 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 7 3. 13 4. 21 5. 31

18. ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S ถ้า A, B และ C เป็นเซต โดยที่ $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(A \cap C) = 3$ และ $n(A \cup B \cup C) = 18$ แล้ว ค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $n(B \cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 12 3. 13 4. 14 5. 15

19. ให้ $\bar{a}, \bar{b}$ และ $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ โดยที่ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ และ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$ เท่ากับ $60°$ ถ้าขนาดของเวกเตอร์ $\bar{a}$ และเวกเตอร์ $\bar{b}$ เท่ากับ 2 หน่วย และ 1 หน่วย ตามลำดับ แล้วมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{b}$ กับเวกเตอร์ $\bar{c}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arccos}\frac{2}{\sqrt{7}}$
2. $\pi-\operatorname{arcsin}\sqrt{\frac{3}{7}}$
3. $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcsin}\sqrt{\frac{3}{7}}$
4. $\pi-\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\frac{2\pi}{3}+\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z-2+i| = |z+2-2i|$ และ $|z+1| = |z+i|$ เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ z ค่าของ $|2z|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10
2. 12
3. 15
4. 18
5. 32

21. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง โดยที่ มีผลบวก 5 พจน์แรกเป็น 275 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 243$ แล้วค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\, a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 60.75
3. 121.5
4. 303.75
5. 607.5

22. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสอง ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(2, 2)$ และมีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(1, 3)$ แล้วค่าของ $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7
2. 6
3. $\frac{16}{3}$
4. $\frac{14}{3}$
5. $\frac{8}{3}$

23. ให้ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้า $\bar{a} + \bar{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\bar{a} \times \bar{b}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 1

24. ผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง มีการแจกแจงความถี่ ดังนี้ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าควอร์ไทล์ที่ 1 (Q_1) ของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 54.5 แล้วนักเรียนทั้งหมดในห้องนี้ มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่
30 – 39	2
40 – 49	5
50 – 59	8
60 – 69	7
70 – 79	a
80 – 89	b
90 – 99	c

1. 36 คน
2. 40 คน
3. 44 คน
4. 48 คน
5. 52 คน

25. กำหนดข้อมูลของประชากรชุดหนึ่ง ดังนี้ 2 , $2+d$, $2+2d$, $2+3d$, ... , $2+30d$
เมื่อ d เป็นจำนวนจริงบวก ถ้าความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับ 320 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 24.5 2. 32 3. 39.5 4. 47 5. 54.5

26. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และสอดคล้องกับ

$$f(x+h) - f(x) = 2h^3 + (6x+1)h^2 + 2x(3x+1)h \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ และ } h$$

ถ้าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 4 แล้วค่าของ $f(2) + f(-\frac{1}{2})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 28 2. 32 3. 34 4. 36 5. 40

27. กำหนดให้ $\mathbb{I}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(5) = 16$

และ $f(n) = \begin{cases} f(n-2) + 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ f(n+1) - n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

แล้วค่าของ $\sum_{n=-3}^{3} f(n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 10 3. 12 4. 15 5. 24

28. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

z	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.4032	0.4192	0.4332	0.4452	0.4545

ความสูงของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 162 เซนติเมตร ถ้านักเรียนที่มีความสูงน้อยกว่า 155 เซนติเมตรมีอยู่ 8.08% แล้วนักเรียนที่มีความสูงในช่วง 155 – 170 เซนติเมตร มีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 82.24 2. 83.84 3. 85.24 4. 86.44 5. 87.46

29. กำหนดให้สมการจุดประสงค์ $P = ax + by$ เมื่อ $0 < a < b \leq 2a$ และอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x + 3y &\leq 12 \\
x + y &\geq 4 \\
3y - x &\geq 6
\end{aligned}
$$

และ $x \geq 0\,,\ y \geq 0$

ถ้าค่ามากที่สุดของ P เท่ากับ 15 และค่าน้อยที่สุดของ P เท่ากับ 10.5 แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 10 3. 13 4. 20 5. 25

30. จากการสอบถามพนักงานบริษัทแห่งหนึ่งจำนวน n คน ที่มีเงินเดือนตั้งแต่ $10{,}000$ บาท ถึง $100{,}000$ บาท เกี่ยวกับเงินออมต่อเดือน ดังนี้

พนักงานคนที่	เงินเดือน (หมื่นบาท) (a)	เงินออม (พันบาท) (b)
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
⋮	⋮	⋮
n	a_n	b_n

โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือนเท่ากับ $64{,}000$ บาท ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินออมเท่ากับ $2{,}000$ บาท และความสัมพันธ์ระหว่างเงินเดือนและเงินออมเป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง
ถ้าพนักงานมีเงินออม เดือนละ $1{,}000$ บาท ประมาณได้ว่าพนักงานคนนี้มีเงินเดือน $26{,}000$ บาท
แล้วถ้าพนักงานมีเงินออม เดือนละ $1{,}500$ บาท จะประมาณได้ว่าเขามีเงินเดือนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $39{,}000$ บาท
2. $45{,}000$ บาท
3. $52{,}000$ บาท
4. $58{,}000$ บาท
5. $65{,}000$ บาท

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 45 ข้อละ 8 คะแนน

31. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}+3\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 4$
ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่น้อยสุดในเซต A และ b เป็นจำนวนที่มากที่สุดในเซต A
แล้ว a^2+b^2 มีค่าเท่ากับเท่าใด

32. คนกลุ่มหนึ่ง มีผู้ชาย 10 คนและผู้หญิง 7 คน โดยมีนาย ก. และนาย ข. รวมอยู่ด้วย จะมีกี่วิธีในการเลือกคณะกรรมการ 6 คน จากคนกลุ่มนี้ ประกอบด้วย ผู้ชายอย่างน้อย 2 คน และผู้หญิงอย่างน้อย 3 คน โดยมีเงื่อนไขว่า นาย ก. และ นาย ข. จะเป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้

33. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมีผลบวก n พจน์แรกของลำดับเท่ากับ $3n^2 + 2n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า $\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}} = m$ แล้วจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า m เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่มุม C เป็นมุมฉาก และมุม A สอดคล้องกับสมการ $2\cos 2A - 8\sin A + 3 = 0$ ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ ถ้า $a + c = 30$ แล้วค่าของ $a\sin A + b\sin B$ เท่ากับเท่าใด

35. กำหนดให้ $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$ และให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $A \cap B = \{ 1, 9 \}$,
$(A - B) \cup (B - A) = \{ 2, 3, 4, 5, 8, 10 \}$ และ $U - A = \{ 3, 5, 6, 7 \}$
จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ เท่ากับเท่าใด

36. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน
โดยที่ $f(x) = \begin{cases} x - 2 & ; x \leq 4 \\ 3x - 10 & ; x > 4 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x < 1 \\ \frac{1}{2}(x + 5) & ; x \geq 1 \end{cases}$
ถ้า $(f \circ g^{-1})(x) = 2$ แล้ว x เท่ากับเท่าใด

37. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงบวก x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $(\log_3 9x)^2 - 3\log_{\sqrt{3}} x - 7 = 0$
ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

38. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = x^2 - x + a$ และ $g(x) = x^2 + bx$ สำหรับทุกจำนวนจริง x เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $f(b) + g(a)$ เท่ากับเท่าใด

39. ค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt[3]{8+x} - 2}$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงจัดเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a + b + c = 14$ และ a , $b + 3$, $c + 4$ จัดเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับเท่าใด

41. กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงผลทดสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง ดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
0	$a-2$
1	a
2	a^2
3	$(a+1)^2$
4	$2a$
5	$a+1$

เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าคะแนนเฉลี่ยเลขคณิตของผลทดสอบเท่ากับ 2.8

แล้วจำนวนนักเรียนห้องนี้เท่ากับเท่าใด

42. ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริงให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq 0 \\ 4x + c & ; x < 0 \end{cases}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงและสอดคล้องกับ $f'(3) + f(3) = 45$ และ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$

แล้วค่าของ $f(a) + f(b) + f(c)$ เท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ A เป็นเซตของลำดับเลขคณิต $1, 4, 7, 10, \ldots$

ให้ $f(x) = 5x + 3$ และ $g(x) = x + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in A \\ g^{-1}(x) & ; x \notin A \end{cases}$ แล้วค่าของ $h(h(h(100)))$ เท่ากับเท่าใด

44. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง ลูกบอลสีเขียวและลูกบอลสีเหลือง โดยมีจำนวนลูกบอลสีแดงคิดเป็นร้อยละ 30 และมีจำนวนลูกบอลสีเขียวคิดเป็นร้อยละ 20 ถ้าเพิ่มจำนวนลูกบอลสีเหลืองอีก 20 ลูก ใส่ลงในกล่องใบนี้ พบว่าจำนวนลูกบอลสีเหลืองคิดเป็นร้อยละ 60 จงหาว่าในกล่องใบนี้มีจำนวนลูกบอลสีแดงทั้งหมดกี่ลูก

45. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & 2 \\ -1 & 3 & c \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง และ $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยที่ $AB = C$ และ $A \begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

แล้ว ค่าของ $a + b + c$ เท่ากับเท่าใด

<u>เฉลย</u>

1. 3	11. 5	21. 4	31. 34	41. 60
2. 1	12. 2	22. 2	32. 5460	42. 76
3. 5	13. 3	23. 4	33. 59	43. 2498
4. 5	14. 3	24. 3	34. 20	44. 24
5. 4	15. 4	25. 2	35. 24	45. 23
6. 4	16. 5	26. 1	36. 4.5	
7. 1	17. 3	27. 1	37. 9	
8. 2	18. 5	28. 4	38. 2	
9. 1	19. 2	29. 3	39. 12	
10. 3	20. 4	30. 2	40. 84	

<u>แนวคิด</u>

1. กำหนดให้ P แทน $2^{67} < 5^{30}$ และ Q แทน $2^{69} > 5^{31}$

ประพจน์ $(Q \leftrightarrow \sim P) \rightarrow Q$ มีค่าความจริงตรงกับค่าความจริงของประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $(Q \wedge P) \rightarrow P$
2. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
3. $(\sim Q \rightarrow P) \rightarrow Q$
4. $(P \leftrightarrow \sim Q) \wedge P$
5. $P \leftrightarrow (\sim Q \wedge P)$

<u>ตอบ</u> 3

ไล่หาว่า 5^n อยู่ระหว่าง 2^m อะไรบ้าง เพื่อยกกำลังเพิ่มให้ใกล้กับ 2^{67} หรือ 5^{30} แล้วดูว่าส่วนที่เหลือไปต่อได้หรือไม่

กรณี $2^2 < 5^1 < 2^3$:

$2^2 < 5^1$ ยกกำลัง 30
$2^{60} < 5^{30}$
(ไปต่อไม่ได้ $2^7 \nless 5^0$)

$5^1 < 2^3$ ยกกำลัง 20
$5^{20} < 2^{60}$
(ไปต่อไม่ได้ $5^{10} \nless 2^7$)

กรณี $2^4 < 5^2 < 2^5$:

$2^4 < 5^2$
(สัดส่วนเลขชี้กำลัง ซ้ำกรณีบน)

$5^2 < 2^5$ ยกกำลัง 13
$5^{26} < 2^{65}$
(ไปต่อไม่ได้ $5^4 \nless 2^2$)

กรณี $2^6 < 5^3 < 2^7$:

$2^6 < 5^3$
(สัดส่วนเลขชี้กำลัง ซ้ำกรณีบน)

$5^3 < 2^7$ ยกกำลัง 9
$5^{27} < 2^{63}$
(ไปต่อไม่ได้ $5^3 \nless 2^4$)

กรณี $2^9 < 5^4 < 2^{10}$:

$2^9 < 5^4$ ยกกำลัง 7
$2^{63} < 5^{28}$
เนื่องจาก $2^4 < 5^2$ คูณอสมการ
ดังนั้น $2^{67} < 5^{30}$ → P จริง
เนื่องจาก $2^2 < 5^1$ คูณอสมการ
ดังนั้น $2^{69} < 5^{31}$ → Q เท็จ

แทน $P \equiv \mathrm{T}$ และ $Q \equiv \mathrm{F}$ ในโจทย์จะได้ $(\mathrm{F} \leftrightarrow \sim\mathrm{T}) \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$

1. $(\mathrm{F} \wedge \mathrm{T}) \rightarrow \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$
2. $(\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{F}) \rightarrow (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \equiv \mathrm{T}$
3. $(\sim\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{T}) \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$
4. $(\mathrm{T} \leftrightarrow \sim\mathrm{F}) \wedge \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$
5. $\mathrm{T} \leftrightarrow (\sim\mathrm{F} \wedge \mathrm{T}) \equiv \mathrm{T}$

2. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ประพจน์ $\exists x[4^x + 2^x = 72]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| \le 7 \}$
2. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |3x-2| > 7 \}$
3. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 8 = 6x \}$
4. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-3| > 1 \}$
5. $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < 3 \}$

<u>ตอบ</u> 1

แก้สมการ
$$\begin{aligned} 4^x + 2^x &= 72 \\ 2^{2x} + 2^x - 72 &= 0 \\ (2^x+9)(2^x-8) &= 0 \\ 2^x &= \cancel{-9},\ 8 \\ 2^x &= 2^3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$
$\rightarrow$ ดูว่าตัวเลือกข้อไหนมี 3 เป็นสมาชิก โดยดูว่าข้อไหนที่แทน $x = 3$ แล้วเป็นจริง

1. $|2(3)-3| \le 7$ จริง
2. $|3(3)-2| > 7$ เท็จ
3. $3^2 + 8 = 6(3)$ เท็จ
4. $|3-3| > 1$ เท็จ
5. $|3+1| < 3$ เท็จ

3. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $|x^2-2x| - x \le 4$ จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 8
3. 16
4. 32
5. 64

<u>ตอบ</u> 5

$$\begin{aligned} |x^2-2x| - x &\le 4 \\ |x^2-2x| &\le 4 + x \end{aligned}$$
$$-(4+x) \le x^2 - 2x \le 4 + x \quad \text{เมื่อ} \quad 4 + x \ge 0$$
$$-(4+x) \le x^2 - 2x \quad \text{และ} \quad x^2 - 2x \le 4 + x \quad \text{และ} \quad 4 + x \ge 0$$

$0 \le x^2 - x + 4$

ลองแยกตัวประกอบดู จะพบว่า แยกไม่ได้

เพราะ $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(4)$

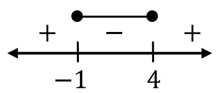
$= -15$ เป็นลบ

เนื่องจาก สปส หน้า x^2 เป็นบวก

ดังนั้น อสมการนี้จะจริงเสมอ (x เป็นอะไรก็ได้)

$x^2 - 3x - 4 \le 0$

$(x+1)(x-4) \le 0$



$x \ge -4$

จะได้ x ที่ทำให้ทั้ง 3 เงื่อนไขเป็นจริง คือ $[-1, 4]$ ซึ่งจะมีจำนวนเต็มอยู่ $4 - (-1) + 1 = 6$ จำนวน
ดังนั้น เพาเวอร์เซตของ A จะมีสมาชิก $2^6 = 64$ ตัว

4. เซตคำตอบของอสมการ $2^{2x+1} + 3^{2x+1} \le 5(6^x)$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

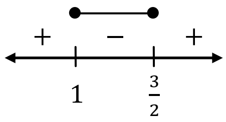
1. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
2. $(-\infty, -3) \cup (-1, 3)$
3. $(-5, -1) \cup (0, 5)$
4. $(-3, 0) \cup (1, \infty)$
5. $(-2, 1) \cup (3, \infty)$

<u>ตอบ</u> 5

$$\begin{aligned} 2^{2x+1} + 3^{2x+1} &\le 5(6^x) \\ 2^{2x} \cdot 2^1 - 5(2 \cdot 3)^x + 3^{2x} \cdot 3^1 &\le 0 \\ 2(2^{2x}) - 5(2^x)(3^x) + 3(3^{2x}) &\le 0 \\ \frac{2(2^{2x})}{3^{2x}} - \frac{5(2^x)(3^x)}{3^{2x}} + \frac{3(3^{2x})}{3^{2x}} &\le 0 \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 &\le 0 \end{aligned}$$

$\div 3^{2x}$ ตลอด เพื่อจัดรูปตัวแปรให้เป็น $\left(\frac{2}{3}\right)^x$

$$\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right) \quad \leq \quad 0$$



$$1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{3}{2}$$

เปลี่ยนเป็นฐาน $\frac{2}{3}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

ตัดฐานตลอด

$\frac{2}{3} < 1$ ต้องกลับน้อยกว่าเป็นมากกว่า

$$0 \geq x \geq -1$$

เป็นสับเซตของข้อ 5.

5. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f = \{\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + x = |x| \,\}$ และ $g = \{\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x = |x| \,\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $g \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ g$

(ข) $(g \circ f) - f = (f \circ g) + f$

(ค) $f \circ (f \circ g) = fg$

ข้อใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ</u> 4

$$f: \quad y + x = |x| \qquad y = |x| - x = \begin{cases} x - x & , x \geq 0 \\ -x - x & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases}$$

$$g: \quad y - x = |x| \qquad y = |x| + x = \begin{cases} x + x & , x \geq 0 \\ -x + x & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}}$$

ดังนั้น $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

(ก) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ ใช้สูตรของ $g(x)$

$= \begin{cases} f(2x) & , x \geq 0 \\ f(0) & , x < 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ $2x \geq 0$ ด้วย $\rightarrow f(2x) = 0$; $\rightarrow$ จะได้ $f(0) = 0$

$= 0$ ในทุกๆ กรณี

ฝั่งซ้าย : $\big(g \circ (f \circ g)\big)(x) = g\big((f \circ g)(x)\big) = g(0) = 2(0) = 0$

ฝั่งขวา : $\big((f \circ g) \circ g\big)(x) = (f \circ g)\big(g(x)\big) = 0$ ($f \circ g$ อะไรก็ตาม เป็น 0 เสมอ) $\rightarrow$ (ก) ถูก

(ข) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ ใช้สูตรของ $f(x)$

$= \begin{cases} g(0) & , x \geq 0 \\ g(-2x) & , x < 0 \end{cases}$ $\rightarrow g(0) = 2(0) = 0$; $\rightarrow$ เมื่อ $x < 0$ จะได้ $-2x > 0 \rightarrow g(-2x) = 2(-2x) = -4x$

$= \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -4x & , x < 0 \end{cases}$

ฝั่งซ้าย : $\big((g \circ f) - f\big)(x) = (g \circ f)(x) - f(x)$

$$= \begin{cases} 0 - 0 & , x \geq 0 \\ -4x - (-2x) & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases}$$

ฝั่งขวา : $\big((f \circ g) + f\big)(x) = (f \circ g)(x) + f(x)$

$$= \quad 0 \quad + f(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases} \rightarrow \text{(ข) ถูก}$$

(ค) ฝั่งซ้าย : $\big(f \circ (f \circ g)\big)(x) = f\big((f \circ g)(x)\big) = f(0) = 0$

ฝั่งขวา : $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= \begin{cases} 0 \cdot 2x & , x \geq 0 \\ -2x \cdot 0 & , x < 0 \end{cases} = 0 \text{ ในทุกๆ กรณี } \rightarrow \text{(ค) ถูก}$$

6. ค่าของ $\arccos\left(\sin\frac{17\pi}{7}\right) - \arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{5\pi}{14}$ 2. $\frac{\pi}{14}$ 3. $\frac{2\pi}{7}$ 4. $\frac{\pi}{2}$ 5. $\frac{3\pi}{2}$

ตอบ 4

$$\begin{aligned} \arccos\left(\sin\frac{17\pi}{7}\right) &= \arccos\left(\sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{7}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\sin \frac{3\pi}{7}\right) \\ &= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\cos \frac{\pi}{14}\right) \\ &= \frac{\pi}{14} \end{aligned}$$

เปลี่ยนเป็น cos ด้วยสูตรโคฟังก์ชัน ให้หักล้างกับ arccos ได้

เรนจ์ของ arccos คือ $[0, \pi]$

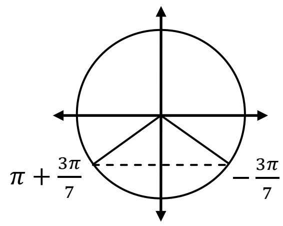
$\frac{\pi}{14}$ อยู่ในเรนจ์นี้แล้ว จึงตัด arccos กับ cos ได้

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right) &= \arcsin\left(\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{7}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(\sin -\frac{3\pi}{7}\right) \\ &= -\frac{3\pi}{7} \end{aligned}$$

เรนจ์ของ arcsin คือ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ต้องวาด $\pi + \frac{3\pi}{7}$ แล้วสะท้อนเข้าเรจน์

จะได้ $-\frac{3\pi}{7}$ ดังรูป



ดังนั้น $\arccos\left(\sin\frac{17\pi}{7}\right) - \arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{14} - \left(-\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$

7. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$(x+y)3^{y-x} = \frac{2}{9} \quad \text{และ} \quad 2\log_2(x+y) = x - y$$

แล้วค่าของ $x^2 + y^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 8 3. 9 4. 10 5. 16

ตอบ 1

$$\begin{aligned} x\ 2\log_2(x+y) &= x - y \\ \log_2(x+y) &= \frac{x-y}{2} \\ x + y &= 2^{\frac{x-y}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y)3^{y-x} &= \frac{2}{9} \\ 2^{\frac{x-y}{2}}\ 3^{y-x} &= \frac{2}{9} \\ \frac{2^{\frac{x-y}{2}}}{3^{x-y}} &= \frac{2}{3^2} \\ \frac{2^{x-y}}{3^{2(x-y)}} &= \left(\frac{2}{3^2}\right)^2 \\ \left(\frac{2}{3^2}\right)^{x-y} &= \left(\frac{2}{3^2}\right)^2 \\ x - y &= 2 \quad \ldots(1) \end{aligned}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} x + y &= 2^{\frac{2}{2}} \\ x + y &= 2 \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

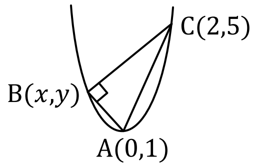
$$\begin{aligned}(1)+(2):\ x+y+x-y &= 2+2\\ 2x &= 4\\ x &= 2 \quad \rightarrow \text{ แทนใน } (2):\ 2+y = 2\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = 0\end{aligned}$$

จะได้ $x^2+y^2 = 2^2+0^2 = 4$

8. ให้พาราโบลารูปหนึ่งมีสมการ $y=x^2+1$ สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่จุด A เป็นจุดยอดของพาราโบลา จุด $B(x,y)$ และจุด $C(2,5)$ เป็นจุดบนพาราโบลา ถ้ามุม $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
2. 3 ตารางหน่วย
3. $3\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
4. 4 ตารางหน่วย
5. $4\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

ตอบ 2



เทียบสมการพาราโบลา $y=x^2+1$ กับรูปสมการ $y=(x-h)^2+k$

จะได้จุดยอด (h,k) คือ $A(0,1)$ ดังรูป

$A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น ความชัน $\overline{AB}$ $\times$ ความชัน $\overline{BC}$ $= -1$

$$\begin{aligned}\frac{y-1}{x-0}\cdot\frac{y-5}{x-2} &= -1\\ \frac{x^2+1-1}{x}\cdot\frac{x^2+1-5}{x-2} &= -1\\ \frac{x^2}{x}\cdot\frac{x^2-4}{x-2} &= -1\\ x\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} &= -1\\ x\cdot(x+2) &= -1\end{aligned}$$

$B(x,y)$ อยู่บนพาราโบลา ต้องสอดคล้องกับสมการพาราโบลา $\rightarrow$ $y=x^2+1$

$$\begin{aligned}x^2+2x+1 &= 0\\ (x+1)^2 &= 0\\ x &= -1\end{aligned}$$

แทน $x=-1$ ในสมการพาราโบลา $y=x^2+1$ จะได้ $y=(-1)^2+1 = 2$ $\rightarrow$ จะได้พิกัด B คือ $(-1,2)$

ใช้สูตรระยะระหว่างจุด $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ จะได้ AB $=$ ระยะจาก $(0,1)$ ไป $(-1,2)$

$= \sqrt{(0-(-1))^2+(1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

และ จะได้ BC $=$ ระยะจาก $(-1,2)$ ไป $(2,5)$

$= \sqrt{(-1-2)^2+(2-5)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

จะได้พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = 3$

9. กำหนดให้ $a=\cos 15^\circ+\cos 50^\circ$ และ $b=\sin 15^\circ+\sin 50^\circ$ ค่าของ $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $1+\cos 25^\circ$
2. $1+\cos 35^\circ$
3. $1+\cos 65^\circ$
4. $1+\cos 75^\circ$
5. $1+\cos 85^\circ$

ตอบ 1

สังเกตว่าตัวเลือกทุกข้อ มี 1 บวกอยู่ข้างหน้า $\rightarrow$ จัดรูป $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ ให้มี 1 อยู่ข้างหน้าก่อน

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}\\ &= 1+\frac{2ab}{ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}\\ &= 1+\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \qquad ...(*)\end{aligned}$$

ดึง ab ออกจากตัวส่วน เพื่อตัดกับ ab ที่เศษ

เปลี่ยน a กับ b เป็นผลคูณ โดยหวังว่าตอนหา $\frac{a}{b}$ กับ $\frac{b}{a}$ จะมีอะไรตัดกันได้

$$\begin{aligned} a &= \cos 15^\circ + \cos 50^\circ \\ &= \cos 50^\circ + \cos 15^\circ \\ &= 2\cos\frac{50^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ-15^\circ}{2} \\ &= 2\cos\frac{65^\circ}{2}\cos\frac{35^\circ}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= \sin 15^\circ + \sin 50^\circ \\ &= \sin 50^\circ + \sin 15^\circ \\ &= 2\sin\frac{50^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ-15^\circ}{2} \\ &= 2\sin\frac{65^\circ}{2}\cos\frac{35^\circ}{2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า a กับ b หารกัน จะตัด $2\cos\frac{35^\circ}{2}$ ได้ → จะได้ $\frac{a}{b} = \frac{\cos\frac{65^\circ}{2}}{\sin\frac{65^\circ}{2}}$ และ $\frac{b}{a} = \frac{\sin\frac{65^\circ}{2}}{\cos\frac{65^\circ}{2}}$

แทนใน $(*)$ จะได้ $= 1 + \dfrac{2}{\frac{\cos\frac{65^\circ}{2}}{\sin\frac{65^\circ}{2}} + \frac{\sin\frac{65^\circ}{2}}{\cos\frac{65^\circ}{2}}}$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{2}{\frac{\cos^2\frac{65^\circ}{2} + \sin^2\frac{65^\circ}{2}}{\sin\frac{65^\circ}{2}\cos\frac{65^\circ}{2}}} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ &= 1 + \frac{2}{\frac{1}{\sin\frac{65^\circ}{2}\cos\frac{65^\circ}{2}}} \\ &= 1 + 2\sin\frac{65^\circ}{2}\cos\frac{65^\circ}{2} \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 + \sin 2\left(\frac{65^\circ}{2}\right) \\ &= 1 + \sin 65^\circ \qquad \text{โคฟังก์ชัน} \\ &= 1 + \cos 25^\circ \end{aligned}$$

10. ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งผ่านจุด $(0, 1)$ และจุด $(1, 1)$ และเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ มีความชันเท่ากับ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้า $f'(0) = 1$ และ $f''(1) = 2$ แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{27}$ 2. $\frac{13}{27}$ 3. $\frac{31}{27}$ 4. $\frac{34}{27}$ 5. $\frac{43}{27}$

<u>ตอบ</u> 3

ความชัน คือ $ax^2 + bx + c$ แสดงว่า $f'(x) = ax^2 + bx + c$ ซึ่งจะได้ $f''(x) = 2ax + b$

แทน $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= a(0^2) + b(0) + c \\ 1 &= c \end{aligned}$$

แทน $x = 1$:

$$\begin{aligned} f''(1) &= 2a(1) + b \\ 2 &= 2a + b \\ 2 - 2a &= b \end{aligned}$$

แทนค่า b , c ใน $f'(x)$ จะได้ $f'(x) = ax^2 + (2-2a)x + 1$

$$f(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{(2-2a)x^2}{2} + x + d \qquad \text{อินทิเกรต}$$

แทน $x = 0$:

($y = f(x)$ ผ่าน $(0, 1)$ แสดงว่า $f(0) = 1$)

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{a(0)^3}{3} + \frac{(2-2a)(0)^2}{2} + 0 + d \\ 1 &= d \end{aligned}$$

แทน $x = 1$:

($y = f(x)$ ผ่าน $(1, 1)$ แสดงว่า $f(1) = 1$)

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{a(1)^3}{3} + \frac{(2-2a)(1)^2}{2} + 1 + d \\ 1 &= \frac{a}{3} + 1 - a + 1 + 1 \\ \frac{2}{3}a &= 2 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

แทนค่า d , a จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^3}{3} + \frac{(2-2(3))x^2}{2} + x + 1 \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ &= (3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ จะเกิดเมื่อ $f'(x)$ เปลี่ยนจากบวกเป็นลบ

$+ \quad \frac{1}{3} \quad - \quad 1 \quad +$ → สูงสุดสัมพัทธ์ เมื่อ $x = \frac{1}{3}$

แทน $x = \frac{1}{3}$ จะได้ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) + 1$

$= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1-6+9+27}{27} = \frac{31}{27}$

11. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกัน 3 สี สีละ n ลูก เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องนี้ โดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนลงในกล่อง ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละลูก เท่ากับ $\frac{2}{5}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล 3 ลูกโดยมีเพียง 2 สีเท่านั้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{4}{15}$ 3. $\frac{7}{15}$ 4. $\frac{8}{15}$ 5. $\frac{9}{15}$

<u>ตอบ</u> 5

หาความน่าจะเป็นที่หยิบได้สีละลูกในรูปของ n แล้วจับมาเท่ากับ $\frac{2}{5}$ เพื่อแก้สมการหา n

จำนวนแบบทั้งหมด : มีลูกบอล $3n$ ลูก จะหยิบได้ $(3n)(3n-1)(3n-2)$ แบบ

จำนวนแบบที่ได้สีละลูก : ลูกแรก หยิบลูกไหนก็ได้ $\rightarrow$ จะหยิบได้ $3n$ แบบ

ลูกที่สอง ต้องหยิบ 2 สีที่ไม่ซ้ำสีกับลูกแรก $\rightarrow$ จะหยิบได้ $2n$ แบบ

ลูกที่สาม ต้องหยิบสีสุดท้ายที่ยังไม่ถูกหยิบ $\rightarrow$ จะหยิบได้ n แบบ

จะได้จำนวนแบบ $= (3n)(2n)(n)$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{(3n)(2n)(n)}{(3n)(3n-1)(3n-2)} = \frac{(2n)(n)}{(3n-1)(3n-2)}$ ดังนั้น $\frac{(2n)(n)}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} 5n^2 &= (3n-1)(3n-2) \\ 0 &= 4n^2 - 9n + 2 \\ 0 &= (4n-1)(n-2) \\ n &= \tfrac{1}{4},\ 2 \end{aligned}$$

แต่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $\rightarrow$ เหลือ $n = 2$ ค่าเดียว นั่นคือ มีลูกบอลสีละ 2 ลูก (มี 3 สี $= 6$ ลูก)

โจทย์ถาม ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ 2 สี $\rightarrow$ จะคิดจากเหตุการณ์ตรงข้าม $= 1 - P(\text{ได้สีเดียว}) - P(\text{ได้ 3 สี})$

- ได้สีเดียวกันทั้ง 3 ลูก จะเป็นไปไม่ได้ (เพราะมีสีละ 2 ลูก) $\rightarrow P(\text{ได้สีเดียว}) = 0$
- ได้ 3 สี คือได้สีละลูก $\rightarrow$ โจทย์กำหนดให้เท่ากับ $\frac{2}{5}$

จะได้ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ 2 สี $= 1 - 0 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$

หมายเหตุ : ถ้าไม่คิดเหตุการณ์ตรงข้าม $\rightarrow$ เลือกสีที่มี 2 ลูก ได้ 3 แบบ (ต้องใช้ทั้ง 2 ลูกจากสีนี้)

$\rightarrow$ เลือก 1 ลูก จากที่เหลือ 2 สี สีละ 2 ลูก ได้ $2 \times 2 = 4$ แบบ

$\rightarrow$ สลับที่ลูกทั้ง 3 ลูก ได้ $3!$ แบบ จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{(3)(4)(3!)}{(6)(5)(4)} = \frac{3}{5}$

12. เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันและสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

(ก) $\log_2 a < \log_2 b$

(ข) $2^b \times 3^d > 2^d \times 3^b$

(ค) $6^a - 9^c > 3^c(2^a - 3^a)$

ผลบวกในข้อใดต่อไปนี้ ที่มีค่ามากที่สุด

1. $a + b$ 2. $b + d$ 3. $a + c$ 4. $c + d$ 5. $a + d$

<u>ตอบ</u> 2

(ก) ตัด $\log$ ทั้งสองฝั่ง จะได้ $a < b$ (ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เพราะฐาน $2 > 1$)

(ข)
$$\begin{aligned} 2^b \times 3^d &> 2^d \times 3^b \quad \text{) } 3^b,\ 3^d \text{ เป็นบวก} \\ \frac{2^b}{3^b} &> \frac{2^d}{3^d} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^b &> \left(\frac{2}{3}\right)^d \quad \text{) } \tfrac{2}{3} < 1 \to \text{ ต้องกลับเครื่องหมาย} \\ b &< d \end{aligned}$$

(ค)
$$\begin{aligned} 6^a - 9^c &> 3^c(2^a - 3^a) \\ (2 \cdot 3)^a - (3^2)^c &> 2^a 3^c - 3^a 3^c \\ 2^a 3^a + 3^a 3^c &> 2^a 3^c + 3^{2c} \\ 3^a(2^a + 3^c) &> 3^c(2^a + 3^c) \quad \text{) } 2^a + 3^c \text{ เป็นบวก} \\ 3^a &> 3^c \\ a &> c \end{aligned}$$

เรียงจากน้อยไปมาก จะได้ $c < a < b < d$ → คู่ที่มากที่สุดคือ $b + d$

13. ลูกอมรสนม ราคาเม็ดละ 5 บาท และลูกอมรสน้ำผึ้ง ราคาเม็ดละ 7 บาท ต้องการซื้อลูกอมทั้งสองรสเป็นเงินทั้งสิ้น 287 บาท (โดยมีลูกอมรสนมอย่างน้อย 1 เม็ดและลูกอมรสน้ำผึ้งอย่างน้อย 1 เม็ด) พิจารณาข้อความต่อไปนี้
   (ก) จำนวนวิธีที่ได้ลูกอมทั้งสองรส มีทั้งหมด 9 วิธี
   (ข) ได้จำนวนลูกอมทั้งสองรส อย่างน้อย 43 เม็ด
   (ค) ได้ลูกอมทั้งสองรส มีจำนวนมากที่สุด 57 เม็ด

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
   2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
   3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
   4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
   5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 3

ให้ซื้อรสนม a เม็ด (เป็นเงิน $5a$ บาท) และซื้อรสน้ำผึ้ง b เม็ด (เป็นเงิน $7b$ บาท) → จะได้ $5a + 7b = 287$

$$a = \frac{287-7b}{5}$$

เนื่องจาก a ต้องเป็นจำนวนเต็ม → $287 - 7b$ ต้องหารด้วย 5 ลงตัว
→ 287 และ $7b$ ต้องหารด้วย 5 เหลือเศษเท่ากัน
→ เนื่องจาก $287 \div 5$ เหลือเศษ 2 ดังนั้น $7b \div 5$ ต้องเหลือเศษ 2 ด้วย

การหาเศษเหลือ สามารถกระจายในการคูณได้ → $7 \div 5$ เหลือเศษ 2
→ สมมติให้ $b \div 5$ เหลือเศษ k (เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$)
→ จะได้ $7b \div 5$ เหลือเศษเท่ากับ $2k \div 5$

ลองแทน $k = 0, 1, 2, 3, 4$ จะได้ $2k \div 5$ เหลือเศษ 2 เมื่อ $k = 1$ เท่านั้น

a ต้องเป็นบวก ดังนั้น
$$\begin{aligned} 287 - 7b &> 0 \\ 41 &> b \end{aligned}$$

นั่นคือ $\frac{287-7b}{5}$ ลงตัวเมื่อ $b \div 5$ เหลือเศษ 1 → $b = 1, 6, 11, 16, \ldots, 36$ ⟵

จะมีค่า b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $\frac{36-1}{5} + 1 = 8$ แบบ → (ก) ผิด

จะได้ลูกอมน้อย ถ้าซื้อลูกอมราคาแพง (รสน้ำผึ้ง) เยอะๆ → ซื้อ b เต็มแม็ก $= 36$ เม็ด
→ จะได้ $a = \frac{287-7(36)}{5} = 7$ เม็ด
→ ได้ลูกอมน้อยสุด $= 36 + 7 = 43$ เม็ด → (ข) ถูก

จะได้ลูกอมเยอะ ถ้าซื้อลูกอมราคาแพง (รสน้ำผึ้ง) น้อยๆ → ซื้อ b น้อยสุด $= 1$ เม็ด
→ จะได้ $a = \frac{287-7(1)}{5} = 56$ เม็ด
→ ได้ลูกอมเยอะสุด $= 1 + 56 = 57$ เม็ด → (ค) ถูก

14. วงกลมวงหนึ่งมีสมการเป็น $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ และสัมผัสกับแกน y ที่จุด P
ให้ L เป็นเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและขนานกับเส้นตรง $2x-2y=1$
ระยะระหว่างจุด P กับเส้นตรง L เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

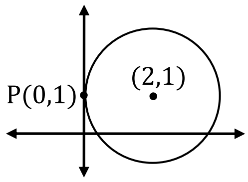
1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $\sqrt{2}$ 4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 5. $\sqrt{5}$

ตอบ 3

จัดรูปวงกลม :
$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y+1 &= 0 \\ x^2-4x + y^2-2y &= -1 \\ x^2-4x+4+y^2-2y+1 &= -1+4+1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

เทียบกับรูป $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้จุดศูนย์กลาง $(h,k)=(2,1)$ และรัศมี $r=2$ → วาดได้ดังรูป



จะเห็นว่าวงกลม สัมผัสแกน y ที่ $\mathrm{P}(0,1)$

เส้นตรง L ขนานกับเส้นตรง
$$\begin{aligned} 2x-2y &= 1 \\ 2x-1 &= 2y \\ x-\tfrac{1}{2} &= y \end{aligned}$$
→ เทียบกับรูป $y=mx+c$ จะได้ความชัน $m=1$
ดังนั้น L จะมีความชัน $=1$ ด้วย

L ผ่านจุดศูนย์กลางวงกลม (2 ,1) และมีความชัน $=1$ → จะได้สมการ L คือ
$$\begin{aligned} \frac{y-1}{x-2} &= 1 \\ y-1 &= x-2 \\ 0 &= x-y-1 \end{aligned}$$

จะได้ระยะจากจุด $\mathrm{P}(0,1)$ ไปยังเส้นตรง L : $x-y-1=0$
คือ $\frac{|(1)(0)+(-1)(1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ระยะจากจุด (a,b) ไปยังเส้นตรง $Ax+By+C=0$ คือ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C
เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $b=a(\sqrt{3}-1)$ และมุม C มีขนาด $30°$
แล้วค่าของ $\sin 3B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. 1 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ตอบ 4

จากกฎของ sin จะได้
$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \frac{a}{\sin(150°-B)} &= \frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sin B} \\ \sin B &= (\sqrt{3}-1)\sin(150-B) \\ \sin B &= (\sqrt{3}-1)(\sin 150°\cos B-\cos 150°\sin B) \\ \sin B &= (\sqrt{3}-1)\left(\tfrac{1}{2}\cos B+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) \\ \sin B &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\tfrac{3}{2}\sin B-\tfrac{1}{2}\cos B-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B \\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B-\tfrac{1}{2}\sin B &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\tfrac{1}{2}\cos B \\ \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\sin B &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\cos B \\ \sin B &= \cos B \\ B &= 45° \end{aligned}$$

จาก Δ จะได้ $A = 180°-B-C = 180°-B-30° = 150°-B$

มุมใน Δ จะมีค่าระหว่าง 0° และ 180°

จะได้ $\sin 3B = \sin 3(45°) = \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

16. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ และให้ F เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา H ที่อยู่ทางขวาของจุด $(0, 0)$ ให้ E เป็นวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ F โดยที่จุด $(0, 0)$ และจุด F อยู่ทางซ้ายของจุดศูนย์กลางของวงรี E ถ้าผลต่างของความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท เท่ากับ 2 แล้วความเยื้องศูนย์กลางของวงรี E ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.2   2. 0.3   3. 0.4   4. 0.5   5. 0.6

<u>ตอบ</u> 5

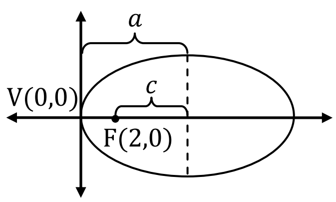
จัดรูป H หาโฟกัส : $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$

$$x^2 - 3y^2 = 3$$
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$$

จะได้ระยะโฟกัส $c = \sqrt{3+1} = 2$ $\rightarrow$ จะได้จุดโฟกัส คือ $(\pm 2, 0)$

$\rightarrow$ จุดที่อยู่ทางขวาของ $(0, 0)$ คือ $F(2, 0)$

ดังนั้นวงรี E มีจุดยอด $V(0, 0)$ และจุดโฟกัส $F(2, 0)$ อยู่ทางซ้ายจุดศูนย์กลาง



V และ F อยู่ห่างกัน 2 หน่วย $\rightarrow$ จะได้ $a - c = 2$ ดังรูป

$$a - 2 = c \quad \ldots(1)$$

โจทย์ให้แกนเอกกับแกนโทยาวต่างกัน 2 $\rightarrow$ จะได้ $2a - 2b = 2$

$$a - b = 1$$
$$a - 1 = b \quad \ldots(2)$$

จากสูตรระยะโฟกัสวงรี : $c^2 = a^2 - b^2$

$$(a-2)^2 = a^2 - (a-1)^2$$ จาก (1) และ (2)
$$a^2 - 4a + 4 = a^2 - (a^2 - 2a + 1)$$
$$a^2 - 6a + 5 = 0$$
$$(a-1)(a-5) = 0$$
$$a = 1, 5$$

แต่ $a = 1$ แทนใน (1) จะได้ c ติดลบ จึงใช้ไม่ได้ $\rightarrow$ เหลือ $a = 5$ ค่าเดียว

แทน $a = 5$ ใน (1) จะได้ $c = 5 - 2 = 3$ $\rightarrow$ จะได้ความเยื้อง $= \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$

17. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ที่สอดคล้องกับ $CA = AB$ ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $\det(C^2 + xB) = -20$ แล้วค่าของ $x^2 + x + 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3   2. 7   3. 13   4. 21   5. 31

<u>ตอบ</u> 3

จาก $CA = AB$

จะได้ $C = ABA^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1-5}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad C^2 + xB &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4-2x & 0 \\ 0 & 4+2x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} \det(C^2 + xB) &= (4-2x)(4+2x) - (0)(0) \\ -20 &= 16 - 4x^2 \\ 4x^2 &= 36 \\ x &= 3 \quad \text{(โจทย์กำหนดให้ } x \text{ เป็นบวก)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + x + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13$

18. ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S ถ้า A, B และ C เป็นเซต โดยที่ $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(A \cap C) = 3$ และ $n(A \cup B \cup C) = 18$ แล้ว ค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $n(B \cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 12 3. 13 4. 14 5. 15

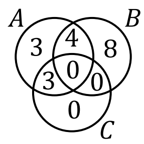
<u>ตอบ</u> 5

จากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ 18 &= 10 + n(B) + n(C) - 4 - 3 - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ 15 &= n(B) + n(C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ 15 &= n(B \cup C) + n(A \cap B \cap C) \\ 15 - n(A \cap B \cap C) &= n(B \cup C) \end{aligned}$$

ใช้สูตร Inclusive – Exclusive ที่ B กับ C

ดังนั้น $n(B \cup C)$ จะมีค่าไม่เกิน 15 (เพราะ $n(A \cap B \cap C)$ เป็นลบไม่ได้)
โดยจะเป็น 15 ได้ เมื่อ $n(A \cap B \cap C) = 0$
ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าเป็นไปได้ ด้วยตัวอย่างดังรูป



19. ให้ $\bar{a}, \bar{b}$ และ $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ โดยที่ $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ และ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$ เท่ากับ 60°
ถ้าขนาดของเวกเตอร์ $\bar{a}$ และเวกเตอร์ $\bar{b}$ เท่ากับ 2 หน่วย และ 1 หน่วย ตามลำดับ
แล้วมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{b}$ กับเวกเตอร์ $\bar{c}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$ 2. $\pi - \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$ 3. $\frac{\pi}{2} + \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$
4. $\pi - \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. $\frac{2\pi}{3} + \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>ตอบ</u> 2

ให้มุมระหว่าง $\bar{b}$ กับ $\bar{c}$ คือ θ → จากสูตรการดอท จะได้

$$\begin{aligned} \bar{b} \cdot \bar{c} &= |\bar{b}||\bar{c}|\cos\theta \\ \bar{b} \cdot \bar{c} &= (1)|\bar{c}|\cos\theta \\ \frac{\bar{b} \cdot \bar{c}}{|\bar{c}|} &= \cos\theta \quad \ldots(*) \end{aligned}$$

จะหา $\bar{b} \cdot \bar{c}$ และ $|\bar{c}|$ มาแทนใน $(*)$ เพื่อหา θ

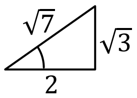
จาก $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{0}$

$$\begin{aligned} \bar{c} &= -(\bar{a}+\bar{b}) \\ |\bar{c}|^2 &= |\bar{a}+\bar{b}|^2 \\ |\bar{c}|^2 &= |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\,\bar{a}\cdot\bar{b} \\ |\bar{c}|^2 &= |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos 60^\circ \\ |\bar{c}|^2 &= 2^2 + 1^2 + 2(2)(1)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 7 \\ |\bar{c}| &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}+\bar{b}+\bar{c} &= \bar{0} \\ \bar{a} &= -(\bar{b}+\bar{c}) \\ |\bar{a}|^2 &= |\bar{b}+\bar{c}|^2 \\ |\bar{a}|^2 &= |\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2\,\bar{b}\cdot\bar{c} \\ 2^2 &= 1^2+\sqrt{7}^2+2\,\bar{b}\cdot\bar{c} \\ -4 &= 2\,\bar{b}\cdot\bar{c} \\ -2 &= \bar{b}\cdot\bar{c} \end{aligned}$$

แทนใน $(*)$ จะได้ $\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{7}}$ $\rightarrow$ cos เป็นลบ แสดงว่า θ อยู่ในจตุภาคที่ 2 $\rightarrow$ จะได้ $\theta = \pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$

(มุมระหว่างเวคเตอร์ จะมีค่าได้ตั้งแต่ 0 ถึง π)



$\rightarrow$ จากสามเหลี่ยม จะได้ $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}} = \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$

พิจารณาตัวเลือก จะเห็นว่าข้อ 2 เท่านั้นที่มีค่าเท่ากับ $\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$

20. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z-2+i| = |z+2-2i|$ และ $|z+1| = |z+i|$

เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ z ค่าของ $|2z|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10   2. 12   3. 15   4. 18   5. 32

<u>ตอบ</u> 4

ให้ $z = x+yi$

จาก

$$\begin{aligned} |z+1| &= |z+i| \\ |x+yi+1| &= |x+yi+i| \\ |x+1+yi| &= |x+(y+1)i| \\ \sqrt{(x+1)^2+y^2} &= \sqrt{x^2+(y+1)^2} \\ x^2+2x+1+y^2 &= x^2+y^2+2y+1 \\ 2x &= 2y \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z-2+i| &= |z+2-2i| \\ |x+yi-2+i| &= |x+yi+2-2i| \\ |x+xi-2+i| &= |x+xi+2-2i| \\ |x-2+(x+1)i| &= |x+2+(x-2)i| \\ \sqrt{(x-2)^2+(x+1)^2} &= \sqrt{(x+2)^2+(x-2)^2} \\ (x+1)^2 &= (x+2)^2 \\ x^2+2x+1 &= x^2+4x+4 \\ -3 &= 2x \\ -\tfrac{3}{2} &= x \end{aligned}$$

จะได้ $|2z|^2 = \left|2\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)\right|^2 = |-3-3i|^2 = (-3)^2+(-3)^2 = 18$

21. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง โดยที่ มีผลบวก 5 พจน์แรกเป็น 275

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 243$ แล้วค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\,a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0   2. 60.75   3. 121.5   4. 303.75   5. 607.5

<u>ตอบ</u> 4

ใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 243 \quad \dots(*)$

ใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้ผลบวก 5 พจน์แรก $S_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = 275$

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{(1-r)}\cdot(1-r^5) &= 275 \\ 243\cdot(1-r^5) &= 275 \\ 1-r^5 &= \frac{275}{243} \end{aligned}$$

จาก $(*)$

$$-\frac{32}{243} = r^5$$
$$-\frac{2}{3} = r$$

แทน r ใน $(*)$ จะได้ $\frac{a_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = 243$

$$a_1 = 243 \cdot \frac{5}{3} = 405$$

โจทย์ถาม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\, a_n = \frac{1}{2^0}a_1 + \frac{1}{2^1}a_2 + \frac{1}{2^2}a_3 + \ldots$ $\rightarrow$ แต่ละพจน์มีการเอาพจน์ก่อนหน้ามาคูณ $\frac{1}{2}$ เพิ่มเข้าไป

$\rightarrow$ จะได้อัตราส่วนร่วมใหม่ $= \frac{r}{2}$ และพจน์แรก $= \frac{1}{2^0}a_1$

ใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\, a_n = \frac{\frac{1}{2^0}a_1}{1-\frac{r}{2}} = \frac{405}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{405}{\frac{4}{3}} = 303.75$

22. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสอง ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(2, 2)$ และมีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(1, 3)$ แล้วค่าของ $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7　　2. 6　　3. $\frac{16}{3}$　　4. $\frac{14}{3}$　　5. $\frac{8}{3}$

ตอบ 2

ฟังก์ชันกำลังสองจะมีกราฟเป็นรูปพาราโบลา และจุดสูงสุด $(1, 3)$ จะคือจุดยอด (h, k)

เทียบกับรูปสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ จะได้สมการกราฟคือ $y = a(x-1)^2 + 3$

กราฟผ่าน $(2, 2)$ แสดงว่า $(2, 2)$ ต้องทำให้สมการกราฟเป็นจริง $\rightarrow$ $2 = a(2-1)^2 + 3$

$$-1 = a$$

จะได้ $f(x) = (-1)(x-1)^2 + 3$

$$= (-1)(x^2 - 2x + 1) + 3 = -x^2 + 2x + 2$$

ดังนั้น $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \Big|_{-1}^{2}$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2(2)\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 2(-1)\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + 4 \quad -\frac{1}{3} - 1 + 2 \quad = 6$$

23. ให้ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้า $\bar{a} + \bar{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\bar{a} \times \bar{b}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0　　2. $\frac{1}{2}$　　3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　5. 1

ตอบ 4

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |b|^2 + 2\,\bar{a} \cdot \bar{b}$$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |b|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

$\bar{a}$, $\bar{b}$ และ $\bar{a} + \bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย

$$1^2 = 1^2 + 1^2 + 2(1)(1)\cos\theta$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\theta$$

มุมระหว่างเวกเตอร์ จะมีค่าในช่วง $0°$ ถึง $180°$

$$120° = \theta$$

จากสูตร จะได้ $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta = (1)(1)\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

24. ผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง มีการแจกแจงความถี่ ดังนี้
เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้าควอร์ไทล์ที่ 1 (Q_1) ของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 54.5
แล้วนักเรียนทั้งหมดในห้องนี้ มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่
30 – 39	2
40 – 49	5
50 – 59	8
60 – 69	7
70 – 79	a
80 – 89	b
90 – 99	c

1. 36 คน
2. 40 คน
3. 44 คน
4. 48 คน
5. 52 คน

ตอบ 3

ใช้สูตร $Q_r = L + \frac{\left(\frac{r}{4}\right)N - \sum f_L}{f_Q} \cdot I$ แทน $r = 1$ จะได้ $Q_1 = L + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)N - \sum f_L}{f_Q} \cdot I$ ...(*)

โจทย์ให้ $Q_1 = 54.5$ อยู่ในชั้น 50 – 59 จะได้ขอบล่าง $L = 49.5$

ชั้น 50 – 59 มีข้อมูล 8 จำนวน $\rightarrow$ จะได้ $f_Q = 8$

ชั้นที่ต่ำกว่า 50 – 59 จะได้แก่ 2 ชั้นแรก ซึ่งมีผลรวมความถี่ $= \sum f_L = 2 + 5 = 7$

ความกว้างอันตรภาคชั้น $= 59.5 - 49.5 = 10$

แทนทุกค่าที่ได้ ใน (*) จะได้
$$\begin{aligned} 54.5 &= 49.5 + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)N - 7}{8} \cdot 10 \\ 4 &= \left(\frac{1}{4}\right)N - 7 \\ 44 &= N \end{aligned}$$

25. กำหนดข้อมูลของประชากรชุดหนึ่ง ดังนี้ 2 , $2+d$, $2+2d$, $2+3d$, ... , $2+30d$
เมื่อ d เป็นจำนวนจริงบวก ถ้าความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับ 320 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 24.5
2. 32
3. 39.5
4. 47
5. 54.5

ตอบ 2

จะแปลงข้อมูลให้ง่ายขึ้น โดย ลบ 2 และ $\div\, d$

$$\begin{array}{llllllll} (1) & 2, & 2+d, & 2+2d, & 2+3d, & \dots, & 2+30d & \\ (2) & 0, & d, & 2d, & 3d, & \dots, & 30d & \text{ลบ 2 ตลอด} \\ (3) & 0, & 1, & 2, & 3, & \dots, & 30 & \div\, d \text{ ตลอด} \end{array}$$

จะหา $\bar{x}$ และ s ของข้อมูลชุด (3) แล้วย้อนการลดทอนข้อมูล กลับไปหา (2) และ (1) ตามลำดับ

ข้อมูล $0, 1, 2, \dots, 30$ จะมี
$$\bar{x} = \frac{0+1+2+\dots+30}{31} = \frac{\frac{30(30+1)}{2}}{31} = 15$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

และ
$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \bar{x}^2} \\ &= \sqrt{\frac{0^2+1^2+2^2+\dots+30^2}{31} - 15^2} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{30(30+1)(2(30)+1)}{6}}{31} - 15^2} = \sqrt{305 - 225} = \sqrt{80} \end{aligned}$$

คิดย้อนกลับ จะเห็นว่า ข้อมูล (2) ได้จากข้อมูล (3) $\times\, d$

ดังนั้น ข้อมูล (2) จะมี $\bar{x} = 15d$ และมี $s = \sqrt{80}d$ (โจทย์ให้ d เป็นบวก จึงไม่ต้องกลัวว่า s จะติดลบ)

ย้อนกลับอีกครั้ง ข้อมูล (1) จะได้จากข้อมูล (2) $+\ 2$

ดังนั้น ข้อมูล (1) จะมี $\bar{x} = 15d + 2$ และมี $s = \sqrt{80}d$ (การบวกข้อมูลทุกตัวเท่าๆ กัน จะไม่ทำให้ s เปลี่ยน)

แต่โจทย์ให้ข้อมูล (1) มีความแปรปรวน 320 $\rightarrow$ จะได้ $s = \sqrt{320}$ ดังนั้น $\sqrt{80}d = \sqrt{320}$

$$d = \frac{\sqrt{320}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{320}{80}} = 2$$

แทนค่า d ใน $\bar{x} = 15d + 2$ จะได้ค่าเฉลี่ยของข้อมูล (1) คือ $15(2) + 2 = 32$

26. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และสอดคล้องกับ

$$f(x+h) - f(x) = 2h^3 + (6x+1)h^2 + 2x(3x+1)h \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ และ } h$$

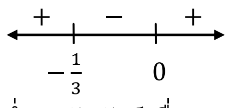
ถ้าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 4 แล้วค่าของ $f(2) + f(-\frac{1}{2})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 28 2. 32 3. 34 4. 36 5. 40

<u>ตอบ</u> 1

จากสูตร
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^3+(6x+1)h^2+2x(3x+1)h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2h^2 + (6x+1)h + 2x(3x+1) \\ &= 2x(3x+1) \end{aligned}$$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิดเมื่อ
$f'(x)$ เปลี่ยนจากลบเป็นบวก



$\rightarrow$ ต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อ $x = 0$

โจทย์ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ 4 ดังนั้น $f(0) = 4$

อินทิเกรต $f'(x)$ เพื่อหา $f(x)$ $\rightarrow$ จาก
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x+1) \\ f'(x) &= 6x^2 + 2x \\ \text{อินทิเกรต} \quad f(x) &= 2x^3 + x^2 + c \quad ...(*) \\ \text{แทน } x = 0 \quad f(0) &= 2(0^3) + 0^2 + c \\ 4 &= c \end{aligned}$$

แทนค่า $c = 4$ ใน $(*)$ จะได้ $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(2) + f(-\tfrac{1}{2}) &= 2(2^3) + 2^2 + 4 + 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 4 \\ &= 16 + 4 + 4 + -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + 4 = 28 \end{aligned}$$

27. กำหนดให้ $\mathbb{I}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(5) = 16$

และ $f(n) = \begin{cases} f(n-2) + 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ f(n+1) - n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

แล้วค่าของ $\sum\limits_{n=-3}^{3} f(n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 10 3. 12 4. 15 5. 24

<u>ตอบ</u> 1

จะเห็นว่า $\sum\limits_{n=-3}^{3} f(n) = f(-3) + f(-2) + f(-1) + \ldots + f(3)$

โจทย์ให้ $f(5) = 16 \rightarrow$ ถ้าแทน $n = 5$ (เป็นคี่) ใน $f(n)$ จะใช้สูตรบน และจะหา $f(3)$ ได้

$$\begin{aligned} \rightarrow\ f(5) &= f(5-2) + 2(5) \\ 16 &= f(3) + 10 \\ 6 &= f(3) \end{aligned}$$

ทำแบบเดิม จะไล่ย้อนหา $f(1)$, $f(-1)$, $f(3)$ ได้

แทน $n = 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= f(3-2) + 2(3) \\ 6 &= f(1) + 6 \\ 0 &= f(1) \end{aligned}$$

แทน $n = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1-2) + 2(1) \\ 0 &= f(-1) + 2 \\ -2 &= f(-1) \end{aligned}$$

แทน $n = -1$

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(-1-2) + 2(-1) \\ -2 &= f(-3) + -2 \\ 0 &= f(-3) \end{aligned}$$

จะได้เลขคี่ทั้งหมด $\rightarrow$ ถัดมา แทน n ด้วยเลขคู่ที่เหลือ -2 , 0 , 2 จะใช้สูตรล่าง และจะหาเลขคู่ที่เหลือได้

แทน $n = -2$

$$\begin{aligned} f(-2) &= f(-2+1) - (-2) \\ f(-2) &= f(-1) + 2 \\ f(-2) &= -2 + 2 \\ f(-2) &= 0 \end{aligned}$$

แทน $n = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+1) - 0 \\ f(0) &= f(1) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

แทน $n = 2$

$$\begin{aligned} f(2) &= f(2+1) - 2 \\ f(2) &= f(3) - 2 \\ f(2) &= 6 - 2 \\ f(2) &= 4 \end{aligned}$$

จะได้ $\sum_{n=-3}^{3} f(n) = f(-3) + f(-2) + f(-1) + \dots + f(3)$

$= 0 + 0 + -2 + 0 + 0 + 4 + 6 = 8$

28. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

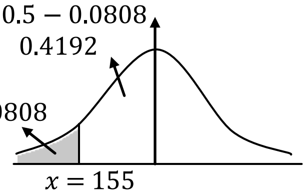
z	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.4032	0.4192	0.4332	0.4452	0.4545

ความสูงของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 162 เซนติเมตร ถ้านักเรียนที่มีความสูงน้อยกว่า 155 เซนติเมตรมีอยู่ 8.08% แล้วนักเรียนที่มีความสูงในช่วง 155 – 170 เซนติเมตร มีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 82.24 2. 83.84 3. 85.24 4. 86.44 5. 87.46

<u>ตอบ</u> 4

น้อยกว่า 155 ซ.ม. มี 8.08% $\rightarrow$ น้อยกว่า 50% ไม่ถึงครึ่งของนักเรียนทั้งหมด ดังนั้น นักเรียนที่สูงน้อยกว่า 155 ซ.ม. จะคิดเป็นพื้นที่ $\frac{8.08}{100} = 0.0808$ ทางซ้าย จะได้พื้นที่จากแกนกลางเพื่อใช้เปิดตาราง $= 0.5 - 04192 = 0.4192$ ดังรูป



จากตาราง เมื่อพื้นที่ $= 0.4192$ จะได้ $z = 1.40$

แต่พื้นที่อยู่ทางซ้าย จะได้ z เป็นลบ $\rightarrow$ เมื่อ $x = 155$ จะได้ $z = -1.40$

$\rightarrow$ แทนในสูตร

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{x_i - \bar{x}}{s} \\ -1.40 &= \frac{155-162}{s} \\ -1.4s &= -7 \\ s &= 5 \end{aligned}$$

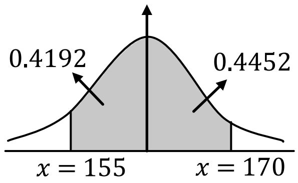
โจทย์ให้ $\bar{x} = 162$

และเมื่อ $x = 170$ จะได้ $z = \frac{170 - \bar{x}}{s} = \frac{170-162}{5} = 1.6$

เปิดตารางจะได้พื้นที่ 0.4452 ดังรูป

ดังนั้น ในช่วง 155 – 170 ซ.ม. จะมี $0.4192 + 0.4452$

$= \quad 0.8644 \quad = 86.44\%$



29. กำหนดให้สมการจุดประสงค์ $P = ax + by$ เมื่อ $0 < a < b \leq 2a$ และอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$$\begin{aligned} x + 3y &\leq 12 \\ x + y &\geq 4 \\ 3y - x &\geq 6 \end{aligned}$$

และ $x \geq 0\,,\ y \geq 0$

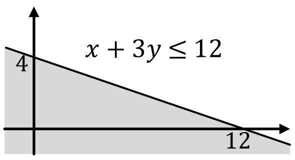
ถ้าค่ามากที่สุดของ P เท่ากับ 15 และค่าน้อยที่สุดของ P เท่ากับ 10.5

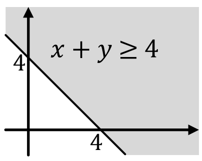
แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

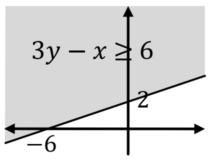
1. 5 2. 10 3. 13 4. 20 5. 25

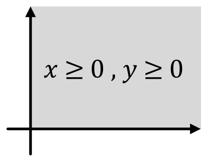
ตอบ 3

วาดกราฟ หาส่วนที่แรเงา จะได้ดังรูป





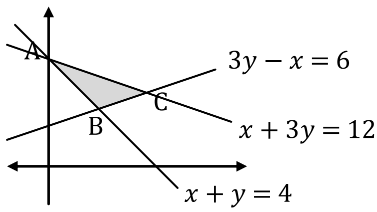




ซ้อนทุกรูป แล้วหาส่วนที่แรเงา จะได้พื้นที่ดังรูป

และจะได้จุดมุมคือ A, B, C

หาพิกัดจุดมุม → จะได้ A(0, 4) ก่อนเลย



B :

$$\begin{aligned} & & 3y - x &= 6 \quad \ldots(1) \\ & & x + y &= 4 \quad \ldots(2) \\ (1) + (2): & & 4y &= 10 \\ & & y &= 2.5 \\ (1): & & x + 2.5 &= 4 \\ & & x &= 1.5 \end{aligned}$$

จะได้พิกัด B คือ (1.5, 2.5)

C :

$$\begin{aligned} & & 3y - x &= 6 \quad \ldots(1) \\ & & x + 3y &= 12 \quad \ldots(3) \\ (1) + (3): & & 6y &= 18 \\ & & y &= 3 \\ (3): & & x + 3(3) &= 12 \\ & & x &= 3 \end{aligned}$$

จะได้พิกัด C คือ (3, 3)

จุดที่ให้ค่า $P = ax + by$ มากสุด / น้อยสุด จะต้องอยู่ใน

A(0, 4) : $P = a(0) + b(4) = 4b$

B(1.5, 2.5) : $P = 1.5a + 2.5b$

C(3, 3) : $P = 3a + 3b$

เทียบค่า P ทั้ง 3 ค่า ว่าค่าไหนมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าไหน (ยังไม่รู้ว่าใน __?__ จะเป็นเครื่องหมาย $>$ หรือ $<$)

$4b$ __?__ $1.5a + 2.5b$

$1.5b$ __?__ $1.5a$

b __?__ a

โจทย์ให้ $b > a$ ดังนั้น __?__ ต้องเป็น __$>$__

ไล่ย้อนกลับไป จะได้ $4b > 1.5a + 2.5b$

$4b$ __?__ $3a + 3b$

b __?__ $3a$

โจทย์ให้ $b \leq 2a$ ซึ่งจะสรุปได้ว่า $b < 3a$ (เพราะ a เป็นบวก)

ดังนั้น __?__ ต้องเป็น __$<$__ ไล่ย้อนกลับไป จะได้ $4b < 3a + 3b$

เรียงค่า จะได้ $1.5a + 2.5b \; < \; 4b \; < \; 3a + 3b$ ดังนั้น ค่าน้อยสุด $10.5 = 1.5a + 2.5b$ ×2 ตลอด

$$21 = 3a + 5b \quad \text{...(4)}$$

ค่ามากสุด $15 = 3a + 3b$ ...(5)

$$\begin{aligned}
(4)-(5): \quad 6 &= 2b \\
3 &= b \\
(5): \quad 15 &= 3a + 3(3) \\
2 &= a
\end{aligned}$$

จะได้ $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

30. จากการสอบถามพนักงานบริษัทแห่งหนึ่งจำนวน n คน ที่มีเงินเดือนตั้งแต่ 10,000 บาท ถึง 100,000 บาท เกี่ยวกับเงินออมต่อเดือน ดังนี้

พนักงานคนที่	เงินเดือน (หมื่นบาท) (a)	เงินออม (พันบาท) (b)
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
⋮	⋮	⋮
n	a_n	b_n

โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือนเท่ากับ 64,000 บาท ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินออมเท่ากับ 2,000 บาท และความสัมพันธ์ระหว่างเงินเดือนและเงินออมเป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง ถ้าพนักงานมีเงินออม เดือนละ 1,000 บาท ประมาณได้ว่าพนักงานคนนี้มีเงินเดือน 26,000 บาท แล้วถ้าพนักงานมีเงินออม เดือนละ 1,500 บาท จะประมาณได้ว่าเขามีเงินเดือนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 39,000 บาท
2. 45,000 บาท
3. 52,000 บาท
4. 58,000 บาท
5. 65,000 บาท

<u>ตอบ</u> 2

ข้อนี้ จะทำนายเงินเดือน (a) จากเงินออม (b) → ให้ $y =$ เงินเดือน (a) และ $x =$ เงินออม (b)

สมมติให้สมการทำนาย คือ $\hat{y} = c + mx$ จากสูตร จะได้

$$\begin{aligned}
\sum y &= cn + m\sum x \quad \text{...(1)} \\
\sum xy &= c\sum x + m\sum x^2 \quad \text{...(2)}
\end{aligned}$$

ค่าเฉลี่ยเงินเดือน $= 64{,}000$ บาท

ดังนั้น $\bar{y} = 64$ (a มีหน่วยเป็นหมื่นบาท)

$$\frac{\sum y}{n} = 64$$

$$\sum y = 64n$$

ค่าเฉลี่ยเงินออก $= 2{,}000$ บาท

ดังนั้น $\bar{x} = 2$ (b มีหน่วยเป็นพันบาท)

$$\frac{\sum x}{n} = 2$$

$$\sum x = 2n$$

แทน $\sum y$ และ $\sum x$ ใน (1) จะได้ $64n = cn + m(2n)$

$$64 = c + 2m \quad \text{...(3)}$$

จากโจทย์ เมื่อมีเงินออม 1,000 บาท $(x = 1)$ จะทำนายเงินเดือนได้ 26,000 บาท $(\hat{y} = 26)$

แทนในสมการทำนาย

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= c + mx \\
26 &= c + m(1) \\
26 &= c + m \quad \text{...(4)} \\
(3)-(4): \quad 38 &= m \\
(4): \quad 26 &= c + 38 \\
-12 &= c
\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อมีเงินออม 1,500 บาท $(x = 1.5)$

จะได้ $\hat{y} = c + mx$

$$\hat{y} = -12 + 38(1.5) = 45$$

ซึ่งคิดเป็นเงินเดือน 45,000 บาท

31. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}+3\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 4$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่น้อยสุดในเซต A และ b เป็นจำนวนที่มากที่สุดในเซต A

แล้ว a^2+b^2 มีค่าเท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 34

สังเกตว่า $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}$ กับ $\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}}$ เป็นส่วนกลับกัน $\rightarrow$ ถ้าให้ $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} = k$ จะได้ $\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = \frac{1}{k}$

จะได้สมการคือ
$$\begin{aligned} k+3\left(\tfrac{1}{k}\right) &= 4 \\ k^2+3 &= 4k \\ k^2-4k+3 &= 0 \\ (k-1)(k-3) &= 0 \\ k &= 1\ ,\ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} &= 1 \\ \frac{2x+3}{x-2} &= 1 \\ 2x+3 &= x-2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} &= 3 \\ \frac{2x+3}{x-2} &= 9 \\ 2x+3 &= 9x-18 \\ 21 &= 7x \\ 3 &= x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ จะได้ $a=-5$ และ $b=3$

ดังนั้น $a^2+b^2 = (-5)^2+3^2$

32. คนกลุ่มหนึ่ง มีผู้ชาย 10 คนและผู้หญิง 7 คน โดยมีนาย ก. และนาย ข. รวมอยู่ด้วย จะมีกี่วิธีในการเลือกคณะกรรมการ 6 คน จากคนกลุ่มนี้ ประกอบด้วย ผู้ชายอย่างน้อย 2 คน และผู้หญิงอย่างน้อย 3 คน โดยมีเงื่อนไขว่า นาย ก. และ นาย ข. จะเป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้

<u>ตอบ</u> 5460

จะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม โดยหาจำนวนแบบที่ ช ≥ 2 และ ญ ≥ 3 ทั้งหมด

แล้วหักออกด้วยจำนวนแบบ ช ≥ 2 และ ญ ≥ 3 ที่ ก. ข. เป็นกรรมการพร้อมกัน

ก็จะได้จำนวนแบบ ช ≥ 2 และ ญ ≥ 3 ที่ ก. ข. <u>ไม่</u>เป็นกรรมการพร้อมกัน

ช ≥ 2 และ ญ ≥ 3 ทั้งหมด $\rightarrow$ จะมีแค่ 2 ประเภท คือ ช 2 ญ 4 กับ ช 3 ญ 3

$\rightarrow$ กรณี ช 2 ญ 4 เลือก ช 2 คนจาก 10 คน และ ญ 4 คนจาก 7 คน ได้ $\binom{10}{2}\binom{7}{4}$ แบบ

$\rightarrow$ กรณี ช 3 ญ 3 ทำแบบเดียวกัน จะได้ $\binom{10}{3}\binom{7}{3}$ แบบ

$\rightarrow$ รวมจำนวนแบบทั้งหมด $= \binom{10}{2}\binom{7}{4}+\binom{10}{3}\binom{7}{3}$ แบบ

ช ≥ 2 และ ญ ≥ 3 และ ก. ข. เป็นกรรมการ $\rightarrow$ กรณี ช 2 ญ 4 จะมี ช คือ ก. ข. ครบแล้ว เลือก ญ 4 คน ได้ $\binom{7}{4}$ แบบ

$\rightarrow$ กรณี ช 3 ญ 3 จะเหลือ ช 1 คนที่ต้องเลือกจาก 8 คน (ที่ไม่รวม ก.ข.) กับ ญ 3 คน ที่ต้องเลือก จะได้ $\binom{8}{1}\binom{7}{3}$ แบบ

$\rightarrow$ รวมจำนวนแบบที่ต้องหัก $= \binom{7}{4}+\binom{8}{1}\binom{7}{3}$ แบบ

จะได้คำตอบ
$$\begin{aligned} &= \left[\binom{10}{2}\binom{7}{4}+\binom{10}{3}\binom{7}{3}\right]-\left[\binom{7}{4}+\binom{8}{1}\binom{7}{3}\right] \\ &= \binom{10}{2}\binom{7}{3}+\binom{10}{3}\binom{7}{3}-\binom{7}{3}-\binom{8}{1}\binom{7}{3} \\ &= \binom{7}{3}\ \left[\binom{10}{2}+\binom{10}{3}-1-\binom{8}{1}\right] \\ &= \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}\cdot\left[\frac{10\cdot9}{2}+\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}-1-8\right] \\ &= 35\cdot[45+120-1-8] \quad = (35)(156) \quad = 5460 \end{aligned}$$

33. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมีผลบวก n พจน์แรกของลำดับเท่ากับ $3n^2+2n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า $\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}} = m$ แล้วจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า m เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 59

จากผลบวก n พจน์แรก $= 3n^2+2n$ $\rightarrow$ ผลบวก 1 พจน์แรก คือ $a_1 = 3(1^2)+2(1) = 5$

$\rightarrow$ ผลบวก 2 พจน์แรก คือ $a_1 + a_2 = 3(2^2)+2(2) = 16$

แต่ $a_1 = 5$ ดังนั้น จะเหลือ $a_2 = 16-5 = 11$

$\rightarrow$ จะได้ $d = a_2 - a_1 = 11-5 = 6$

แทน $a_1 = 5$ และ $d = 6$ ในสูตร
$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ &= 5+(n-1)(6) \\ &= 5+6n-6 \\ &= 6n-1 \end{aligned}$$

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}} &= \frac{6(2)-1}{2} + \frac{6(2^2)-1}{2^2} + \frac{6(2^3)-1}{2^3} + \dots + \frac{6(2^{10})-1}{2^{10}} \\ &= 6-\frac{1}{2} + 6-\frac{1}{2^2} + 6-\frac{1}{2^3} + \dots + 6-\frac{1}{2^{10}} \\ &= (6+6+6+\dots+6) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= 60 - \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 60 - \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \\ &= 60 - 1 + \frac{1}{2^{10}} \\ &= 59 + \frac{1}{2^{10}} \end{aligned}$$

อนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

เนื่องจาก $\frac{1}{2^{10}}$ มีค่าน้อยกว่า 1 ดังนั้น จำนวนเต็มที่มากที่สุด ที่น้อยกว่า $59 + \frac{1}{2^{10}}$ คือ 59

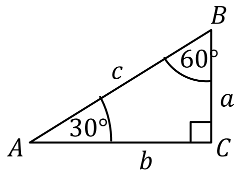
34. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่มุม C เป็นมุมฉาก และมุม A สอดคล้องกับสมการ $2\cos 2A - 8\sin A + 3 = 0$ ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ ถ้า $a+c = 30$ แล้วค่าของ $a\sin A + b\sin B$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 20

$$\begin{aligned} 2\cos 2A - 8\sin A + 3 &= 0 \\ 2(1-2\sin^2 A) - 8\sin A + 3 &= 0 \\ 2-4\sin^2 A - 8\sin A + 3 &= 0 \\ 4\sin^2 A + 8\sin A - 5 &= 0 \\ (2\sin A - 1)(2\sin A + 5) &= 0 \end{aligned}$$

$\sin A = \frac{1}{2}$, $\cancel{-\frac{5}{2}}$ (sin ต้องอยู่ในช่วง $[-1, 1]$)

$A = 30°$, $\cancel{150°}$ (มุมประกอบมุมฉาก ต้องไม่เกิน 90°)



จะเหลือ $B = 180° - 90° - 60° = 30°$ ดังรูป

หาความสัมพันธ์ระหว่าง a และ c จะได้ $\sin A = \sin 30° = \frac{a}{c}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{c}$

$c = 2a$

แทนในสมการที่โจทย์ให้
$$\begin{aligned} a+c &= 30 \\ a+2a &= 30 \\ a &= 10 \end{aligned}$$

และจะได้ $c = 2(10) = 20$

พีทากอรัส จะได้ $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

ดังนั้น $a\sin A + b\sin B = 10\sin 30° + 10\sqrt{3}\sin 60°$

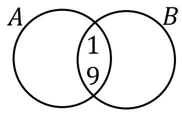
$$= 10\left(\frac{1}{2}\right) + 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 15 = 20$$

35. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ และให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $A \cap B = \{1, 9\}$, $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ และ $U - A = \{3, 5, 6, 7\}$

จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ เท่ากับเท่าใด

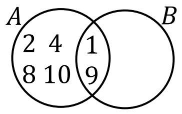
ตอบ 24

จาก $A \cap B = \{1, 9\}$ จะได้ส่วนตรงกลาง $= 1, 9$ ดังรูป



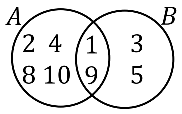
จาก $U - A = \{3, 5, 6, 7\}$ จะได้ 3, 5, 6, 7 ต้องไม่อยู่ใน A

ดังนั้น สมาชิกที่เหลือ 1, 2, 4, 8, 9, 10 ต้องอยู่ใน A ดังรูป



จาก $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

แสดงว่า 3 กับ 5 ต้องอยู่ในซีกทางขวา ดังรูป



จะได้ $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 6 \times 4 = 24$

36. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(x) = \begin{cases} x - 2 & ; x \le 4 \\ 3x - 10 & ; x > 4 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x < 1 \\ \frac{1}{2}(x + 5) & ; x \ge 1 \end{cases}$

ถ้า $(f \circ g^{-1})(x) = 2$ แล้ว x เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4.5

$$(f \circ g^{-1})(x) = 2$$
$$f\left(g^{-1}(x)\right) = 2$$

ไม่รู้ว่าต้องใช้ f สูตรไหน เพราะไม่รู้ว่า $g(x) \le 4$ หรือ > 4 จะลุยใช้ทั้ง 2 สูตร แล้วค่อยดูความเป็นไปได้ของเงื่อนไขทีหลัง

กรณี $g^{-1}(x) \le 4 \to$ ใช้ f สูตรบน

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) - 2 &= 2 \\ g^{-1}(x) &= 4 \quad \to \text{ ไม่ขัดแย้ง} \\ x &= g(4) \\ x &= \tfrac{1}{2}(4 + 5) \\ x &= 4.5 \end{aligned}$$

$4 \ge 1$ ใช้ g สูตรล่าง

กรณี $g^{-1}(x) > 4 \to$ ใช้ f สูตรล่าง

$$\begin{aligned} 3g^{-1}(x) - 10 &= 2 \\ 3g^{-1}(x) &= 12 \\ g^{-1}(x) &= 4 \end{aligned}$$

ขัดแย้งกับเงื่อนไข $g^{-1}(x) > 4$

กรณีนี้จึงใช้ไม่ได้

37. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงบวก x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $(\log_3 9x)^2 - 3\log_{\sqrt{3}} x - 7 = 0$ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 9

$$\begin{aligned}
(\log_3 9x)^2 - 3\log_{\sqrt{3}} x - 7 &= 0 \\
(\log_3 9 + \log_3 x)^2 - 3\log_{3^{\frac{1}{2}}} x - 7 &= 0 \\
(\ 2 + \log_3 x)^2 - \frac{3}{\frac{1}{2}}\log_3 x - 7 &= 0 \\
(\ 2 + k\ )^2 - 6\ k - 7 &= 0 \\
4 + 4k + k^2 - 6k - 7 &= 0 \\
k^2 - 2k - 3 &= 0 \\
(k+1)(k-3) &= 0
\end{aligned}$$

ให้ $\log_3 x = k$

$$\begin{aligned}
k &= -1\ ,\ 3 \\
\log_3 x &= -1\ ,\ 3 \\
x &= 3^{-1}\ ,\ 3^3
\end{aligned}$$

จะได้ผลคูณคำตอบ $= 3^{-1} \times 3^3 = 3^2 = 9$

38. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = x^2 - x + a$ และ $g(x) = x^2 + bx$ สำหรับทุกจำนวนจริง x เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $f(b) + g(a)$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 2

โจทย์ให้ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ สำหรับ x ทุกตัว → จะจัดรูปตามกำลังของ x แล้วเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\
&= f(x^2 + bx) \\
&= (x^2 + bx)^2 - (x^2 + bx) + a \\
&= x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - x^2 - bx + a \\
&= x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 1)x^2 - bx + a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\
&= g(x^2 - x + a) \\
&= (x^2 - x + a)^2 + b(x^2 - x + a) \\
&= x^4 + x^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2 - 2ax + bx^2 - bx + ab \\
&= x^4 - 2x^3 + x^2 + 2ax^2 + bx^2 - 2ax - bx + a^2 + ab \\
&= x^4 - 2x^3 + (1 + 2a + b)x^2 - (2a + b)x + a^2 + ab
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &\quad + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}}$$

เทียบ สปส x^3	เทียบ สปส x^2	ตรวจสอบ สปส x	ตรวจสอบพจน์ค่าคงที่
$2b = -2$	$b^2 - 1 = 1 + 2a + b$	$b = 2a + b$	$a = a^2 + ab$
$b = -1$	$(-1)^2 - 1 = 1 + 2a + (-1)$	$-1 = 2(0) + (-1)$ ✓	$0 = 0^2 + 0(-1)$ ✓
	$0 = a$		

ดังนั้น $f(b) + g(a) = b^2 - b + a + a^2 + ab$

$= (-1)^2 - (-1) + 0 + 0^2 + 0(-1) = 2$

39. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt[3]{8+x} - 2}$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 12

ลองแทน $x = 0$ จะได้ $\frac{0}{0}$ → ต้องจัดรูปให้ x โผล่มาตัดกันก่อน

- เศษมี x พร้อมตัดอยู่แล้ว → ไม่ต้องจัดรูปเศษ
- ส่วนเป็น $\sqrt[3]{}$ ต้องคูณให้เข้าสูตรผลต่างกำลังสาม $(\text{น} - \text{ล})(\text{น}^2 + \text{นล} + \text{ล}^2) = \text{น}^3 - \text{ล}^3$

$$\frac{x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt[3]{8+x}-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{8+x}^{\,2}+2\sqrt[3]{8+x}+2^2}{\sqrt[3]{8+x}^{\,2}+2\sqrt[3]{8+x}+2^2} = \frac{\left(x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}\right)\left(\sqrt[3]{8+x}^{\,2}+2\sqrt[3]{8+x}+2^2\right)}{\sqrt[3]{8+x}^{\,3}-2^3}$$

$$= \frac{\left(x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}\right)\left(\sqrt[3]{8+x}^{\,2}+2\sqrt[3]{8+x}+2^2\right)}{x}$$

$$= \left(\sqrt{x+\sqrt{1+x}}\right)\left(\sqrt[3]{8+x}^{\,2}+2\sqrt[3]{8+x}+2^2\right)$$

ตัด x ได้แล้ว ลองแทน $x=0$ ใหม่ $\rightarrow \left(\sqrt{0+\sqrt{1+0}}\right)\left(\sqrt[3]{8+0}^{\,2}+2\sqrt[3]{8+0}+2^2\right)$

$$=(\quad 1 \quad)(\quad 4 \quad + \quad 4 \quad +4) = 12$$

40. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงจัดเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a+b+c = 14$

และ a , $b+3$, $c+4$ จัดเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ค่าของ $a^2+b^2+c^2$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 84

ให้ a, b, c มีอัตราส่วนร่วม $= r$ $\rightarrow$ จากสมบัติของลำดับเรขาคณิต จะได้ $b = ar$ และ $c = ar^2$

แทนในสมการ

$$\begin{aligned} a+b+c &= 14 \\ a+ar+ar^2 &= 14 \\ a(1+r+r^2) &= 14 \quad ...(1) \end{aligned}$$

โจทย์ให้ a , $b+3$, $c+4$ เป็นลำดับเลขคณิต $\rightarrow$ จากสมบัติของลำดับเลขคณิต จะได้

$$\begin{aligned} b+3-a &= (c+4)-(b+3) \\ ar+3-a &= ar^2+4-ar-3 \\ 2 &= ar^2-2ar+a \\ 2 &= a(r^2-2r+1) \quad ...(2) \end{aligned}$$

$(1) \div (2)$ จะทำให้ a ตัดกันได้ : $\dfrac{a(1+r+r^2)}{a(r^2-2r+1)} = \dfrac{14}{2}$

$$\begin{aligned} 1+r+r^2 &= 7r^2-14r+7 \\ 0 &= 6r^2-15r+6 \\ 0 &= 2r^2-5r+2 \\ 0 &= (2r-1)(r-2) \end{aligned}$$

$$r = \frac{1}{2},\ 2$$

กรณี $r=\frac{1}{2}$ แทนใน (1) : $a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 14$

$$a\left(\frac{4+2+1}{4}\right) = 14$$

$$a = 8$$

จะได้ลำดับ a, b, c คือ $8, 4, 2$

กรณี $r=2$ แทนใน (1) : $a(1+2+4) = 14$

$$a = 2$$

จะได้ลำดับ a, b, c คือ $2, 4, 8$

จะเห็นว่าทั้ง 2 กรณี ได้ตัวเลขเหมือนกัน $\rightarrow$ จะได้ $a^2+b^2+c^2 = 2^2+4^2+8^2 = 84$

41. กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงผลทดสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง ดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
0	$a-2$
1	a
2	a^2
3	$(a+1)^2$
4	$2a$
5	$a+1$

เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าคะแนนเฉลี่ยเลขคณิตของผลทดสอบเท่ากับ 2.8

แล้วจำนวนนักเรียนห้องนี้เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 60

จากสูตร ค่าเฉลี่ย $=$ ผลรวมคะแนน $\div$ จำนวนคน

$$\begin{aligned}\text{ผลรวมคะแนน} &= (0)(a-2)+(1)(a)+(2)(a^2)+(3)(a+1)^2+(4)(2a)+(5)(a+1)\\ &= 0 + a + 2a^2 + 3a^2+6a+3 + 8a + 5a+5\\ &= 5a^2+20a+8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จำนวนคน} &= (a-2)+a+a^2+(a+1)^2+2a+(a+1)\\ &= a-2+a+a^2+a^2+2a+1+2a+a+1\\ &= 2a^2+7a \qquad \ldots(*)\end{aligned}$$

จะได้ ค่าเฉลี่ย

$$\begin{aligned}2.8 &= \frac{5a^2+20a+8}{2a^2+7a}\\ \frac{14}{5} &= \frac{5a^2+20a+8}{2a^2+7a}\\ 28a^2+98a &= 25a^2+100a+40\\ 3a^2-2a-40 &= 0\\ (3a+10)(a-4) &= 0\\ a &= -\frac{10}{3},\ 4\end{aligned}$$

แต่ $a=-\frac{10}{3}$ ไม่ได้ เพราะจะทำให้บางแถวมีจำนวนคน ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก $\rightarrow$ เหลือ $a=4$ ค่าเดียว

แทนค่า $a=4$ ใน $(*)$ จะได้จำนวนคน $= 2(4^2)+7(4) = 60$

42. ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริงให้ $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+4 & ; x\geq 0\\ 4x+c & ; x<0\end{cases}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงและสอดคล้องกับ $f'(3)+f(3) = 45$ และ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$

แล้วค่าของ $f(a)+f(b)+f(c)$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ</u> 76

f ต่อเนื่อง แสดงว่าตรงรอยต่อของทั้งสองสูตร (ที่ $x=0$) ต้องได้ค่าเท่ากัน

$$\begin{aligned}a(0^2)+b(0)+4 &= 4(0)+c\\ 4 &= c\end{aligned}$$

เมื่อ $x=3\geq 0$ จะได้ $f(x) = ax^2+bx+4$, $f'(x) = 2ax+b$ $\rightarrow$ ใช้ใน

$$\begin{aligned}f'(3) + f(3) &= 45\\ 2a(3)+b+a(3^2)+b(3)+4 &= 45\\ 15a+4b &= 41 \qquad \ldots(1)\end{aligned}$$

และเมื่อ $x\in(0,1)$ จะได้ $x\geq 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (ax^2+bx+4)\,dx\\ \frac{9}{2} &= \left.\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+4x\right|_0^1\\ \frac{9}{2} &= \left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+4\right)-(0)\\ 27 &= 2a+3b+24\\ 2a+3b &= 3 \qquad \ldots(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\times(1)-4\times(2):\quad 3(15a+4b)-4(2a+3b) &= 3(41)-4(3) \\ 37a &= 111 \\ a &= 3 \end{aligned}$$
$\rightarrow$ แทนใน (2) : $2(3)+3b = 3$
$b = -1$

แทนค่า $a=3$, $b=-1$, $c=4$ จะได้ $f(x) = \begin{cases} 3x^2-x+4 & ;x\geq 0 \\ 4x+4 & ;x<0 \end{cases}$

และจะได้ $f(a)+f(b)+f(c) = f(3)+f(-1)+f(4)$
$= 3(3^2)-3+4 + 4(-1)+4 + 3(4^2)-4+4 = 76$

43. กำหนดให้ A เป็นเซตของลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, 10, …

ให้ $f(x)=5x+3$ และ $g(x)=x+4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $h(x) = \begin{cases} f(x) & ;\ x\in A \\ g^{-1}(x) & ;\ x\notin A \end{cases}$ แล้วค่าของ $h(h(h(100)))$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 2498

ค่า $h(h(h(100)))$ หาได้โดย เอา 100 มาหาค่า h ไป 3 ครั้ง

หา $h(100)$: สังเกตว่าตัวเลขใน A บวกเพิ่มทีละ 3 ดังนั้น ทุกตัวใน A จะหารด้วย 3 เหลือเศษเท่ากัน คือเหลือเศษ 1

100 หารด้วยด้วย 3 เหลือเศษ 1 ดังนั้น $100\in A$ นั่นคือ $h(100)$ จะใช้สูตรบน

ได้ $h(100) = f(100) = 5(100)+3 = 503$

หา $h(503)$: 503 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 ดังนั้น $503\notin A$ นั่นคือ $h(503)$ จะใช้สูตรล่าง

ได้ $h(503) = g^{-1}(503)$ $\rightarrow$ ต้องหา $g^{-1}(x)$ ก่อน

จาก
$$\begin{aligned} g(x) &= x+4 \\ x &= g^{-1}(x+4) \\ x &= g^{-1}(\ k\ ) \\ k-4 &= g^{-1}(\ k\ ) \\ x-4 &= g^{-1}(\ x\ ) \end{aligned}$$
ให้ $k = x+4$
$k-4 = x$
แทน k ด้วย x

จะได้ $g^{-1}(x) = x-4$

ดังนั้น $h(503) = g^{-1}(503) = 503-4 = 499$

หา $h(499)$: 499 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 ดังนั้น $499\in A$ นั่นคือ $h(499)$ จะใช้สูตรบน

ได้ $h(499) = f(499) = 5(499)+3 = 2498$

นั่นคือ $h(h(h(100))) = h\big(h(503)\big) = h(499) = 2498$

44. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง ลูกบอลสีเขียวและลูกบอลสีเหลือง โดยมีจำนวนลูกบอลสีแดงคิดเป็นร้อยละ 30 และมีจำนวนลูกบอลสีเขียวคิดเป็นร้อยละ 20 ถ้าเพิ่มจำนวนลูกบอลสีเหลืองอีก 20 ลูก ใส่ลงในกล่องใบนี้ พบว่าจำนวนลูกบอลสีเหลืองคิดเป็นร้อยละ 60 จงหาว่าในกล่องใบนี้มีจำนวนลูกบอลสีแดงทั้งหมดกี่ลูก

ตอบ 24

มีสีแดง 30% สีเขียว 20% $\rightarrow$ ที่เหลือเป็น สีเหลือง 50% $\rightarrow$ มีสีเหลืองครึ่งหนึ่งของลูกบอลทั้งหมด

ถ้าสมมติให้มีสีเหลือง x ลูก จะมีลูกบอลทั้งหมด $= 2x$ ลูก

ถ้าเพิ่มสีเหลือง 20 ลูก จะทำให้มีสีเหลือง $x+20$ ลูก และลูกบอลทั้งหมดจะเพิ่มเป็น $2x+20$ ลูก

หลังเพิ่ม จะมีสีเหลือง 60% แสดงว่า $\frac{x+20}{2x+20} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$
$$\begin{aligned} 5x+100 &= 6x+60 \\ 40 &= x \end{aligned}$$

นั่นคือ เดิมมีสีเหลือง 40 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด $2(40) = 80$ ลูก

มีลูกบอลสีแดง 30% จะคิดเป็น $\frac{30}{100} \times 80 = 24$ ลูก

45. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & 2 \\ -1 & 3 & c \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง และ $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยที่ $AB = C$ และ $A\begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

แล้ว ค่าของ $a + b + c$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 23

ข้อนี้หา A จากการแก้สมการ $AB = C$ ค่อนข้างยาก เพราะไม่รู้ค่า a, b, c ใน B ทำให้หา B^{-1} ลำบาก

แต่จะเห็นว่าโจทย์ให้ C มาครบทุกสมาชิก $\rightarrow$ หา C^{-1} ง่ายกว่า B^{-1}

($\det C = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(1) \neq 0$ แสดงว่า C^{-1} และ A^{-1} หาค่าได้)

$\rightarrow$ จะหา A^{-1} จาก

$$\begin{aligned} AB &= C \\ B &= A^{-1}C \\ BC^{-1} &= A^{-1} \quad \ldots(1) \end{aligned}$$

แทน แล้วค่อยนำ A^{-1} ไปใช้ใน

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} &= A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

หา C^{-1} โดยการแก้สมการ $CX = I$ ด้วยเมทริกซ์แต่งเติม $[\, C \mid I \,]$ เพื่อหาค่า X

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{3R_1}{-2R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ จะได้ $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C^{-1}$

แทน B และ C^{-1} ใน (1) จะได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & 2 \\ -1 & 3 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & -4 & -1 \\ 9 & -2b & 2 \\ -3 & -6 & c \end{bmatrix}$

แทน A^{-1} ใน (2) จะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3a & -4 & -1 \\ 9 & -2b & 2 \\ -3 & -6 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3a+5 \\ 4b+15 \\ 3c+9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$4a+1 = 3a+5$	$5b+2 = 4b+15$	$4c+3 = 3c+9$
$a = 4$	$b = 13$	$c = 6$

จะได้ $a + b + c = 4 + 13 + 6 = 23$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลย จาก อ.ปิ๋ง GTRmath

ขอบคุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ บุญช่วย ฤทธิเทพ

และ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นวย) ผู้เขียน Math E-book

และ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณ Potae Kitti ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร