MATEMATIK A-NIVEAU

Eksempel på løsning af matematik A eksamenssæt

STX152-MAT/A-13082015

Matematik A, STX

Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

MATEMATIK A-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

2012

Dette uddrag indeholder løsning af matematik A eksamenssæt august 2015.

For anvendelse af dokumentet, anbefales det, at man prøver at løse opgaven først, inden man anvender løsningerne.

Anders Jørgensen & Mark Kddafi
2016

STX Matematik A-niveau 13-08-2015 vejledende eksamenssæt løsning

$STX\ matematik\ A - niveau, delprøve\ 1$

Opgave 1

Der er givet en lineære sammenhæng

$$y = 3x + 4$$

Her er $b = 4$ og $a = 3$

a) Her indsættes tallet 7 på x's plads.

$$y = 3 \cdot 7 + 4 = 25$$

Så her er tallet 25.

Så er spørgsmålet, hvor meget y vokser med, når x vokser med 5. I matematik C lærte man, at når x vokser med 1, lægges a til y. Så man har

$$y = 3(x + 5) + 4 = 3x + 15 + 4 = y + 15$$

Men hvis $b = 0$, så er konklusionen:

$Når\ x\ vokser\ med\ 5, så\ vokser\ y\ med\ 15, pga. tilvæksten.$

Opgave 2

Prisen for en bestemt vare ses at være eksponentiel. Deraf har man

$r = 4.5\%$ og $b = 213$.

a) Først omregnes renten vha. fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r, \qquad a = 1 + \left(\frac{4.5}{100}\right) = 1.045$$

Så man har en eksponentiel model

$$f(x) = 213 \cdot 1.045^x$$

Der beskriver stigningen i prisen for en vare fra år 2015.

Opgave 3

Grafen viser en andengradspolynomium

$$y = ax^2 + bx + c$$

a) Her er

$$a > 0$$
$$b < 0$$
$$c > 0$$
$$d < 0$$

Dvs. a er voksende, dvs. glad parabel. b er aftagende, for ved tegning af en ret linje, ses det, at den er aftagende fra skæring med y-aksen. c værdien er voksende, da den skærer y-aksen i mellem første og anden kvadrant. Endelig er d mindre end 0, da løsningerne er indenfor de komplekse tal.

Opgave 4

Der er givet en kasse.

a) Formlen for volumen er

$$V = l \cdot b \cdot h$$

Her er $l = 3h + 4$ og $b = 2l + 1$ og $h = h$.
Det ses desuden, at l indgår i bredden, så man har

$$b = 2 \cdot (3h + 4) + 1 = 6h + 9$$

Derved er formlen

$$V = (3h + 4) \cdot (6h + 9) \cdot h$$

Opgave 5

Der er givet en funktion og en differentialligning.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cdot y}{x}$$

Og funktionen

$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$$

a) Man ønsker at vide, om f er løsningen til differentialligningen, så funktionen differentieres. Der anvendes produktreglen.

$$f'(x) = (x \cdot e^x) + (1 \cdot e^x) = x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$$

Så $\frac{dy}{dx}$ betyder faktisk $f'(x)$ og y betyder $f(x)$ så man gør prøve

$$x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \frac{x \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot x \cdot \mathrm{e}^x}{x} \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \frac{x(\mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x$$

Det ses, at funktionerne er identiske på begge sider, så her er f en løsning til differentialligningen.

Opgave 6

Lad integralet være givet

$$\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x + 4}} dx$$

Lad t være

$$t = x^3 + 2x + 4 \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3x^2 + 2} dt$$

Dette indsættes tilbage i integralet

$$\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{3x^2 + 2} dt = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_0^2 = \left[2\sqrt{x^3 + 2x + 4}\right]_0^2$$

$$= 2\sqrt{2^3 + 2 \cdot 2 + 4} - \left(2\sqrt{0^3 + 2 \cdot 0 + 4}\right) = 2\sqrt{16} - \left(2\sqrt{4}\right) = 8 - 4 = 4$$

Så det ses, at arealet af funktionen er 4.

STX Matematik A-niveau 13-08-2015 vejledende eksamenssæt løsning

STX matematik A – niveau, delprøve 2

Opgave 7

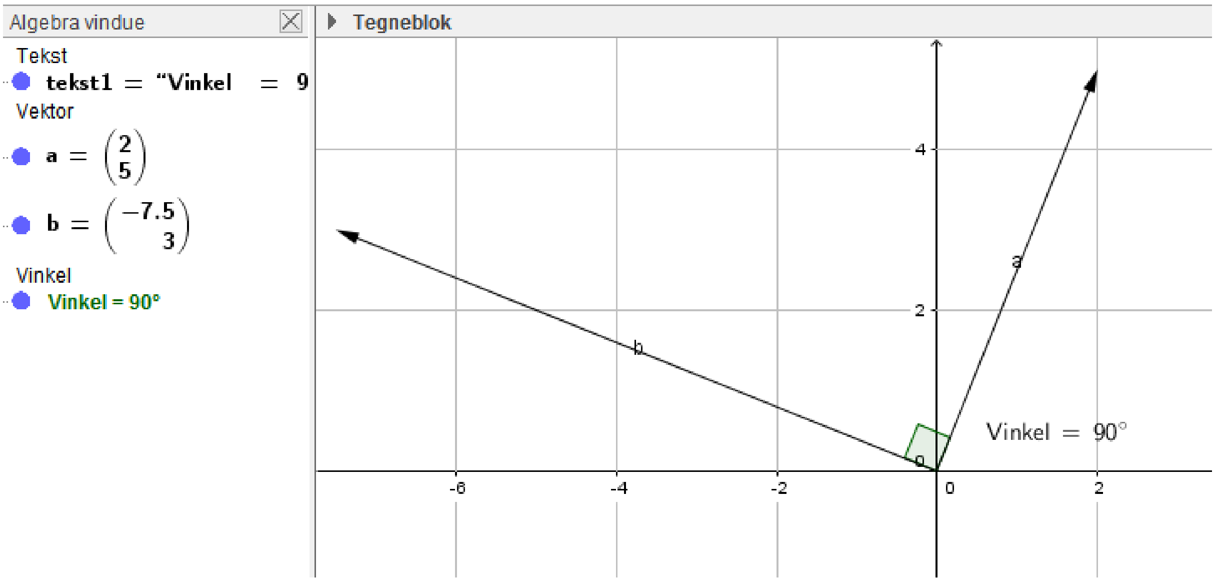
Der er givet to vektorer;

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) For at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, skal vinklen mellem dem være 90^o.

$$2 \cdot t + 5 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2t + 15 = 0 \Leftrightarrow$$
$$t = -7.5$$

Så med værdien -7.5 har man to ortogonale vektorer. Dette vises grafisk i GeoGebra.



b) Her gælder, at vinkel mellem vektorer. Her skal t findes, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 45^o.

Vinkel mellem vektorer er givet ved formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Her er

$$\cos(45) = \frac{(2 \cdot t) + (5 \cdot 3)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{t^2 + 3^2}}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$t = -1.285714 \quad \vee \quad t = 7$$

Så disse værdier af t giver vektorer $\vec{b}$ 45^o fra $\vec{a}$. Man kunne også tage den pr. håndkraft, men det vil tage sin tid.

Opgave 8

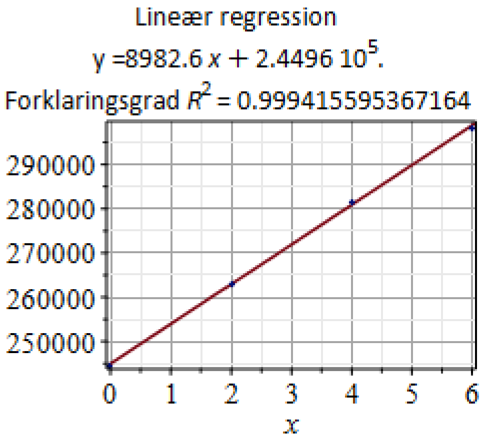
I Maple 2016 udføres lineære regression.

a) $with(Gym):$

Oplysningerne defineres.

$L1 := [0, 2, 4, 6]:; L2 := [244643, 263039, 281634, 298329]:$

$LinReg(L1, L2)$



Så man har fået bestemt tallene a og b til $a = 8982.6$ og $b = 2.4496 \cdot 10^5$. Derved er forskriften for f

$f(x) := 8982.6 \cdot x + 2.4496 \cdot 10^5$

b) Betydningen af tallet a er, at for hvert år der går, stiger antallet af familier med to personbiler med 8983.

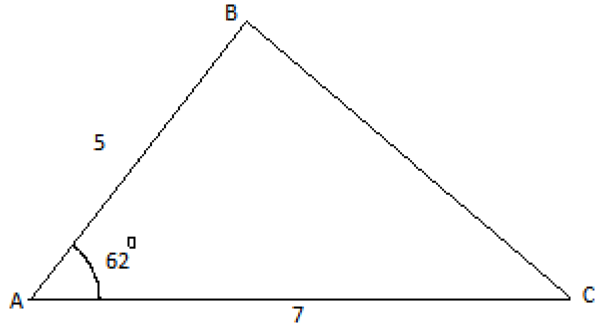
Differencen fra begyndelsespunktet 2007 og år 2020 er $2020 - 2007 = 13$
Så 13 indsættes i funktionens x-værdi.

$$f(13) = 8982.6 \cdot 13 + 2.4496 \cdot 10^5 = 361733.8$$

Så i år 2020 forventer man, at der er 361733.8 familier med to personbiler.

Opgave 9

Der tegnes en trekant over oplysningerne. Trekanten kan desuden se ud på mange forskellige måder samt størrelsesforholdene er formentlig ikke korrekte.



a) Her bestemmes længden af a med cosinusrelationerne.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(62^o)} = 6.41$$

Så ønskes vinkel C bestemt.

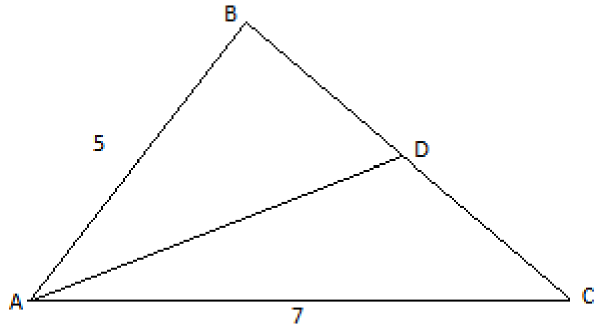
$$\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6.41^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6.41 \cdot 7}\right) = 43.5^o$$

b) Først bestemmes hele arealet af trekanten. Her bruges appelsin-formlen.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot 6.41 \cdot 7 \cdot \sin(43.5^o) = 15.45$$

Men da trekanten skal deles op i to lige store dele, har begge trekanterne arealet

$$T_{ABD} = 7.725, \qquad T_{ADC} = 7.725$$



Så ønsker man at kende $|AD|$. Det ses, at D er medianen, idet de to trekanter har samme areal, når trekanterne adskilles ved dette punkt. Man har derfor $|DC| = 3.205$, da den er halveret med den oprindelige $|BC|$. Her kan man anvende cosinusrelationerne til at finde $|AD|$

$$|AD| = \sqrt{|AC|^2 + |DC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |DC| \cdot \cos(C)}$$

Værdierne indsættes.

$$|AD| = \sqrt{7^2 + 3.205^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3.205 \cdot \cos(43.5^o)} = 5.169$$

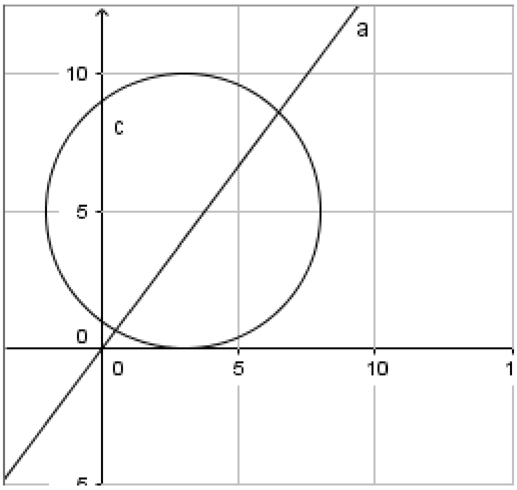
Som altså er længden af $|AD|$.

Opgave 10

En cirkel og en linje er givet. Lad ligningerne være givet

$$(x-3)^2+(y-5)^2=25, \qquad y=\frac{4}{3}x$$

Der laves en tegning i GeoGebra, så man ved hvad man kommer ud for.



a) For at finde skæringen til førsteaksen, skal andenaksen være 0. Man har så

$$(x-3)^2+(0-5)^2=25 \Leftrightarrow$$
$$x^2-6x+9+25=25 \Leftrightarrow$$
$$x^2-6x+9=0$$

Så har man en andengradsligning.

$$d=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9=0$$

Dvs. en rod. Så man har

$$x=-\frac{-6}{2\cdot 1}=3$$

Så cirklen tangerer førsteaksen i $x=3$.

b) Cirklen har to andre linjer, der er parallelle med linjen m. Linjen m omformes til ligningen $-\frac{4}{3}x+y+c=0$, her er linjen $y=\frac{4}{3}x \Leftrightarrow 0=\frac{4}{3}x-1y+c=0 \Leftrightarrow 0=-\frac{4}{3}x+y+c$

Her er c en konstant. Nu anvendes dist-formlen og så finder man den ukendte variabel, c.

$$dist(C,l)=6$$

Her er

$$\frac{|-\frac{4}{3}\cdot 3+1\cdot 5+c|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1^2}}=5$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$c=-\frac{28}{3} \quad \vee \quad c=\frac{22}{3}$$

Fortsættes næste side

Så man har altså de to tangenter til cirklen:

$$P_{tangent} = \frac{4}{3}x - \frac{22}{3}$$
$$Q_{tangent} = \frac{4}{3}x + \frac{28}{3}$$

Her gælder det nu om at finde koordinatsættet. Men først omformes den oprindelige linje til en ortogonal linje.

$$\frac{4}{3} \cdot c = -1 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{4}$$

Så har man sin hældningskoefficient. Derved anvender man centrum af cirklen.

$$y = -\frac{3}{4}x + b$$

Værdierne indsættes

$$5 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{29}{4}$$

Derved har man ligningen

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{29}{4}$$

Endelig kan man finde koordinatsættet. Der sætter man hhv. $y = P$ og $y = Q$. Disse løses lyn hurtigt i Maple:

$$-\frac{3}{4}x + \frac{29}{4} = \frac{4}{3}x - \frac{22}{3} \Leftrightarrow x = 7$$
$$-\frac{3}{4}x + \frac{29}{4} = \frac{4}{3}x + \frac{28}{3} \Leftrightarrow x = -1$$

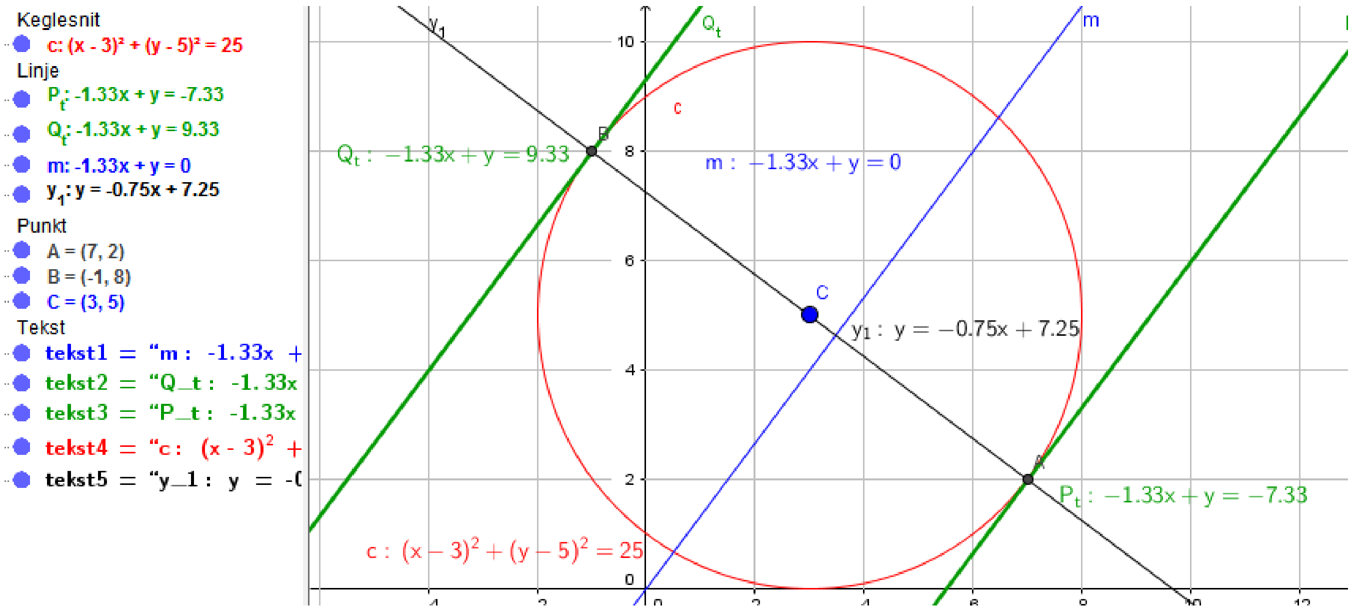
Endelig kan man finde sine y-koordinater

$$y = -\frac{3}{4} \cdot 7 + \frac{29}{4} \Leftrightarrow y = 2$$
$$y = -\frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{29}{4} \Leftrightarrow y = 8$$

Så koordinatsættet til tangenterne P og Q er

$$P = (7,2), \qquad Q = (-1,8)$$

Disse kunne findes på mange metoder. Dette er blot en af dem. Det hele visualiseres:



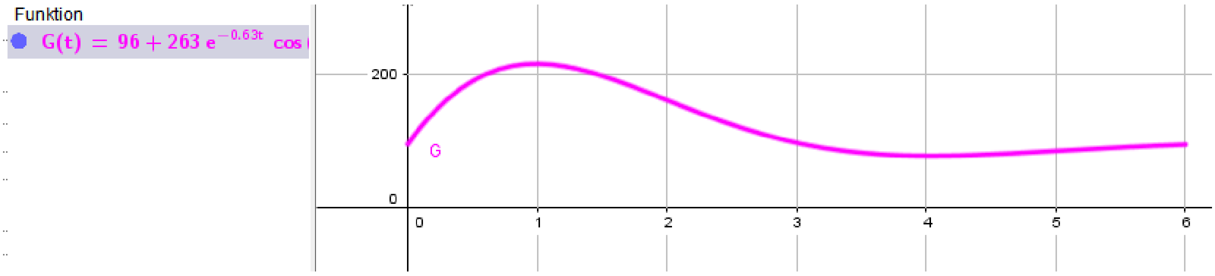
Fortsættes næste side

Opgave 11

Der er givet en model over glukosekoncentrationen.

$$G(t) = 96 + 263 \cdot \mathrm{e}^{-0.63 \cdot t} \cdot \cos(1.03 \cdot t - 1.57), \qquad 0 \leq t \leq 6$$

a) Der tegnes en skitse i GeoGebra.



Så findes der for glukosekoncentrationen efter 2 timer.

$$G(2) = 96 + 263 \cdot \mathrm{e}^{-0.63 \cdot 2} \cdot \cos(1.03 \cdot 2 - 1.57) = 161.823$$

Så efter to timer, er glukosekoncentrationen på $161.823 mg/dl$.

b) Først defineres funktionen.

$G(t) := 96 + 263 \cdot \mathrm{e}^{-0.63 \cdot t} \cdot \cos(1.03 \cdot t - 1.57)$

$t \to 96 + 263\, \mathrm{e}^{(-1) \cdot 0.63\, t} \cos(1.03\, t - 1.57)$

Den afledede tages.

$G'(t)$

$-165.69\, \mathrm{e}^{-0.63\, t} \cos(1.03\, t - 1.57) - 270.89\, \mathrm{e}^{-0.63\, t} \sin(1.03\, t - 1.57)$

Da modellen gælder i intervallet $0 \leq t \leq 6$ kan man anvende intervalsolve.

$\mathit{intervalsolve}(G'(t) = 0, t = 0\,..6)$

$[0.9913184260, 4.041408381]$

Så her er de punkter, der angiver maks. og min. Disse indsættes i $G(t)$.

$G(0.9913184260)$

216.1472412

$G(4.041408381)$

78.41297650

Så hermed fandt man de steder, hvor glukosekoncentrationen er hhv. højest og lavest.

Det ses, at der hvor koncentrationen er størst er efter 1 time, hvor koncentrationen er $216.14 mg/dl$. Der hvor koncentrationen er lavest er ca. 4 timer senere, hvor koncentrationen er $78.41 mg/dl$.

Fortsættes næste side

c) Man ønsker at finde ud af det sted, hvor funktionen aftager i det pågældende interval. Man fik nulpunkterne i b) og hermed kan man gøre prøve.

$G'(0.5)$

$$112.3322928$$

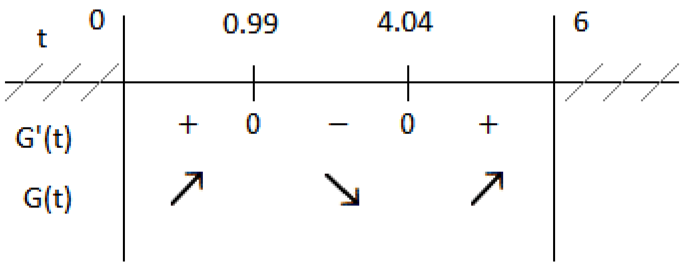
$G'(1.5)$

$$-61.74823302$$

$G'(5)$

$$11.35636074$$

Hermed kan man tegne en montonilinje:



Så konklusionen er, at $G(t)$:

$$er\ voksende\ i\ intervallet\ ]0;0.99]\ og\ [4.04;6[$$

$$er\ aftagende\ i\ intervallet\ [0.99;4.04]$$

Så det er i det aftagende interval, at glukosekoncentrationen falder.

Opgave 12

Der er givet en række oplysninger for en chi-anden-test.

a) Der opstilles en nulhypotese.

$$H_0 = Fordelingen\ forholder\ sig\ som\ angivet. Der\ er\ ikke\ valgfusk$$

Nu beregnes de forventede værdier på baggrund af $a = 4430$. De forventede værdier regnes ved at gange a med observerende.

Obs	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046
Forv	1333.43	779.68	553.75	429.71	349.97	296.81	256.94	225.93	203.78

Dette er de forventede værdier.

b) Her undersøges der for, om nulhypotesen skal forkastes. Derved har man sine observeret oplysninger og forventede oplysninger. Dermed udføres der $\chi^2 - test$.

Her anvendes formlen

$$\chi^2 = \frac{(O_k - F_k)^2}{F_k}$$

Værdierne indsættes.

Fortsættes næste side

$$\chi^2 = \frac{(1261-1333.43)^2}{1333.43} + \frac{(784-779.68)^2}{779.68} + \frac{(577-553.75)^2}{553.75} + \frac{(454-429.71)^2}{429.71} + \frac{(359-349.97)^2}{349.97} + \frac{(350-296.81)^2}{296.81} + \frac{(223-256.94)^2}{256.94} + \frac{(232-225.93)^2}{225.93} + \frac{(190-203.78)^2}{203.78}$$

$$\chi^2 = 21.650531484$$

Hermed har man sin teststørrelse. Desuden er der tale om et signifikansniveau på 5%, altså aflæser man den kritiske værdi. Her ses det, at den kritiske værdi er

$$Kritiskværdi = 15.51$$

Da teststørrelsen er større end den kritiske værdi, forkastes nulhypotesen. Der har tilsyneladende været valgfusk.

Opgave 13

Opgaven løses udelukkende i Maple 2016.

a) Først defineres alle oplysninger.

$A := \langle 10, 0, 0 \rangle :; B := \langle 0, 30, 0 \rangle :; C := \langle 0, 0, 20 \rangle :$

Der bestemmes en plan for α. Dette gøres ved at anvende punkterne ovenfor.

Hermed har man nye vektorer

$\overrightarrow{AC} := C - A :$

$\overrightarrow{AB} := B - A :$

Så kan man lave krydsprodukt af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Der er to måder:

$linalg[crossprod](\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$\begin{bmatrix} 600 & 200 & 300 \end{bmatrix}$$

Eller

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} 600 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Man får præcis det samme. Det er normalvektoren til planen. Der vælges et fast punkt, som i dette tilfælde er A.

$\alpha := 600(x-10)+200(y-0)+300(z-0)=0$

$$600\,x-6000+200\,y+300\,z=0$$

Som er planens ligning. Arealet af seglet bestemmes ud fra normalvektoren til planen α.

$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Her indsættes værdierne.

$T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{600^2+200^2+300^2}$

$$T=350$$

Så seglet er 350m^2

b) Der er nu givet to nye punkter, de defineres nedenfor:
local D : <- det er fordi D er beskyttet i Maple.
$D := \langle 6,-2,9\rangle :; E := \langle 7,-7,10\rangle :$

Man kan nu opstille en parameterfremstilling ved at trække E fra D, så man har en retningsvektor.

$DE := E - D :$
Så har man sin retningsvektor. Punktet D anvendes som fast punkt. Parameterfremstillingen er så

$l := \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = D + t\cdot DE$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+6 \\ -5\,t-2 \\ t+9 \end{bmatrix}$$

For at bestemme koordinatsættet til skudhullet, tager man parameterfremstillingen og indsætter i planens ligning.

$600((t+6)-10)+200((-5\,t-2)-0)+300((t+9)-0)=0$

$$-100\,t-100=0$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=-1]]$$

Så værdien $t := -1$: indsættes i parameterfremstillingen. Den er lige blevet defineret.

Fortsættes næste side

$$l := \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \mathrm{D} + t \cdot DE$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Så koordinatsættet til skudhullet er
$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 3, 8 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Opgave 14

Opgaven løses udelukkende i Maple 2016.

a) Først indskrives differentialligningen.

$$S'(t) = 1.2 - \frac{6 \cdot S(t)}{100 - 2 \cdot t}, S(0) = 0$$

$$\mathrm{D}(S)(t) = 1.2 - \frac{6\, S(t)}{100 - 2\, t}, S(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve DE}}$$

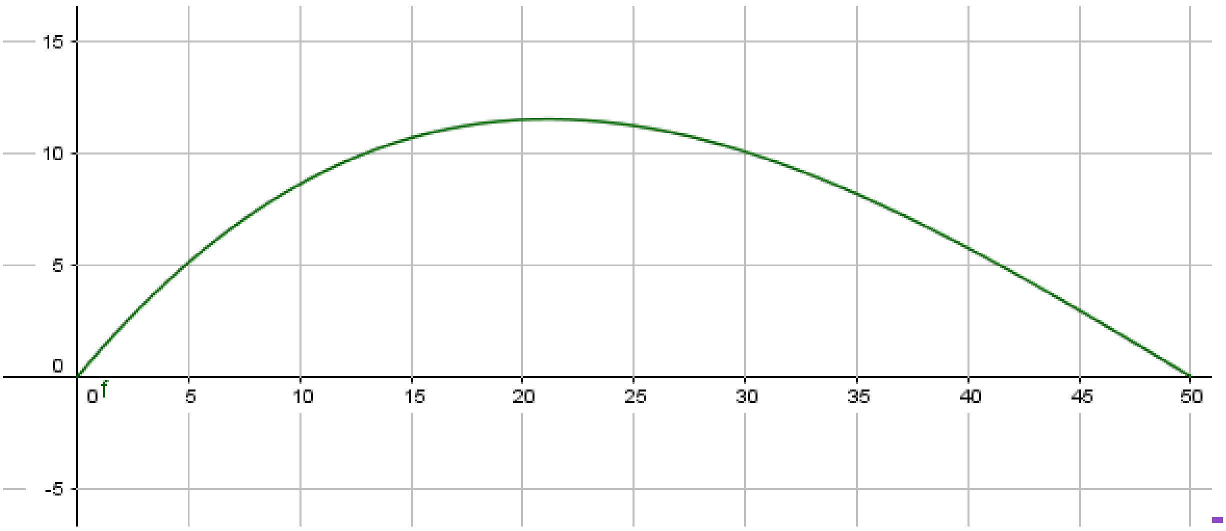
$$S(t) = 30 - \frac{3}{5}\, t + \frac{3}{12500}\, (-50 + t)^3$$

Så har man sin partikulære løsning. Den defineres.

$$S(t) := 30 - \frac{3}{5}\, t + \frac{3}{12500}\, (-50 + t)^3$$

$$t \rightarrow 30 - \frac{3}{5}\, t + \frac{3}{12500}\, (-50 + t)^3$$

Grafisk ser det således ud:



Fortsættes næste side

b) Der hvor der er mest salt i karet må være til tidspunktet *t*. Funktionen differentieres og løses mht. *t*. Her vil man finde ud af, hvornår der er mest salt i karet.

$S'(t) = 0$

$$-\frac{3}{5} + \frac{9}{12500}(-50+t)^2 = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = 50 + \frac{50}{3}\sqrt{3}\right], \left[t = 50 - \frac{50}{3}\sqrt{3}\right]\right]$$

Her approximeres værdierne

$t = 50 + \frac{50}{3}\sqrt{3}$

$$t = 50 + \frac{50}{3}\sqrt{3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$t = 78.869$$

$t = 50 - \frac{50}{3}\sqrt{3}$

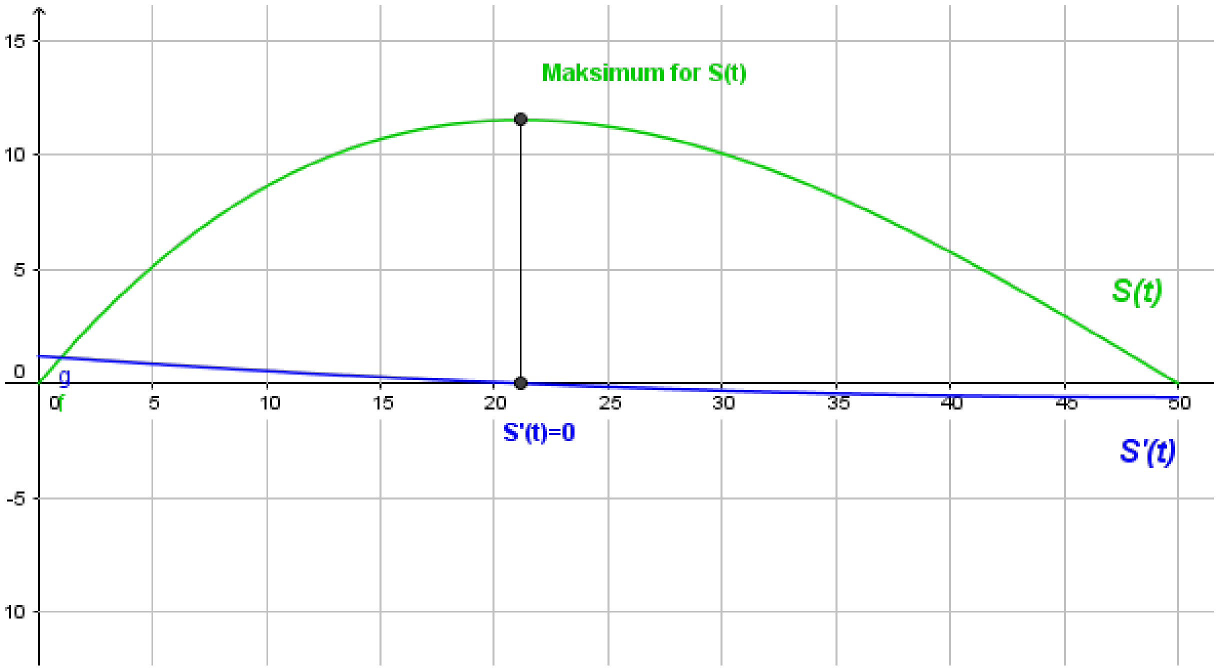
$$t = 50 - \frac{50}{3}\sqrt{3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$t = 21.131$$

Her forkastes den første værdi, idet grænsen er $0 \leq t < 50$. Så der hvor der er mest salt i badekaret er til tidspunktet $t = 21.131$.

Dette vises også grafisk

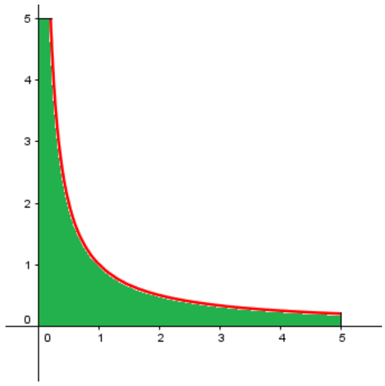


Fortsættes næste side

Opgave 15

Der er givet en funktion. Figuren tegnes.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



a) Arealet ønskes bestemt. Først kigges der på figuren. Det ses, at $y = 5$ er den øvre grænse samt $x = 5$ er den nedre grænse. Altså må det totale kvadrant være 25. Man kan bestemme arealet af det lille stykke firkant yderst til venstre ved at isolere x i gudtrykket:

$$5 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

Så har man det lille stykke af x samt højden af y, som er 5. Altså er arealet af hele stykket

$$A = 5 \cdot \frac{1}{5} + \int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{\frac{1}{5}}^{5} = \ln(5) - \left(\ln\left(\frac{1}{5}\right)\right) + 1 = 4.21887$$

Så dette er arealet af det grønne område.

b) Arealet for 360^o om førsteaksen bestemmes. Man kan se, at der dannes en cylinder, altså har man formlen

$$V_{cylinder} = h \cdot \pi \cdot r^2$$

Så har man

$$V_{f(x)} = V_{cylinder} + V_{areal\ området}$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h + \pi \cdot \int_{\frac{1}{5}}^{5} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{5} + \left[\pi \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_{\frac{1}{5}}^{5}$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - \left(\pi \cdot \left(-\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)\right) + 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{5} = 30.7876$$

Så volumen er 30.7876 når man drejer $f(x)$ 360^o om førsteaksen.