Matematik A, STX

25. maj 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Andengradsligningen løses

$$-2x^2 + 2x + 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)(x-3) = 0$$

Så løsningerne er $x = -2 \vee x = 3$.

Opgave 2:

a) Forholdet mellem trekanterne bestemmes.

$$k = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{10}{5} = 2$$

Linjestykket $|BC|$ bestemmes vha. Pythagoras.

$$|BC| = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Og dermed er linjestykket $|DE|$

$$|DE| = \frac{|BC|}{k} = \frac{6}{2} = 3$$

Opgave 3:

a) Grafen for $f(x)$ er en eksponentiel voksende funktion med b-værdi på 3 og a-værdi på 1.1, hvor der gælder, at $a > 1$, så er $f(x)$ voksende. Dermed er $f(x)$ graf for B.

Grafen for $g(x)$ er en aftagende eksponentiel funktion med b-værdi på 3 og a-værdi på 0.9, hvor der gælder, at $0 < a < 1$, så er $g(x)$ aftagende. Dermed er $g(x)$ graf for A.

Endelig er grafen for $h(x)$ en potensfunktion med a-værdi på 0.5 og b-værdi på 3, da a-værdien er 0.5, så svarer det til at man har $3\sqrt{x}$. Altså er C grafen for $h(x)$.

Opgave 4:

a) Her er b-værdien 70.4 og man får angivet vækstraten r, som er -1.5% p.a. Der er tale om en eksponentiel aftagende funktion (hvorfor?), så man har

$$a = 1 + r = 1 + \left(-\frac{1.5}{100}\right) = 0.985$$

Så en forskrift er

$$C(t) = 70.4 \cdot 0.985^t$$

Hvor $C(t)$ angiver den årlige CO_2 udledning, målt i mio. tons, og t angiver perioden, målt i år fra år 1990 til år 2015.

(obs. der står ikke man skal beskrive a og b, men $C(t)$ og t. Har du skrevet $f(x)$ og x, så er det også helt okay.)

Opgave 5:

a) Givet funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{x/3} - x - 3$ og differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3}$$

Først differentieres $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - 1$$

Her er dy/dx svarende til $f'(x)$ og y svarende til $f(x)$, så man får

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{x + \mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - x - 3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - 3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - \frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{3} - 1$$

Da begge sider er identiske, så er $f(x)$ en løsning til differentialligningen.

Opgave 6:

a) Givet integralet

$$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2 \, dx$$

Her faktoriseres 3 ud, så

$$3 \int \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2 \, dx$$

Lad $t = \ln(x)$, så er $dt = \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow dx = x \, dt$, sådan så

$$3 \int \frac{1}{x} \cdot t^2 \cdot x \, dt = 3 \int t^2 \, dt = 3 \cdot \frac{1}{3} t^3 + C = t^3 + C$$

Substituer tilbage, så

$$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2 \, dx = (\ln(x))^3 + C, \qquad x > 0$$

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7:

a)

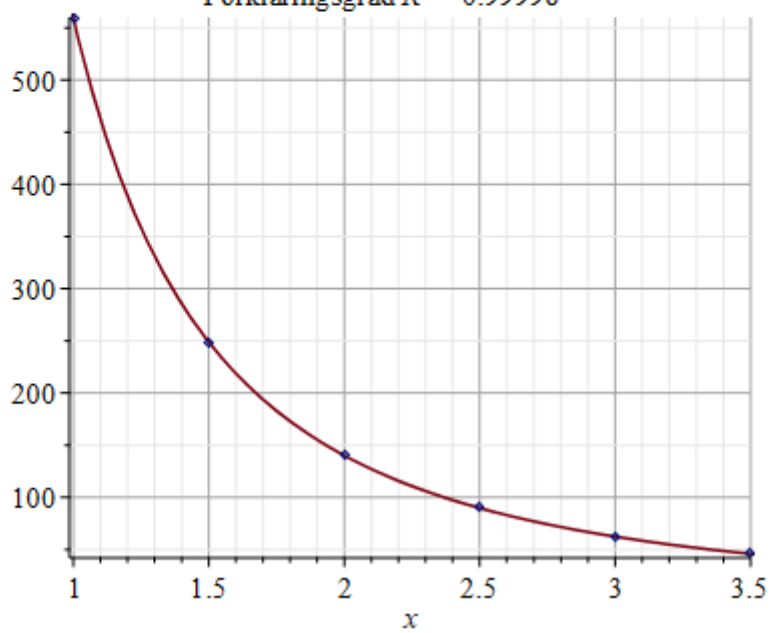
Alle oplysninger defineres, og da modellen er $f(x) = b \cdot x^a$, så er det en potensregression.

$P1 := [1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5]:$
$P2 := [560, 248, 140, 90, 62, 46]:$
$PowReg(P1, P2)$

Potens Regression

$$y = 558.85 \cdot \frac{1}{x^{1.9964}}$$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99998$



Så modellen er

$f(x) := 558.85 \cdot x^{-1.9964}$

$$f := x \mapsto \frac{558.85}{x^{1.9964}} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Hvor $a = -1.9964$ og $b = 558.85$ ifølge regressionen i Maple.

b)

Her løses ligningen

$f(x) = 5$

$$\frac{558.85}{x^{1.9964}} = 5 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 10.61718641]] \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

Afstanden fra lyskilden skal være 10.62 meter for, at lysintensiteten er $5 W/m^2$.

c)

Afstanden er x, og når afstanden øges med 40 %, så er $r_x = 0.4$, og dermed er r_y den ubekendte. Her er $a = -1.9964$, så

$r_y = \left((1+0.4)^{-1.9964} - 1\right) \cdot 100$

$$r_y = -48.91775337 \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

Så når afstanden til lyskilden øges med 40%, så falder lysintensiteten med 48.9%

Opgave 8:

a)

Vektorerne defineres.

$\vec{a} := \langle 2, -5 \rangle$:; $\vec{b} := \langle 3, 4 \rangle$:

Ligningen for l ønskes. Det vides, den er parallelt med $\vec{a}$, så man finder tværvektoren til $\vec{a}$, hvilket er

$\hat{a} := \langle -(-5), 2 \rangle$

$$\hat{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Så er linjens ligning med punktet P for l, givet ved

$5 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-3) = 0$

$$5x - 11 + 2y = 0 \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Som er parallelt med $\vec{a}$

b)

Man benytter sig af kommandoen

$proj(\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{bmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Eller udregner.

$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{len(\vec{b})^2} \cdot \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Opgave 9:

a)

Alle oplysninger defineres.

$B := 89 :; c := 58 :; a := 94 :$

Vinkel A bestemmes vha. cosinusrelationerne til en side, og dernæst vinkel, så først findes b.

$$b := \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot Cos(B)}$$

$$b := 109.5887721 \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

Og nu kan vinklen findes.

$$A := invCos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$

$$A := 59.05056101 \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

Så vinkel $A = 59.05^o$.

Arealet af trekanten er

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot Sin(A)$$

$$T = 2725.584816 \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

Så arealet er 2725.58

b)

Længden af medianen betegnes med m_a, så

$$m_a = \sqrt{c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot Cos(B)}$$

$$m_{94} = 74.01249542 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Som er den ønskede længde.

Opgave 10:

a)

Funktionen defineres.

$$f(x) := \left(x^2 + 5x + 500\right) \cdot \exp\left(-\frac{x}{100}\right)$$

$$f := x \mapsto \left(x^2 + 5x + 500\right) e^{-\frac{x}{100}} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Ligningen for tangenten i punktet $P(0, f(0))$ bestemmes. Da funktionen er defineret, så er tangentligningen

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$$y = 500 \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

Så tangentligningen er $y = 500$.

b)

Monotoniforholdene bestemmes. Først differentieres $f(x)$, og ligningen $f'(x) = 0$ løses.
$f'(x) = 0$

$$(2x+5)\,e^{-\frac{x}{100}} - \frac{\left(x^2+5x+500\right)e^{-\frac{x}{100}}}{100} = 0 \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0],[x=195]] \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

Den anden afledede udregnes.
$f''(x)$

$$2\,e^{-\frac{x}{100}} - \frac{(2x+5)\,e^{-\frac{x}{100}}}{50} + \frac{\left(x^2+5x+500\right)e^{-\frac{x}{100}}}{10000} \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

Når $f''(x_0) < 0$, så er der lokalt maksimum i x_0
Når $f''(x_0) > 0$, så er der lokalt minimum i x_0.

Så løsningerne fra $f'(x) = 0$ benyttes.
$f''(0)$

$$\frac{39}{20} \qquad \textbf{(4.2.4)}$$

evalf[5]((**4.2.4**))

$$1.9500 \qquad \textbf{(4.2.5)}$$

$f''(195)$

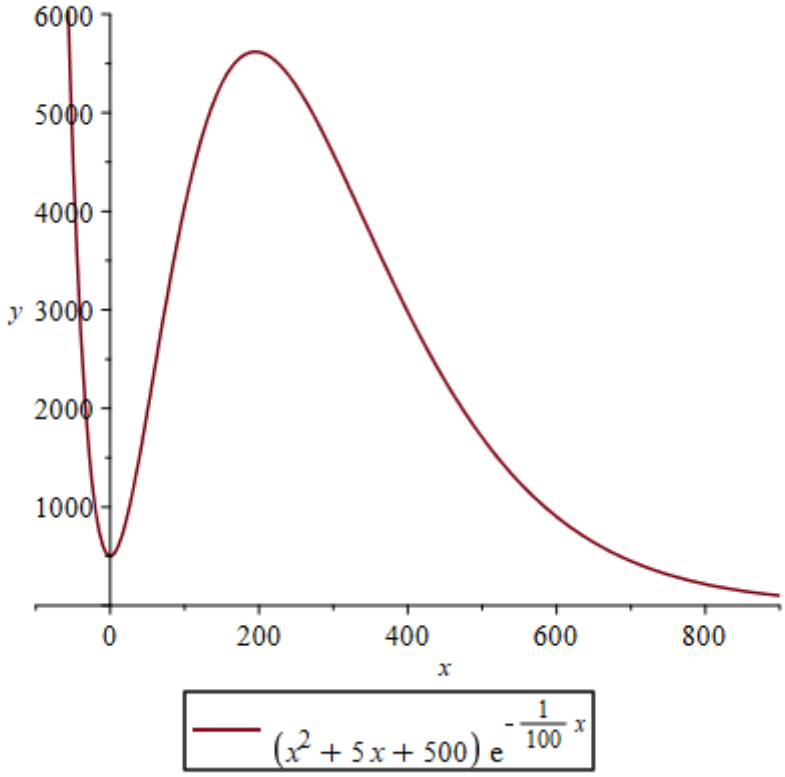
$$-\frac{39\,e^{-\frac{39}{20}}}{20} \qquad \textbf{(4.2.6)}$$

evalf[5]((**4.2.6**))

$$-0.27743 \qquad \textbf{(4.2.7)}$$

Så man ser, at ved $x = 0$ er der lokalt minimum og ved $x = 195$ er der lokalt maksimum.
Dermed er funktionen $f(x)$
- aftagende i intervallet $]\infty; 0]$ og $[195; \infty[$
- voksende i intervallet $[0; 195]$.

En tegning over grafen laves i Maple.
$plot(f(x), x=-100..900, y=0..6000, legend=[f(x)])$



Som er en passende størrelse.

Opgave 11:

a)

Modellen defineres.

$$c(x) := \frac{12500\cdot x - 2500\cdot x^2}{150+7.8^x} + 90$$

$$c := x \mapsto \frac{-2500\,x^2 + 12500\,x}{150+7.8^x} + 90 \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

Hvor $0 \le x \le 7$. Når der søges efter den maksimale koncentration, så løses ligningen $c'(x) = 0$, så
$c'(x) = 0$

$$\frac{-5000\,x + 12500}{150+7.8^x} - \frac{2.054123734\,(-2500\,x^2+12500\,x)\,7.8^x}{(150+7.8^x)^2} = 0 \qquad \textbf{(5.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$1.619547144 \qquad \textbf{(5.1.3)}$$

Ligningen blev løst numerisk. Man får $x = 1.62$. Dette eftertjekkes
c''(**(5.1.3)**)

$$-78.95967092 \qquad \textbf{(5.1.4)}$$

Som er mindre end 0, altså er $x = 1.62$ det tidspunkt, hvor koncentrationen er maksimal, så konklusionen er, at efter 1.62 timer er glukosekoncentrationen maksimal.

b)

Man løser ligningen
$c(x) = 130$

$$\frac{-2500\,x^2 + 12500\,x}{150 + 7.8^x} + 90 = 130 \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

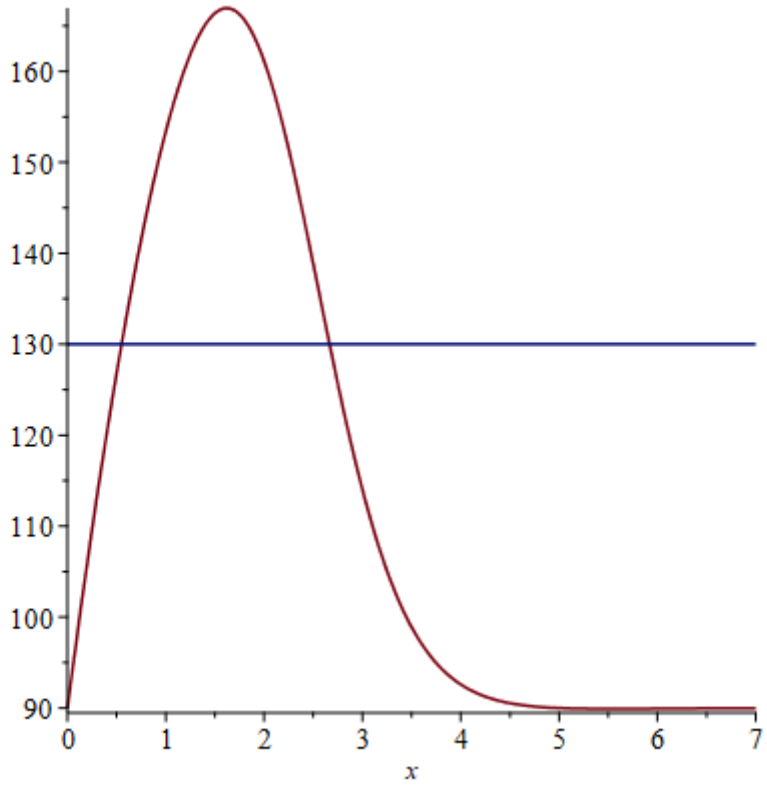
$intervalsolve(c(x) = 130, x = 0\,..7)$

$$[0.5505316428, 2.665889157] \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

Så man har
$\Delta x = 2.665889157 - 0.5505316428$

$$\Delta x = 2.115357514 \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

Dvs. tiden hvor glukosekoncentrationen ligger over $130 mg/dl$ er 2.12 timer. (se tegning).
$d(x) := 130:$
$plot([c(x), d(x)], x = 0\,..7)$



Så det er den tid gældende over den blå linje der spørges om.

Opgave 12:

a)

Tredjegradspolynomiet defineres.

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 32$

$$f := x \mapsto x^3 - 6x^2 + 32 \quad \textbf{(6.1.1)}$$

Man ser, at M er fra 0 til 4, så man får

$V_M = \text{Pi} \cdot \int_0^4 (f(x))^2 \, dx$

$$V_M = \frac{53248\,\pi}{35} \quad \textbf{(6.1.2)}$$

$evalf[5](\%)$

$$V_M = 4779.6 \quad \textbf{(6.1.3)}$$

Dvs. volumen er $V_M = 4779.6$.

b)

Arealet af M og N bestemmes.

$M = \int_0^4 f(x) \, dx$

$$M = 64 \quad \textbf{(6.2.1)}$$

Arealet af N bestemmes, så man parallelforskyder grafen, sådan så man får funktionen

$f_1(x) := x^3 - 6x^2$

$$f_1 := x \mapsto x^3 - 6x^2 \quad \textbf{(6.2.2)}$$

Løser ligningen

$f_1(x) = 0$

$$x^3 - 6x^2 = 0 \quad \textbf{(6.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 6], [x = 0], [x = 0]] \quad \textbf{(6.2.4)}$$

Så får man

$N = \left| \int_0^6 f_1(x) \, dx \right|$

$$N = 108 \quad \textbf{(6.2.5)}$$

Forholdet bestemmes.

$\frac{M}{N} = \frac{64}{108}$

$$\frac{M}{N} = \frac{16}{27} \quad \textbf{(6.2.6)}$$

$evalf[5](\%)$

$$\frac{M}{N} = 0.59259 \quad \textbf{(6.2.7)}$$

Opgave 13:

a) A

Nulhypotese:
H_0 : Der er ingen sammenhæng mellem kolde fødder og symptomer på forkølelse.

De forventede værdier udregnes ved formlen:

$$forventet = \frac{Lodret\ sum \cdot Vandret\ sum}{Sum\ total}.$$

Altså er

$$forventet_{afkølede,\ forkølelse} = \frac{18 \cdot 90}{180}$$

$$forventet_{afkølede,\ forkølelse} = 9 \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

$$forventet_{ikke\ afkølede,\ forkølelse} = \frac{18 \cdot 90}{180}$$

$$forventet_{ikke\ afkølede,\ forkølelse} = 9 \qquad \textbf{(7.1.2)}$$

$$forventet_{afkølede,\ ingen\ forkølelse} = \frac{162 \cdot 90}{180}$$

$$forventet_{afkølede,\ ingen\ forkølelse} = 81 \qquad \textbf{(7.1.3)}$$

$$forventet_{ikke\ afkølede,\ ingen\ forkølelse} = \frac{162 \cdot 90}{180}$$

$$forventet_{ikke\ afkølede,\ ingen\ forkølelse} = 81 \qquad \textbf{(7.1.4)}$$

Så tabellen er

Forventet	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	9	81	90
Ikke afkølede fødder	9	81	90
Sum	18	162	180

b)

Fra de observerende værdier ved man, at der var 13 personer som faktisk blev forkølet og havde kolde fødder, så

Observerende (manglende)	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	13	y	90
Ikke afkølede fødder	x	z	90
Sum	18	162	180

Så kan man finde de andre observerende værdier ved at løse følgende ligninger:

$13 + x = 18$

$$13 + x = 18 \qquad \textbf{(7.2.1)}$$

$13 + y = 90$

$$13 + y = 90 \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

$y + z = 162$

$$y + z = 162 \qquad \textbf{(7.2.3)}$$

$solve(\{13 + x = 18, 13 + y = 90, y + z = 162\})$

$$\{x = 5, y = 77, z = 85\} \qquad \textbf{(7.2.4)}$$

Så har man de observerende værdier.

Observerende	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	13	77	90
Ikke afkølede fødder	5	85	90
Sum	18	162	180

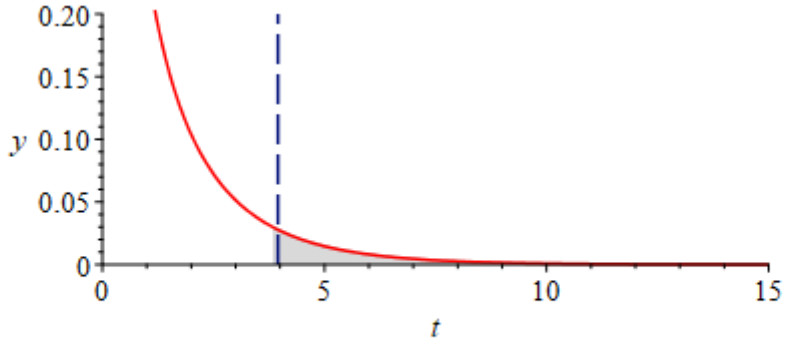
Og en matrix defineres.

$$obs := \begin{bmatrix} 13 & 77 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}:$$

Der benyttes en uafhængighedstest.

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 3.9506
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.046854



Da p-værdien er 0.04685<0.05, så er nulhypotesen falsk, og dermed skal den forkastes. Der er altså en sammenhæng mellem forkølelse og kolde fødder.

(Man kan faktisk vise de forventede værdier ud fra de fundne observerende værdier)

$forventet(obs)$

$$\begin{bmatrix} 9. & 81. \\ 9. & 81. \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.2.5)}$$

Opgave 14:

a)

Differentialliningen med betingelserne løses.

$V'(t) = \frac{1}{7700} \cdot (\mathrm{D} - 40 \cdot V(t))$

$$\mathrm{D}(V)(t) = \frac{\mathrm{D}}{7700} - \frac{2\,V(t)}{385} \qquad \textbf{(8.1.1)}$$

Her er D = 2800 og $V(0) = 95$, så $t = 0$. Man får:

$dsolve\left(\left\{V'(t) = \frac{1}{7700} \cdot (2800 - 40 \cdot V(t)),\ V(0) = 95\right\},\ V(t)\right)$

$$V(t) = 70 + 25\,e^{-\frac{2\,t}{385}} \qquad \textbf{(8.1.2)}$$

Forskriften defineres.

$V(t) := 70 + 25\,e^{-\frac{2\,t}{385}}$

$$V := t \mapsto 70 + 25\,e^{-\frac{2\,t}{385}} \qquad \textbf{(8.1.3)}$$

Lad $t = 45$, så

$V(45)$

$$70 + 25\,e^{-\frac{18}{77}} \qquad \textbf{(8.1.4)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$89.788 \qquad \textbf{(8.1.5)}$$

Så efter 45 dage er personens vægt 89.788kg.

b)

restart

Start: 100kg, slut: 95kg, og $t = 90$, så

$$dsolve\left(\left\{V'(t) = \frac{1}{7700}\cdot(\mathrm{D} - 40\cdot V(t)),\ V(0) = 100\right\},\ V(t)\right)$$

$$V(t) = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2t}{385}}\left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right) \qquad \textbf{(8.2.1)}$$

$$95 = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2\cdot 90}{385}}\left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right)$$

$$95 = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{36}{77}}\left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right) \qquad \textbf{(8.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for D}}$

$$\left[\left[\mathrm{D} = \frac{200\left(20\,e^{-\frac{36}{77}} - 19\right)}{e^{-\frac{36}{77}} - 1}\right]\right] \qquad \textbf{(8.2.3)}$$

evalf[5](%)

$$[[\mathrm{D} = 3464.4]] \qquad \textbf{(8.2.4)}$$

Så personens daglige energiindtag skal være 3464.4*kcal*

Opgave 15:

a)

Alle punkter defineres.

$A := [0, 3, 3]$:; $B := [1, 4, 0]$:; $C := [6, 0, 3]$:

Man kan gøre dette på mange måder, men for bedst indlæring viser vi, hvordan man kan opstille en ligning for planen.

Opstil to vektorer.

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A\rangle$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.1.1)}$$

$\overrightarrow{AC} := \langle C - A\rangle$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.1.2)}$$

Krydsprodukt.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -9 \end{bmatrix} \tag{9.1.3}$$

Og benyt planens ligning samt et fast punkt, evt. punkt A.

$-9 \cdot (x - 0) - 18 \cdot (y - 3) - 9 \cdot (z - 3) = 0$

$$-9x - 18y + 81 - 9z = 0 \tag{9.1.4}$$

$$\frac{-9x - 18y + 81 - 9z}{-9} = \frac{0}{-9}$$

$$x + 2y - 9 + z = 0 \tag{9.1.5}$$

$x + 2y - 9 + z + 9 = 0 + 9$

$$x + 2y + z = 9 \tag{9.1.6}$$

Så dermed passer den angivende ligning for planen. Alternativt kunne man indsætte punkterne i ligningen.

A:

$0 + 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$$9 = 9 \tag{9.1.7}$$

B:

$1 + 2 \cdot 4 + 0 = 9$

$$9 = 9 \tag{9.1.8}$$

C:

$6 + 2 \cdot 0 + 3 = 9$

$$9 = 9 \tag{9.1.9}$$

b)

Man anvender planens ligning.

$x + 2y + z = 9$

Og parameterfremstillingen. Her er

$x = 3 \cdot k \cdot t$

$y = 3 + t$

$z = 3 - k \cdot t$

Og dermed er planens ligning med parameterfremstillingen indsat:

$(3 \cdot k \cdot t) + 2 \cdot (3 + t) + (3 - k \cdot t) = 9$

$$2tk + 2t + 9 = 9 \tag{9.2.1}$$

Og ligningen løses for k

$2tk + 2t + 9 = 9$

$$2tk + 2t + 9 = 9 \tag{9.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = -1]] \tag{9.2.3}$$

Så hvis $k = -1$, så ligger l i planen α

Matematik A, STX

30. maj 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Førstegradsligningen løses.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 3\right) + 1 = 5x - 2 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow$$
$$x - 6 + 1 = 5x - 2x - 2 \Leftrightarrow$$
$$x - 5 = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$-3 = 2x \Leftrightarrow$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

Opgave 2:

a) Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ skal være ortgonale, så skal $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dvs. man får ligningen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 3 + t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot t + 4 \cdot (3 + t) = 0 \Leftrightarrow 2t + 12 + 4t = 0 \Leftrightarrow$$
$$6t + 12 = 0 \Leftrightarrow 6t = -12 \Leftrightarrow t = -2$$

Så når $t = -2$ er vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ortogonale.

Opgave 3:

a) Funktionen differentieres.

$$f'(x) = x^2 + 2x$$

Andengradsligningen $f'(x) = 0$ løses vha. nulreglen.

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Den anden afledede udregnes.

$$f''(x) = 2x + 2$$

Heri indsættes $x = -2$ og $x = 0$, så

$$f''(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2$$
$$f''(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

Så da $f''(-2) < 0$, så der lokalt maksimum og da $f''(0) > 0$, så er der lokalt minimum. Dermed er

- $f(x)$ voksende i intervallet $]-\infty; -2]$ og voksende i intervallet $[0; \infty[$
- $f(x)$ aftagende i intervallet $[-2; 0]$.

Opgave 4:

a) Alle tre funktioner er af typen $ax^2 + bx + c$.

For $f(x)$ er: $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$ og $d > 0$. Den eneste graf der opfylder dette er B.

For $g(x)$ er $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ og $d < 0$. Den eneste graf der opfylder dette er A.

For $h(x)$ er $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ og $d < 0$. Den eneste graf der opfylder dette er C.

Opgave 5:

a) Først bestemmes længden $|DE|$.

$$|DE| = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45}$$

Hvilket er den samme længde som $|AF|$. Længden $|EF| = |AD|$ hvor $|AD| = |AC| - |DC| = 10 - 6 = 4$, så $|FE| = 4$. Forholdet mellem trekanten CDE og BEF bestemmes.

$$k = \frac{|DC|}{|FE|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Da $|DE| = \sqrt{45}$, så er

$$|BF| = \frac{|DE|}{k} = \frac{\sqrt{45}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{45}}{3}$$

Så $|BE|$ kan endelig bestemmes.

$$|BE| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{45}}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{20 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Opgave 6:

a) Stamfunktionen bestemmes.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (ax^2 + 2x - 4)\,dx = \frac{ax^3}{3} + x^2 - 4x + k$$

Benyttes punktet P, kan k alene findes, da a forsvinder.

$$\frac{a \cdot 0^3}{3} + 0^2 - 4 \cdot 0 + k = 4 \Leftrightarrow k = 4$$

Endelig kan a bestemmes vha. Q, når $k = 4$.

$$\frac{a \cdot 1^3}{3} + 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + 1 = 3 \Leftrightarrow a + 3 = 9 \Leftrightarrow a = 6$$

Så den partikulære stamfunktion er

$$F(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 4$$

Som gennemløber P og Q.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7:

a)

Alle oplysninger defineres, og da modellen er $f(x) = b \cdot a^x$, så er det en eksponentielregression.

$E1 := [0, 10, 20, 30, 40, 45]:$
$E2 := [111, 264, 364, 559, 1326, 1613]:$
$f(x) := ExpReg(E1, E2, x):$
$evalf[5](f(x))$

$$120.84\ 1.0590^x \tag{10.1.1}$$

Hvor $a = 1.059$ og $b = 120.84$ ifølge regressionen i Maple.

b)

Tallet a er fremskrivningsfaktoren.
$a = 1 + r$, hvor $r = a - 1$. Dvs.
$r = 1.0590 - 1$

$$r = 0.0590 \tag{10.2.1}$$

I procent er det 5.9%, så for hvert år der går, stiger BNP pr. indbygger med 5.9% ifølge modellen.

Fordoblingstiden er

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.059)}$$

$$T_2 = 17.44437571 \ln(2) \tag{10.2.2}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$T_2 = 12.091 \tag{10.2.3}$$

Dvs. hvert 12.1 år fordobles BNP pr. indbyggere ifølge modellen.

c)

Man løser ligningen
$f(x) = 2000$

$$120.847008781140\ 1.05903848331423^x = 2000 \tag{10.3.1}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 48.92448314]] \tag{10.3.2}$$

Dvs.
$1970 + 48.92$

$$2018.92 \tag{10.3.3}$$

Dvs. i år 2019 vil BNP overstige 2000USD ifølge modellen.

Opgave 8:

a)

Man benytter sig af cirklens ligning, som er
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Har man C og P, så kan man finde r.
$(9-5)^2+(3-4)^2=r^2$

$$17=r^2 \qquad \textbf{(11.1.1)}$$

Så $r^2=17$. Endelig er ligningen for cirklen så
$(x-5)^2+(y-4)^2=17$

$$(x-5)^2+(y-4)^2=17 \qquad \textbf{(11.1.2)}$$

b)

Man bestemmer en vektor
$\overrightarrow{PC} := \langle 5,4\rangle - \langle 9,3\rangle$

$$\overrightarrow{PC} := \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11.2.1)}$$

Da denne vektor vil stå vinkelret på punktet P, udnyttes P og den rette linje.
$-4\cdot(x-9)+1\cdot(y-3)=0$

$$-4x+33+y=0 \qquad \textbf{(11.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for y}}$

$$[[y=4x-33]] \qquad \textbf{(11.2.3)}$$

Så dermed er tangentligningen t til cirklen fundet.

c)

Da vektoren $\overrightarrow{PC}$ blev fundet til at være

$\overrightarrow{PC}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.1}$$

Så er det afstanden fra P til C. Multipliceres tallet med 2, så fås den fra P til det røringspunkt for tangenten der er parallelt med t, kald den t_2, så

$2 \cdot \overrightarrow{PC}$

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{11.3.2}$$

Det betyder så at man har koordinatsættet for røringspunktet til tangenten t_2, der er parallelt med t

$Q = [9 - 8, 3 + 2]$

$$Q = [1, 5] \tag{11.3.3}$$

Alternativt kunne man finde tværvektoren til $\overrightarrow{PC}$, så

$\widehat{PC} := \langle -1, -4 \rangle$

$$\widehat{PC} := \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{11.3.4}$$

Så kan man opstille en linje, dvs.

$-1 \cdot (x - 9) - 4 \cdot (y - 3) = 0$

$$-x + 21 - 4y = 0 \tag{11.3.5}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for y}}$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{21}{4} \tag{11.3.6}$$

Indsætter man denne i cirklens ligning og løser for x fås

$(x - 5)^2 + \left(\left(-\frac{x}{4} + \frac{21}{4}\right) - 4\right)^2 = 17$

$$(x - 5)^2 + \left(-\frac{x}{4} + \frac{5}{4}\right)^2 = 17 \tag{11.3.7}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 9], [x = 1]] \tag{11.3.8}$$

Og dermed har man fået to x-værdier. Den ene er kendt fra P, så er den anden for Q. Dvs. $x = 1$ er førstekoordinaten for Q. Andenkoordinaten findes nemt ved at indsætte $x = 1$ i linjen nedenfor:

$y = -\frac{1}{4} + \frac{21}{4}$

$$y = 5 \tag{11.3.9}$$

Dermed er koordinatsættet.

$Q = [1, 5]$

$$Q = [1, 5] \tag{11.3.10}$$

Opgave 9:

a)

Modellen defineres.

$T(x) := 15 \cdot \sin(0.0172 \cdot x - 1.5) + 8$

$$T := x \mapsto 15 \sin(0.0172\, x - 1.5) + 8 \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

Man ved, at sinus har størsteværdi ved 1, og mindsteværdi ved -1, dermed er

$Størsteværdi = 15 \cdot 1 + 8$

$$Størsteværdi = 23 \qquad \textbf{(12.1.2)}$$

Den største temperatur vil være $23^{o}C$ dvs. den varmeste temperatur på døgnet. Typisk i slutningen af juni.

$Mindsteværdi = 15 \cdot (-1) + 8$

$$Mindsteværdi = -7 \qquad \textbf{(12.1.3)}$$

Den mindste temperatur vil være $-7^{o}C$ dvs. den koldeste temperatur på døgnet. Typisk i slutningen af december.

Alternativt:

$intervalsolve(T(x) = 0, x = 0..365)$

$$[178.5346702, 361.1854058] \qquad \textbf{(12.1.4)}$$

$T(178.5346702)$

$$23. \qquad \textbf{(12.1.5)}$$

$T(361.1854058)$

$$-7. \qquad \textbf{(12.1.6)}$$

Opgave 10:

a)

Nulhypotese: Læsehastigheden er forblevet uændret efter læseforløbet.
De forventede værdier bestemmes. Man har at summen af eleverne er 150.

Type:	Læsehastighed	<80 ord/min	80-110 ord/min
-	Antal elever i %	9.2 %	31.0 %
Observerende	Antal elever	9	41
Forventede	Antal elever	$\frac{9.2}{100}\cdot 150$ 13.80000000 **(13.1.1)**	$\frac{31.0}{100}\cdot 150$ 46.50000000 **(13.1.2)**

110-140 ord/min	140-170 ord/min	>170 ord/min
41.3 %	15.1 %	3.4 %
62	26	12
$\frac{41.3}{100}\cdot 150$ 61.95000000 **(13.1.3)**	$\frac{15.1}{100}\cdot 150$ 22.65000000 **(13.1.4)**	$\frac{3.4}{100}\cdot 150$ 5.100000000 **(13.1.5)**

b)

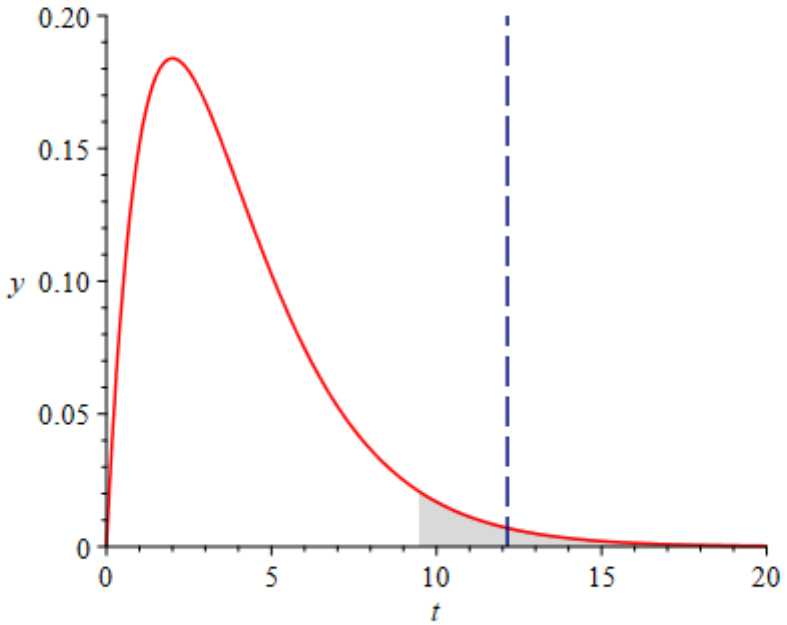
De observerende værdier defineres som *obs* og de forventede værdier defineres som *forv*.

$obs := [9, 41, 62, 26, 12] :; forv := [13.8, 46.5, 61.95, 22.65, 5.1] :$

Der benyttes GOF-test.

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 12.151
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.016264



Da *p*-værdien er mindre end 5%, så betyder det, at hypotesen skal forkastes... Eleverne har altså forbedret sig ifølge testen.

Opgave 11:

a)

Modellen defineres.

$$N(t) := \frac{20414}{1 + 6.325 \cdot \exp(-0.378 \cdot t)} + 54349$$

$$N := t \mapsto \frac{20414}{1 + 6.325\, e^{-0.378\, t}} + 54349 \qquad \textbf{(14.1.1)}$$

Modellen gælder fra år 2014. År 2020 svarer til $t = 6$, så

$N(6)$

$$66685.54899 \qquad \textbf{(14.1.2)}$$

Dvs. ifølge modellen vil man i år 2020 have 66686 fødsler i Danmark.

b)

$t = 4$ svarer til år 2018.
$N'(4)$

$$1876.768038 \qquad \textbf{(14.2.1)}$$

Dvs. i år 2018 vil der for hvert år der går vokse med 1877 fødsler pr. år i Danmark ifølge modellen.

Opgave 12:

a)

Funktionen defineres.
$f(x) := -x^2 + 4x$

$$f := x \mapsto -x^2 + 4x \qquad \textbf{(15.1.1)}$$

Man løser ligningen
$f(x) = 0$

$$-x^2 + 4x = 0 \qquad \textbf{(15.1.2)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 0], [x = 4]] \qquad \textbf{(15.1.3)}$$

Arealet af M er

$$M = \int_0^4 f(x)\,dx$$

$$M = \frac{32}{3} \qquad \textbf{(15.1.4)}$$

b)

Funktionen
$g(x) := x \cdot k$

$$g := x \mapsto x\,k \tag{15.2.1}$$

Hvor $0 < k < 4$.

Først løser man ligningerne for x:
$f(x) = g(x)$

$$-x^2 + 4\,x = x\,k \tag{15.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = -k + 4]] \tag{15.2.3}$$

Man bruger dernæst indskudsreglen, og husker, at arealerne skal være lige store.

$$\int_0^{-k+4} g(x)\,dx + \int_{-k+4}^{4} f(x)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$\frac{k(-k+4)^2}{2} + \frac{32}{3} + \frac{(-k+4)^3}{3} - 2\,(-k+4)^2 = \frac{16}{3} \tag{15.2.4}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = -2\,2^{2/3} + 4], [k = \cancel{2^{2/3} - I\sqrt{3}\,2^{2/3} + 4}], [k = \cancel{2^{2/3} + I\sqrt{3}\,2^{2/3} + 4}]] \tag{15.2.5}$$

evalf[5](%)

$$[[k = 0.8252], [k = \cancel{5.5874 - 2.7495\,I}], [k = \cancel{5.5874 + 2.7495\,I}]] \tag{15.2.6}$$

Dvs. $k = 0.8252$ er den søgte værdi.

Opgave 13:

a)

Det er brugbart, at man ved at l går igennem centrum og står vinkelret på planen.
Kald centrum i kuglen for C, som har koordinaterne $C(3,-4,2)$.
Planen har en normalvektor, som er vinkelret på planen.
$\vec{n}_\alpha = \langle 2,-2,1\rangle$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16.1.1)}$$

Dermed kan man opstille en parameterfremstilling for l, så

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2t \\ -4-2t \\ 2+t \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16.1.2)}$$

Indsætter man parameterfremstillingen i kuglens ligning fås

$$((3+2t)-3)^2 + ((-4-2t)+4)^2 + ((2+t)-2)^2 = 9$$

$$9t^2 = 9 \qquad \textbf{(16.1.3)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$[[t=1],[t=-1]] \qquad \textbf{(16.1.4)}$$

Disse værdier giver følgende koordinatsæt hhv. P og Q.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16.1.5)}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16.1.6)}$$

b)

Punktet der er tættest på planen er P, dvs.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16.2.1)}$$

Afstanden bestemmes vha. dist formlen.

$$dist(P, \alpha) = \frac{|2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-6) + 1 \cdot 3 + (-30)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$dist(P, \alpha) = \frac{5}{3} \qquad \textbf{(16.2.2)}$$

Der er den korteste afstand.

Opgave 14:

a)

Vi går ud fra, at toppen ikke er en del af modellen. Dermed er støttepunkterne $A = (0, 3)$ og $B = (11, 5)$. Der løses to ligninger med to ubekendte.

$solve(\{3 = a \cdot 0 + b, 5 = a \cdot 11 + b\})$

$$\left\{a = \frac{2}{11}, b = 3\right\} \qquad \textbf{(17.1.1)}$$

Dermed er

$$f(x) := \frac{2}{11} \cdot x + 3$$

$$f := x \mapsto \frac{2x}{11} + 3 \qquad \textbf{(17.1.2)}$$

b)

Bunden er ved $x = 0$, og når højden øges med 8cm, så er $x = 8$. Man får integralet

$$V = \text{Pi} \cdot \int_0^8 (f(x))^2 \, dx$$

$$V = \frac{40856\pi}{363} \qquad \textbf{(17.2.1)}$$

$evalf[5](\%)$

$$V = 353.59 \qquad \textbf{(17.2.2)}$$

Dvs. der er $353.59 cm^3$ kaffe i bægeret. Man kan også bare bruge formlen for en keglestubbe hvis man vil det.

Opgave 15:

a)

Man benytter *dsolve*.

$$dsolve\left(\left\{C'(t) = 2\cdot t\cdot \frac{30 - C(t)}{30}, C(0) = 0\right\}, C(t)\right)$$

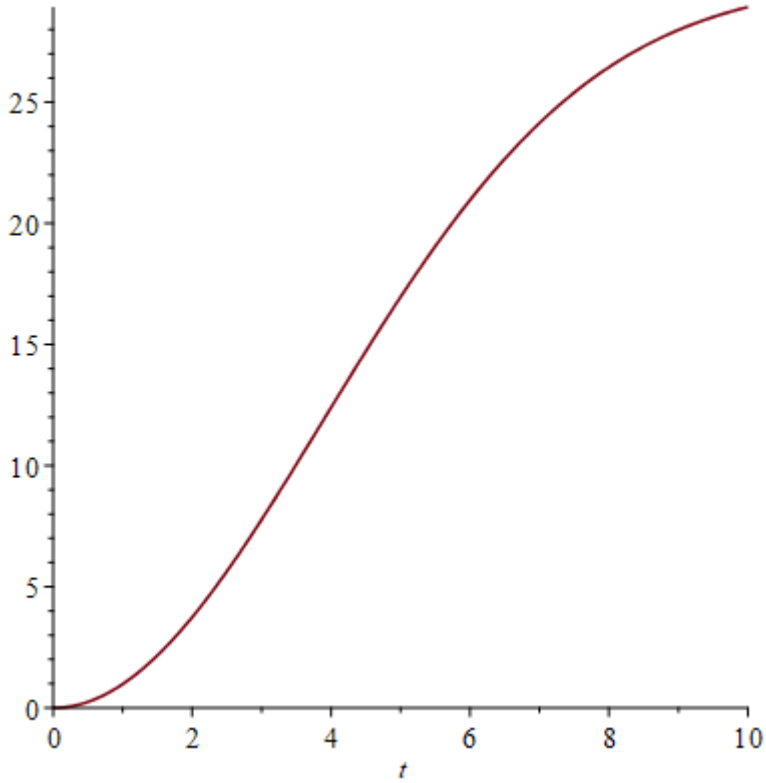
$$C(t) = 30 - 30\,e^{-\frac{t^2}{30}} \qquad \textbf{(18.1.1)}$$

Funktionen defineres.

$$C(t) := 30 - 30\,e^{-\frac{t^2}{30}} :$$

og tegnes

$plot(C(t), t = 0..10)$



b)

Man løser ligningen
$C'(t) = 0$

$$2\,t\,e^{-\frac{t^2}{30}} = 0 \qquad \textbf{(18.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = \sqrt{15}], [t = -\sqrt{15}]] \qquad \textbf{(18.2.2)}$$

evalf[5](sqrt(15))

$$3.8730 \qquad \textbf{(18.2.3)}$$

Dvs. efter $t = 3.873 \approx 3.9$ døgn vokser koncentrationen af stoffet i beholderen hurtigst, da:

is(C'''(sqrt(15)) < 0)

$$true \qquad \textbf{(18.2.4)}$$

Matematik A, STX

Eksamen d. 15. august 2018

Indsend gerne opgavesættet til følgende e-mail:

matematikuniverset@hotmail.com

På forhånd tak.