Matematik B eksamen
24. maj 2016

www.matematikhfsvar.page.tl
Delprøve 1 - uden hjælpemidler

Info: *I denne eksamensopgave anvendes der punktum som decimaltal istedet for komma. Eks.* 3.14 *istedet for* 3,14

Opgave 1 - Ligning

Delopgave
Ligningen løses
$3x+6=-x+2 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$

Opgave 2 - Funktion

Delopgave
Funktionen
$f(x)=x^2+3x$ samt punktet $P(2,10)$ er givet. Hvis man skal finde ud af, om punktet ligger på funktionen, så indsætter man det. Man får
$10=2^2+3\cdot 2 \Leftrightarrow 10=4+6 \Leftrightarrow 10=10$ så punktet P ligger på grafen.

Opgave 3 - Eksponentiel funktion

Delopgave
Funktionen for en bankkonto med indhold, er givet ved
$y=5000\cdot 1.03^x$, som er en eksponentielfunktion.
Tallet 5000 fortæller, at ved begyndelsen (oprettelsen af kontoen) blev der indsat 5000kr og dette forventes med at sige med 3% om året

Udregning af a: $a=1+r$ hvor $a=1.03$. Man har
$1.03=1+r \Leftrightarrow r=0.03 \Leftrightarrow r\%=0.03\cdot 100\,\%=3\,\%$.

Opgave 4 - Funktion

Delopgave
Funktionen $f(x)=\ln(x)+x^4, x>0$ er givet. Den differentieres.

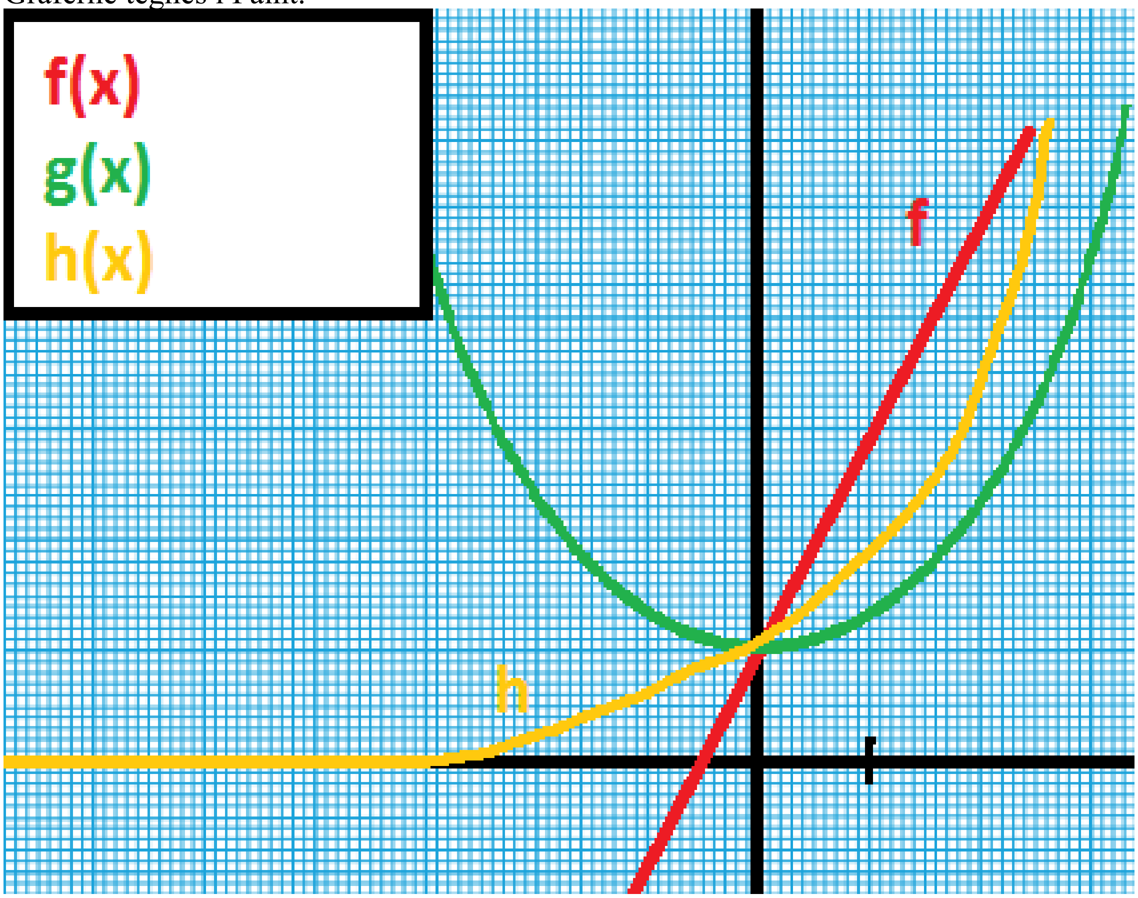
$f'(x) = \frac{1}{x} + 4x^3$.

Hvilket er den afledede af $f(x)$.

Opgave 5 - Grafer

Delopgave

Graferne tegnes i Paint.



Opgave 6 - Stamfunktion

Delopgave

Stamfunktionen findes til f vha. integralregning.

$f(x) = 5 \cdot e^x + x^3$. Man anvender integralet.

$$\int 5 \cdot e^x + x^3 \, dx = 5 \cdot e^x + \frac{1}{4} x^4 + k$$

Punktet er givet ved $P(0, 10)$ så er

$10 = 5 \cdot e^0 + \frac{1}{4}\ 0^4 + k \Leftrightarrow 10 = 5 + 0 + k \Leftrightarrow k = 5$

Så er stamfunktionen

$F(x) = 5 \cdot e^x + \frac{1}{4}\ x^4 + 5$

Matematik B eksamen
24. maj 2016

www.matematikhfsvar.page.tl
Delprøve 2 - med hjælpemidler

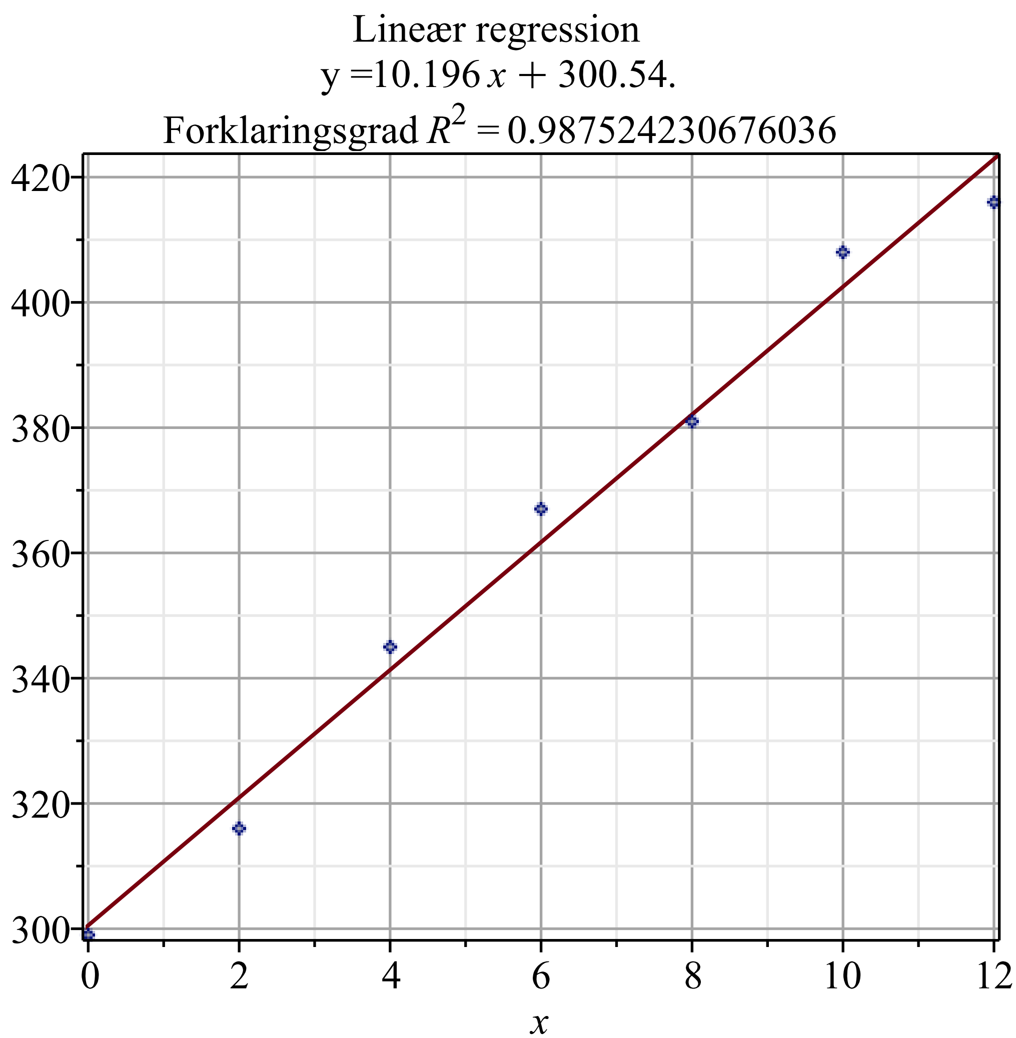
Info: *I denne eksamensopgave anvendes der* <u>*punktum*</u> *som decimaltal istedet for* <u>*komma*</u>. *Eks.* 3.14 *istedet for* 3,14

Opgave 7 - Lineære funktioner

restart
with(*Gym*) :
Oplysningerne defineres.
$L1 := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]$:; $L2 := [299, 316, 345, 367, 381, 408, 416]$:
Man skal ikke skrive årstallene ind som de står, ellers får man en besynderlig funktion...

Delopgave a)

Forskriften er $f(t) = a \cdot t + b$. Man anvender lineære regression for at finde forskriften på baggrund af de definerede tal.
$LinReg(L1, L2)$



Hermed er forskriften givet ved
$f(t) := 10.196 \cdot t + 300.54$:
Hvor tallene $a = 10.196$ og $b = 300.54$ er bestemt.

Delopgave b)

Antallet af patienter i år 2016 vil være
$2016 - 2001$

$$15 \tag{7.2.1}$$

Så har man sin forskrift, hvor tallet 15 indsættes. Man får
$f(15)$

$$453.480 \tag{7.2.2}$$

Så i år 2016 vil der være 453.48 tusinde personer, der får den stærke medicin.

Opgave 8 - Potensfunktioner

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Man har funktionen

local $O := 0.31 \cdot m^{0.425}$:

Her er begrænsningen $50 < m < 150$.

Man anvender formlerne $F_y = F_x^a$, så man har

$$(1 + r_y) = \left(1 + \left(\frac{15}{100}\right)\right)^{0.425}$$

$$1 + r_y = 1.061198389 \quad \textbf{(8.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r[y]}}$

$$[[r_y = 0.06119838900]] \quad \textbf{(8.1.2)}$$

Ganges med 100 og man får

$r_y = 0.06119838900 \cdot 100$

$$r_y = 6.119838900 \quad \textbf{(8.1.3)}$$

Så når vægten øges med 15% så øges overfladearealet med 6.11%

Opgave 9 - Statistik

restart

with(*Gym*) :

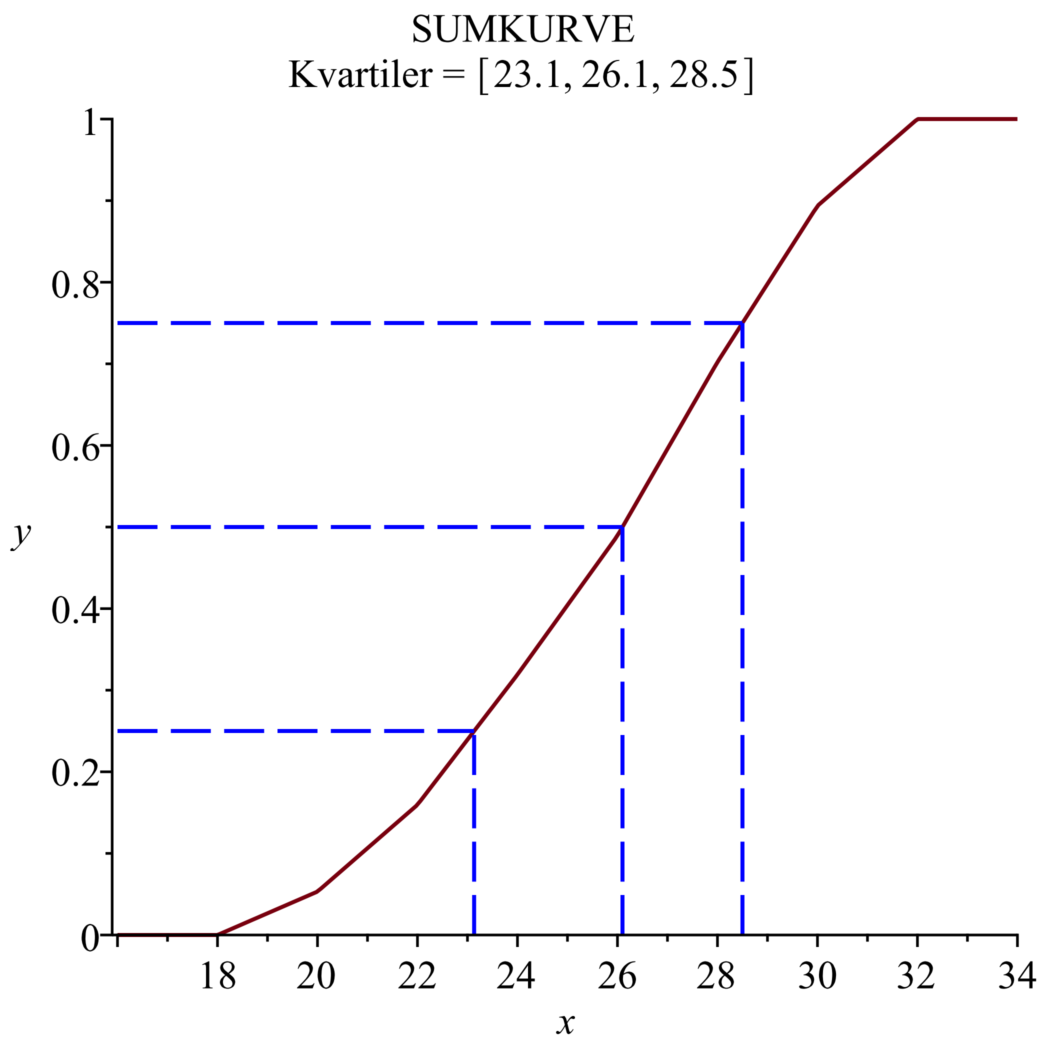
Oplysningerne defineres i en matrix gruppe:

$$obs := \begin{bmatrix} 18..20 & 5 \\ 20..22 & 10 \\ 22..24 & 15 \\ 24..26 & 16 \\ 26..28 & 20 \\ 28..30 & 18 \\ 30..32 & 10 \end{bmatrix} :$$

Delopgave a)

Sumkurve kan tegnes på baggrund af de definerede oplysninger.

plotSumkurve(*obs*)



Alternativt kunne man gå hele vejen igennem for at tegne det pr. håndkraft. Desuden blev kvartilsættet automatisk bestemt til
Spand = [23.1, 26.1, 28.5]

$$Spand = [23.1, 26.1, 28.5] \tag{9.1.1}$$

Her er 23.1 nedre
Her er 26.1 median
Her er 28.5 øvre

Delopgave b)

Der gives et andet kvartilsæt over en anden spand med høstsild.
2 *Spand* = [19, 23, 30]

$$2\ Spand = [19, 23, 30] \tag{9.2.1}$$

Begge kvartilsæt sammenlignes. Det ses, at 25 % i *Spand* har en længde på 23.1cm, hvor 25% af høstsildene i 2 *spand* har en længde på 19cm. En anelse mindre. Tilsvarende for 50% af sildene fra *Spand*, hvor de har længden 26.1cm, sammenlignet med 50 % af sildene i 2 *spand*, som er 23cm. Også en anelse mindre. Endelig ses der den forskel at 2 *spand* har 75 % af sildene, der er 30cm, hvor i *Spand* er der 75 % af sildene, der har en længde på 28.5cm.

Opgave 10 - Funktioner

restart
with(*Gym*) :
Funktionen over SMS'er i DK defineres
$f(x) := -0.12\,x^2 + 1.1\,x + 4 :$
Det ses, at der er tale om et andengradspolynomium.

Delopgave a)

For at bestemme hvornår der blev sendt 5mia SMS'er i DK, sættes det lig med funktionen $f(x)$. Man har så
$f(x) = 5$

$$-0.12\,x^2 + 1.1\,x + 4 = 5 \tag{10.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1.023331773], [x = 8.143334894]] \tag{10.1.2}$$

Så i løbet af år 2006 og 2013 var der sendt ca. 5 mia SMS'er. (Med teknologien i dag mht. Facebook osv, må det vise, at SMS' forbruget er aftagende...)

Delopgave b)

For at finde ud af hvornår man sendte flest SMS'er om året er at finde den aflededes nulpunkt. Man får
$f'(x) = 0$

$$-0.24\,x + 1.1 = 0 \tag{10.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 4.583333333]] \tag{10.2.2}$$

$f(4.58)$

$$6.520832 \tag{10.2.3}$$

Dvs. i år 2009 til 2010 ca. sendte man altså ca. 6.52 SMS'er.

(*Godt nok er det ikke det man skal, men man kunne altså blot finde toppunktet af andengradpolynomiet og derved bestemme det år og antal SMS'er der var flest af.*)

Opgave 11 - Differentialregning

restart
with(*Gym*) :
Et tredjegradspolynomium defineres
$f(x) := 2\,x^3 - 6\,x^2 - 12\,x + 1 :$

Delopgave a)

For at finde tangenten til f har man punktet $P(5, f(5))$. Ligningen for tangenten (med indsættelse af den afledede og punktet)
$y = f'(5)\cdot(x-5) + f(5)$

$$y = 78\,x - 349 \tag{11.1.1}$$

Så dette er tangenten for f. Man kunne også bare regne den pr. håndkraft.

Delopgave b)

Monotoniforholdene for f findes vha. den afledede's forløb.
$f'(x) = 0$

$$6x^2 - 12x - 12 = 0 \tag{11.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1 + \sqrt{3}], [x = 1 - \sqrt{3}]] \tag{11.2.2}$$

Her fås to rødder, som indikerer, at f skifter sin retning, hvad enten det er voksende eller aftagende. Der gøres prøve med den dobbelte afledede af f.

$f''(x)$

$$12x - 12 \tag{11.2.3}$$

Man indsætter den afledededes rødder.
$f''(1 + \sqrt{3})$

$$12\sqrt{3} \tag{11.2.4}$$

$12\sqrt{3} > 0$, altså er f min. i punktet $1 + \sqrt{3}$

$f''(1 - \sqrt{3})$

$$-12\sqrt{3} \tag{11.2.5}$$

$-12\sqrt{3} < 0$, altså er f maks. i punktet $1 - \sqrt{3}$

Så er konklusionen følgende:
f er voksende i intervallet $]-\infty; 1 - \sqrt{3}]$ og $[1 + \sqrt{3}; \infty[$ samt aftagende i intervallet $[1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}]$.

Delopgave c)

Funktionen $g(x) := -3x^2 + 33$: er givet. Hvis f og g har ét skæringspunkt, altså løses ligningen:
$f(x) = g(x)$

$$2x^3 - 6x^2 - 12x + 1 = -3x^2 + 33 \tag{11.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x = 4], \left[x = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{39}\right], \left[x = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{39}\right]\right] \tag{11.3.2}$$

Man får tre løsninger (pga. tredjegradspolynomiet). De komplekse rødder forkastes, så man har kun $x = 4$, som er skæringspunktet til Q. Man mangler dog y-koordianten.
$f(4)$

$$-15 \tag{11.3.3}$$

$g(4)$

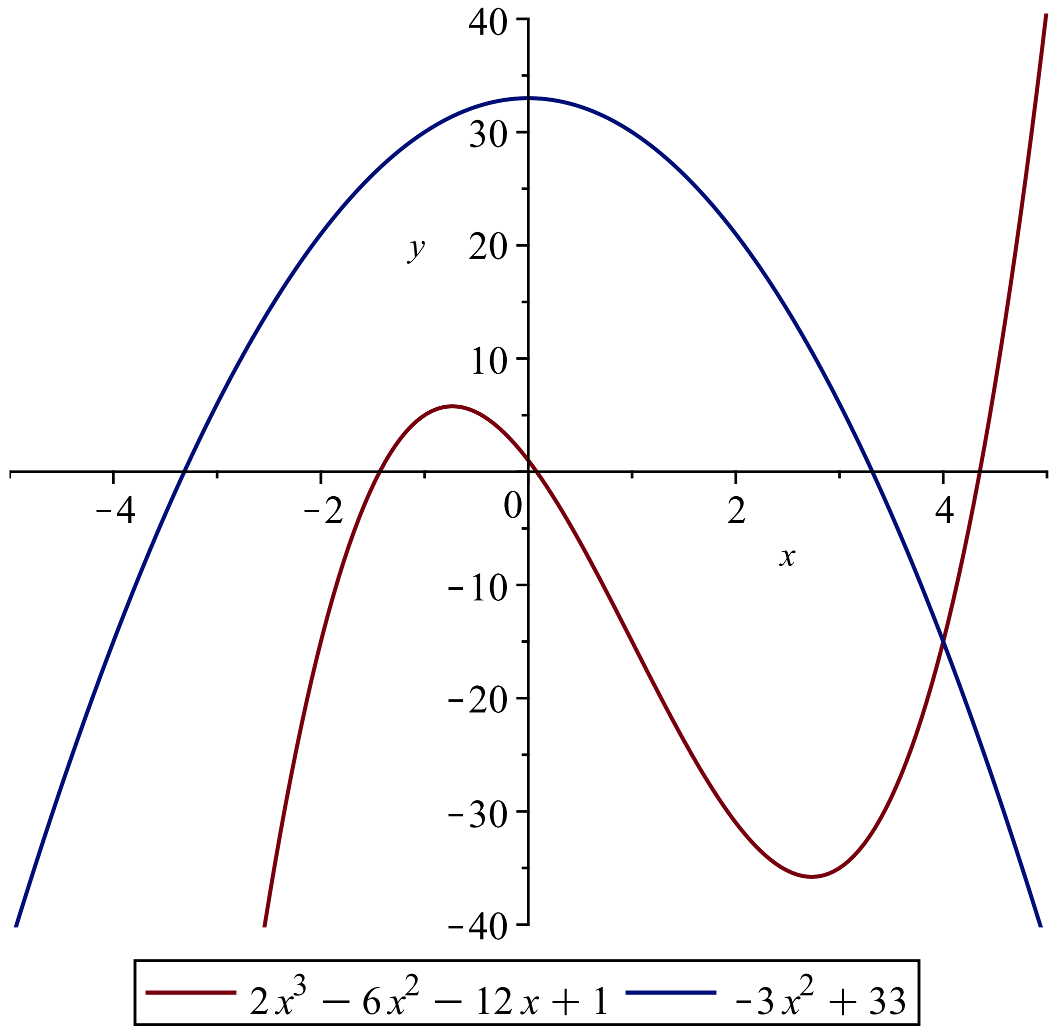
$$-15 \tag{11.3.4}$$

Så det er lige meget hvilken en man indsætter sin x-værdi i. Koordinatsættet er hermed:
$Q = (4, -15)$

$$Q = (4, -15) \tag{11.3.5}$$

Man kan plotte det for at se hvor farligt det ser ud:

$plot([f(x), g(x)], x = -5..5, y = -40..40, legend = [f(x), g(x)])$



Opgave 12 - Integralregning

restart

with(*Gym*) :

Skaterfunktionen defineres.

$f(x) := 0.0057 \cdot x^4 + 0.078 \cdot x^2 + \frac{1}{4}$:

Delopgave a)

Højden h bestemmes meget enkelt ved indsættelse af $x = 4$, som man kan se på figuren.

$f(4)$

$$2.957200000 \quad \textbf{(12.1.1)}$$

Dvs. det højeste punkt er altså 2.9572 *m*. (Dette gælder også på den anden side, da det er en symmetrisk funktion.)

Delopgave b)

Arealet bestemmes enkelt ved anvendelse af integralregning.

$A = \int_{-4}^{4} f(x)\, \mathrm{d}x$

$$A = 7.662720000 \qquad (12.2.1)$$

$A = 7.662720000\ m^2$, Som er arealet af skaterrampen.

Opgave 13 - Geometri

restart
with(*Gym*) :
Længderne defineres (uden numerisk tegnet).
$AB := 364.7 :;\ AC := 411.3 :;\ BC := 61.1 :$

Delopgave a)

Man anvender cosinusrelationerne til bestemmelse af vinkel A, da man kender alle længder. Man får

$\angle A = invCos\left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}\right)$

$$\angle(A) = 5.848652543 \qquad (13.1.1)$$

Hermed er vinkel $A = 5.848652543^o$.

Delopgave b)

Man anvender cosinusrelationerne igen, blot til at finde vinkel B.

$\angle B_{ABC} := invCos\left(\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}\right)$

$$136.6891694 \qquad (13.2.1)$$

Hermed er vinkel B i trekanten $ABC = 136.6891694^o$. Man finder nu vinkel B i trekanten ABD, så man har

$\angle B_{ABD} := 180 - \angle B_{ABC}$

$$43.3108306 \qquad (13.2.2)$$

Dette er den spidse vinkel. Så kan man finde vinkel A i trekanten ABD, man har så

$\angle A_{ABD} := 180 - \angle B_{ABD} - 90$

$$46.6891694 \qquad (13.2.3)$$

Så kan man endelig finde højden. Man har formlen

$a = c \cdot \sin(A)$. Her er $a = BD$ og $c = AB$ samt $A = \angle A_{ABD}$, så formlen er

$BD = AB \cdot Sin(\angle A_{ABD})$

$$BD = 265.3714403 \qquad (13.2.4)$$

Hvilket er den ønskede højde.