Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 6, Dec. 2016
Published on Web 01/12/2016
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة, ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد السادس، ديسمبر 2016م

الطرق العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية

Numerical Methods for Solving Differential Equations System

د. زينب علي الشقماني / أ. سمية رجب رفيدة*

ملخص البحث:

يقدم هذا البحث دراسة لبعض الخوارزميات العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية العادية، فمن الطرق العددية التي تم دراستها طريقة تايلور، حيث تعتمد هذه الطريقة على متسلسلة تايلور وهي طريقة ليست عددية بالمعنى القاطع والصريح، ولكنها تعتبر الحجر الأساس للطرق العددية الأخرى وهي طريقة دقيقة ولكنها غير عملية بسبب حاجتها إلى مشتقات من رتب عليا، والتي قد تكون صعبة الإيجاد لبعض الدوال معقدة البنية الجبرية، كما احتوى هذا البحث على طريقة أويلر التي تعتبر أقدم وأبسط الأساليب العددية لحل مسائل القيم ألابتدائية وطريقة أويلر المعدلة، وهي من طرق التنبؤ والتصحيحِ لأنه يتم تصحيحِ القيمة المحسوبة بإحدى الطرق السابقة. وأخيرا تعميم خوارزميات رونجِ– كوتا لحل مسألة قيمة ابتدائية واحدة إلى حل منظومة من المعادلات التفاضلية.

1. المقدمة

المعادلات التفاضلية العادية تظهر عند معالجة بعض المسائل الفيزيائية والهندسية وغيرها من العلوم الأخرى، ولكن هذه المعادلات قد يصعب إيجاد حلها تحليلياً، وبالتالي من الضروري استخدام الخوارزميات العددية لإيجاد قيم تقريبية لحل هذه المعادلات.

هذا العمل يقدم دراسة للخوارزميات العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية العادية، أولها طريقة تايلور وهي تحتاجِ إلى إيجاد مشتقات الدالة من رتب عليا، والتي

* قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة مصراتة.

قد تكون صعبة الإيجاد لبعض الدوال معقدة البنية الجبرية، كما احتوى على طريقة أويلر التي تعتبر أقدم وأبسط الأساليب العددية لحل مسائل القيم الابتدائية، ثم طريقة أويلر المعدلة، وهي من طرق التنبؤ والتصحيحِ لأنه يتم تصحيحِ القيمة المحسوبة بإحدى الطرق الأخرى. وأخيرا خوارزميات رونجِ-كوتا.

1.1 شرط لبشتز [1]

يقال إن الدالة $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ المعرفة على المجموعة:

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : a \le x \le b \, , -\infty < y_i < \infty \; ; \; i = 1, \ldots, n\}$$

تحقق شرط لبشتز على D في المتغيرات $y_1, y_2, \ldots, y_n$ إذا وجد ثابت $L > 0$ يحقق الخاصية:

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_n)| \le L \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$$

لكل $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ في D.

2.1 نظرية وجود ووحدانية الحل [1]

إذا كانت:

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \; ; \quad i = 1,2,3, \ldots, n$$

متصلة على المنطقة:

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : a \le x \le b \, , -\infty < y_i < \infty \; ; \; i = 1,2, \ldots, n\}$$

وتحقق شرط لبشتز على D فإن منظومة المعادلات من الرتبة الأولى:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$y_i(a) = \alpha_i \; ; \quad i = 1,2, \ldots., n$$

لها حل $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ، وهذا الحل وحيد لكل $a \le x \le b$.

2. حل منظومة مِن المعادلات التفاضلية

يمكن تعميم الطرق العددية لحل معادلة تفاضلية لتكون صالحة لحل منظومة من المعادلات التفاضلية، فإذا كانت المنظومة مكونة من المسألتين التاليتين:

$$\left.\begin{array}{ll} x' = f(t,x,y)\ ; & x(t_0) = x_0 \\ y' = f(t,x,y)\ ; & y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

فإنه يمكن تطبيق الطرق العددية كالآتي:

1.2 طريقة تايلور Taylor`s Method

هذه الطريقة تعتمد على متسلسلة تايلور وهي طريقة ليست عددية بالمعنى القاطع و الصريح، وفكرة هذه الطريقة هي استخدام مفكوك الدالة $y(x)$ حول a التي لا نعرفها ولكن نعرف مشتقاتها من مسألة القيمة الابتدائية (1)، فيتم إيجاد باقي المشتقات عند a وتكتب $y(x)$ على الشكل:

$$y(x) = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2} y''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(a)$$

حيث $h = x - a$. ويمكن كتابتها بصورة أكثر عمومية:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_n)$$

حيث $h = x_{n+1} - x_n$.

وهنا تسمى طريقة متسلسلة تايلور من الرتبة (n).

طريقة تايلور لحل المنظومة (1) مثل طريقة تايلور لحل معادلة تفاضلية واحدة، وذلك عن طريق التعبير عن الدالتين $x = f(t)$ و $y = g(t)$ عن طريق معرفة المشتقة الأولى لكل من الدالتين، حيث:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

حول $t = t_0$ على النحو التالي:

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)x' + \frac{(t - t_0)^2}{2}x'' + ...$$

$$y(t) = y_0 + (t - t_0)y' + \frac{(t - t_0)^2}{2}y'' + ...$$

وإذا تم وضعِ $h = t - t_0$ فإن المتسلسلتين أعلاه تأخذان الشكل التالي:

$$x(t) = x_0 + hx' + \frac{h^2}{2}x'' + ...$$

$$y(t) = y_0 + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + ...$$

واللتان تعتبران حلاً للمنظومة (1).

مثـال 1

استخدم طريقة تايلور لحل المنظومة:

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2t; \quad x(0) = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x - 4y + 1; \quad y(0) = 0.$$

بطول خطوة $h = 0.1$ على الفترة $0 \le t \le 1$، وقارنه بالحل الفعلي:

$$\tilde{x}(t) = \frac{4}{3}t^2$$

$$\tilde{y}(t) = t - 2t^2 + \frac{8}{3}t^3$$

الحـل

$$x' = 4x - 2y + 2t, \qquad y' = 8x - 4y + 1$$
$$x'' = 4x' - 2y' + 2, \qquad y'' = 8x' - 4y'$$
$$x''' = 4x'' - 2y'', \qquad y''' = 8x'' - 4y''$$
$$x^{(4)} = 4x''' - 2y''', \qquad y^{(4)} = 8x''' - 4y'''$$

عند $t = 0$:

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0$$
$$x'(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$
$$x''(0) = 0, \qquad y''(0) = -4$$
$$x'''(0) = 8, \qquad y'''(0) = 16$$
$$x^{(4)}(0) = 0, \qquad y^{(4)}(0) = 0$$

$$x(0.1) = 0 + (0.1)(0) + \frac{0.1^2}{2}(0) + \frac{0.1^3}{6}(8) + \frac{0.1^4}{24}(0) = 0.0013333$$

$$y(0.1) = 0 + (0.1)(1) + \frac{0.1^2}{2}(-4) + \frac{0.1^3}{6}(16) + \frac{0.1^4}{24}(0) = 0.0826667$$

عند $t = 0.1$:

$x(0.1) = 0.0013333,$ $\qquad y(0.1) = 0.0826667$

$x'(0.1) = 0.0399998,$ $\qquad y'(0.1) = 0.679996$

$x''(0.1) = 0.8000072,$ $\qquad y''(0.1) = -2.3999856$

$x'''(0.1) = 8,$ $\qquad y'''(0.1) = 16$

$x^{(4)}(0.1) = 0,$ $\qquad y^{(4)}(0.1) = 0$

$$x(0.2) = 0.0013333 + 0.1(0.0399998) + \frac{0.1^2}{2}(0.8000072) + \frac{0.1^3}{6}(8) + \frac{0.1^4}{24}(0)$$
$$= 0.010666649$$

$$y(0.2) = 0.0826667 + (0.1)(0.679996) + \frac{0.1^2}{2}(-2.3999856) + \frac{0.1^3}{6}(16) + \frac{0.1^4}{24}(0)$$
$$= 0.141333038$$

والنتائجِ العددية التي تم الحصول عليها تتضحِ من الجدولين (1) و (2).

t	الحل العددي $x(t)$	الحل الفعلي $\tilde{x}(t)$	مقدار الخطأ
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.000000E−01	1.333333E−03	1.333333E−03	0.000000E+00
2.000000E−01	1.066667E−02	1.066667E−02	0.000000E+00
3.000000E−01	3.600001E−02	3.600001E−02	0.000000E+00
4.000000E−01	8.533335E−02	8.533334E−02	7.450581E−09
5.000000E−01	1.666667E−01	1.666667E−01	1.490116E−08
6.000000E−01	2.880000E−01	2.880000E−01	2.980232E−08
7.000000E−01	4.573334E−01	4.573334E−01	5.960464E−08
8.000001E−01	6.826667E−01	6.826667E−01	1.192093E−07
9.000001E−01	9.720001E−01	9.720001E−01	1.788139E−07
1.000000	1.333333	1.333334	3.576279E−07

جدول (1)

t	الحل العددي $y(t)$	الحل الفعلي $\tilde{y}(t)$	مقدار الخطأ
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0
1.000000E−01	8.266667E−02	8.266667E−02	0.000000E+00
2.000000E−01	1.413333E−01	1.413333E−01	1.490116E−08
3.000000E−01	1.920000E−01	1.920000E−01	0.000000E+00
4.000000E−01	2.506667E−01	2.506667E−01	0.000000E+00
5.000000E−01	3.333333E−01	3.333333E−01	0.000000E+00
6.000000E−01	4.560000E−01	4.560000E−01	0.000000E+00
7.000000E−01	6.346667E−01	6.346667E−01	5.960464E−08
8.000001E−01	8.853334E−01	8.853335E−01	1.788139E−07
9.000001E−01	1.224000	1.224000	2.384186E−07
1.000000	1.666667	1.666667	3.576279E−07

جدول (2)

2.2 طريقة أويلر Euler`s Method

وهي أبسط الطرق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية (1) وتسمى أيضاً بطريقة المماس وتعطى بالصيغة:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$$

وهي خطية في y_n و $f(x_n, y_n)$.

حل المنظومة (1) باستخدام طريقة أويلر يتم كالآتي:

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

أي:

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 6, Dec. 2016
Published on Web 01/12/2016
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة, ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد السادس، ديسمبر 2016م

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n)$$

مثال 2

استخدم طريقة أويلر لحل النظام:

$$x'(t) = x - y\ ; \qquad x(0) = 1$$
$$y'(t) = 4x - 2y\ ; \qquad y(0) = 1$$

حيث $h = 0.25, 0.125, 0.0625$ على الفترة $0 \le t \le 1$، وقارنه بالحل الفعلي:

$$\tilde{x}(t) = e^{2t}, \qquad \tilde{y}(t) = e^{2t}$$

الحل

1. عندما $h = 0.25$: النتائج العددية تتضح من الجدولين (3) و (4)

t	الحل العددي $x(t)$	الحل الفعلي $\tilde{x}(t)$	مقدار الخطأ
2.500000E−01	1.500000	1.648721	1.487212E−01
5.000000E−01	2.250000	2.718282	4.682817E−01
7.500000E−01	3.375000	4.481689	1.106689
1.000000	5.062500	7.389056	2.326556

جدول (3)

t	الحل العددي $y(t)$	الحل الفعلي $\tilde{y}(t)$	مقدار الخطأ
2.500000E−01	1.500000	1.648721	1.487212E−01
5.000000E−01	2.250000	2.718282	4.682817E−01
7.500000E−01	3.375000	4.481689	1.106689
1.000000	5.062500	7.389056	2.326556

جدول (4)

2. عندما $h = 0.125$: النتائج تتضح من الجدولين (5) و (6)

t	الحل العددي $x(t)$	الحل الفعلي $\tilde{x}(t)$	مقدار الخطأ
1.250000E−01	1.250000	1.284025	3.402543E−02
2.500000E−01	1.562500	1.648721	8.622122E−02
3.750000E−01	1.953125	2.117000	1.638751E−01
5.000000E−01	2.441406	2.718282	2.768755E−01
6.250000E−01	3.051758	3.490343	4.385850E−01
7.500000E−01	3.814697	4.481689	6.669917E−01
8.750000E−01	4.768372	5.754603	9.862313E−01
1.000000	5.960464	7.389056	1.428592

جدول (5)

t	الحل العددي $y(t)$	الحل الفعلي $\tilde{y}(t)$	مقدار الخطأ
1.250000E−01	1.250000	1.284025	3.402543E−02
2.500000E−01	1.562500	1.648721	8.622122E−02
3.750000E−01	1.953125	2.117000	1.638751E−01
5.000000E−01	2.441406	2.718282	2.768755E−01
6.250000E−01	3.051758	3.490343	4.385850E−01
7.500000E−01	3.814697	4.481689	6.669917E−01
8.750000E−01	4.768372	5.754603	9.862313E−01
1.000000	5.960464	7.389056	1.428592

جدول (6)

3. عندما $h = 0.0625$: النتائجِ تتضحِ من الجدولين (7) و (8)

t	الحل العددي $x(t)$	الحل الفعلي $\tilde{x}(t)$	مقدار الخطأ
6.250000E−02	1.125000	1.133148	8.148432E−03
1.250000E−01	1.265625	1.284025	1.840043E−02
1.875000E−01	1.423828	1.454991	3.116333E−02
2.500000E−01	1.601807	1.648721	4.691458E−02
3.125000E−01	1.802032	1.868246	6.621349E−02
3.750000E−01	2.027287	2.117000	8.971357E−02
4.375000E−01	2.280697	2.398875	1.181779E−01
5.000000E−01	2.565784	2.718282	1.524973E−01
5.625000E−01	2.886508	3.080217	1.937094E−01
6.250000E−01	3.247321	3.490343	2.430220E−01
6.875000E−01	3.653236	3.955077	3.018408E−01
7.500000E−01	4.109890	4.481689	3.717985E−01
8.125000E−01	4.623627	5.078419	4.547925E−01
8.750000E−01	5.201580	5.754603	5.530229E−01
9.375000E−01	5.851778	6.520819	6.690416E−01
1.000000	6.583250	7.389056	8.058066E−01

جدوِل (7)

t	الحل العددي $y(t)$	الحل الفعلي $\tilde{y}(t)$	مقدار الخطأ
6.250000E−02	1.125000	1.133148	8.148432E−03
1.250000E−01	1.265625	1.284025	1.840043E−02
1.875000E−01	1.423828	1.454991	3.116333E−02
2.500000E−01	1.601807	1.648721	4.691458E−02
3.125000E−01	1.802032	1.868246	6.621349E−02

3.750000E-01	2.027287	2.117000	8.971357E-02
4.375000E-01	2.280697	2.398875	1.181779E-01
5.000000E-01	2.565784	2.718282	1.524973E-01
5.625000E-01	2.886508	3.080217	1.937094E-01
6.250000E-01	3.247321	3.490343	2.430220E-01
6.875000E-01	3.653236	3.955077	3.018408E-01
7.500000E-01	4.109890	4.481689	3.717985E-01
8.125000E-01	4.623627	5.078419	4.547925E-01
8.750000E-01	5.201580	5.754603	5.530229E-01
9.375000E-01	5.851778	6.520819	6.690416E-01
1.000000	6.583250	7.389056	8.058066E-01

جدول (8)

3.2 طريقة أويلر المعدلة The modified Euler`s Method

إن مشكلة طريقة أويلر تنحصر في ضعف الدقة في الحل، ولكي يتم الوصول إلى دقة كافية ينبغي تقليص طول الخطوة h. وللوصول إلى طريقة أو صيغة أحسن بجهد إضافي بسيط باستخدام معدل الميل على الفترة كما يلي:

1. بأخذ الوسط الحسابي للميلين عند بداية ونهاية الفترة (x_n, x_{n+1}):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_n + y'_{n+1})$$

(1)

2. يمكن اشتقاق الصيغة (1) بتطبيق قاعدة شبه المنحرف على تكامل y':

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'dx = \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n)$$

إذا $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n)$$

والمعادلة (1) تقديراً معدلاً لـ y عند x_{n+1}. رغم ذلك لا يمكن تطبيق المعادلة مباشرة لأن المشتقة دالة في المتغيرين x و y ولا يمكن حساب y'_{n+1} بدون معرفة y_{n+1}.

يمكن التغلب على هذه الصعوبة بالتنبؤ بقيمة y_{n+1} باستخدام طريقة أويلر للحصول بعدها على قيمة معدلة لـ y_{n+1} باستخدام الصيغة (1)، ولذا فإن طريقة أويلر المعدلة تعتبر من طرق التنبؤ و التصحيح، أي أن طريقة أويلر المعدلة تعطى كالآتي:

$$y_{n+1,p} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1,c} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1,p})\right]$$

حيث تسمى $y_{n+1,p}$ بالقيمة المتنبئة، و $y_{n+1,c}$ بالقيمة المعدلة $x_{n+1} = x_n + h$

حل المنظومة (1) باستخدام طريقة أويلر المعدلة يكون كالتالي:

$$x_{n+1,p} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n)$$

$$y_{n+1,p} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n)$$

$$x_{n+1,c} = x_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, x_n, y_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

$$y_{n+1,c} = y_n + \frac{h}{2}\left[g(t_n, x_n, y_n) + g(t_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

حيث إن $x_{n+1,p}$ و $y_{n+1,p}$ القيمة المتنبأ بها و $t_{n+1} = t_n + h$.

مثـال 3

استخدم طريقة أويلر المعدلة لحل النظام

$$x'(t) = -y; \qquad x(0) = 4$$

$$y'(t) = x; \qquad y(0) = 0$$

حيث $h = 0.1\,,0.05$ على الفترة $0 \le x \le 1$ ، وقارنه بالحل الفعلي:

$$\tilde{x}(t) = 4\cos t\,, \quad \tilde{y}(t) = 4\sin t.$$

الحل

من طريقة أويلر نجد أن $x_{1,p} = 4$ و $y_{1,p} = 0.2$

$$x_{1,c} = x(0.05) = 4 + \frac{0.05}{2}\left[f(0,4,0) + f(0.05,4,0.2)\right] = 4 + \frac{0.05}{2}[0-4] = 3.9$$

$$y_{1,c} = y(0.05) = 0 + \frac{0.05}{2}\left[g(0,4,0) + g(0.05,4,0.2)\right] = \frac{0.05}{2}[4+4] = 0.2$$

والنتائجِ العددية التي تم الحصول عليها تتضح من الجدولين (9) و (10).

t	الحل العددي $x(t)$	الحل الفعلي $\tilde{x}(t)$	مقدار الخطأ
0.000000E+00	4.000000	4.000000	0
5.000000E−02	3.995000	3.995001	1.192093E−06
1.000000E−01	3.980006	3.980017	1.049042E−05
1.500000E−01	3.955056	3.955084	2.813339E−05
2.000000E−01	3.920212	3.920266	5.412102E−05
2.500000E−01	3.875562	3.875650	8.797646E−05
3.000000E−01	3.821216	3.821346	1.299381E−04
3.500000E−01	3.757311	3.757491	1.795292E−04
4.000000E−01	3.684007	3.684244	2.365112E−04
4.500000E−01	3.601488	3.601788	3.006458E−04
5.000001E−01	3.509958	3.510330	3.719330E−04
5.500001E−01	3.409648	3.410098	4.494190E−04
6.000001E−01	3.300809	3.301342	5.333424E−04
6.500001E−01	3.183712	3.184335	6.229877E−04
7.000001E−01	3.058651	3.059368	7.176399E−04

7.500001E−01	2.925938	2.926755	8.172989E−04
8.000001E−01	2.785905	2.786826	9.210110E−04
8.500001E−01	2.638904	2.639932	1.028538E−03
9.000002E−01	2.485300	2.486439	1.139164E−03
9.500002E−01	2.325480	2.326732	1.252413E−03
1.000000	2.159841	2.161209	1.367807E−03

جدول (9)

t	الحل العددي $y(t)$	الحل الفعلي $\tilde{y}(t)$	مقدار الخطأ
0.000000E+00	0.000000	0.000000	0
5.000000E−02	2.000000E−01	1.999167E−01	8.332729E−05
1.000000E−01	3.995000E−01	3.993337E−01	1.663268E−04
1.500000E−01	5.980009E−01	5.977526E−01	2.483726E−04
2.000000E−01	7.950063E−01	7.946773E−01	3.289580E−04
2.500000E−01	9.900231E−01	9.896159E−01	4.072785E−04
3.000000E−01	1.182564	1.182081	4.827976E−04
3.500000E−01	1.372146	1.371591	5.549192E−04
4.000000E−01	1.558297	1.557673	6.232262E−04
4.500000E−01	1.740549	1.739862	6.868839E−04
5.000001E−01	1.918448	1.917702	7.455349E−04
5.500001E−01	2.091548	2.090749	7.984638E−04
6.000001E−01	2.259416	2.258570	8.454323E−04
6.500001E−01	2.421632	2.420746	8.859634E−04
7.000001E−01	2.577790	2.576871	9.191036E−04
7.500001E−01	2.727501	2.726555	9.453297E−04
8.000001E−01	2.870388	2.869425	9.634495E−04
8.500001E−01	3.006096	3.005122	9.737015E−04

9.000002E−01	3.134283	3.133308	9.753704E−04
9.500002E−01	3.254631	3.253662	9.682178E−04
1.000000	3.366836	3.365884	9.520054E−04

جدول (10)

4.2 خوارزميات رونج – كوتا Runge−Kutta method

يمكن تعميم خوارزميات رونجِ–كوتا لحل معادلة تفاضلية واحدة إلى حل مجموعة من المعادلات التفاضلية. فلحل المنظومة (1) باستخدام طريقة رونجِ–كوتا من المرحلة s تستخدم الخوارزمية التالية:

$$x_{n+1} = x_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_{i1}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_{i2}$$

حيث:

$$k_{11} = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{12} = g(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{21} = f(t_n + c_1 h\ , x_n + B_1 hk_{11}\ , y_n + B_1 hk_{12})$$

$$k_{22} = g(t_n + c_1 h\ , x_n + B_1 hk_{11}\ , y_n + B_1 hk_{12})$$

$$k_{31} = f\big(t_n + c_2 h\ , x_n + h(B_2 k_{11} + B_3 k_{21})\ , y_n + h(B_2 k_{12} + B_3 k_{22})\big)$$

$$k_{32} = g\big(t_n + c_2 h\ , x_n + h(B_2 k_{11} + B_3 k_{21})\ , y_n + h(B_2 k_{12} + B_3 k_{22})\big)$$

مثـال 4

باستخدام خوارزميات رونجِ – كوتا من المرحلة الثانية أوجد حل المنظومة في مثال (1).

الحـل

خوارزمية الحل كالآتي:

$$k_{11} = 4x_n - 2y_n + 2t_n$$
$$k_{12} = 8x_n - 4y_n + 1$$
$$k_{21} = 4(x_n + Bhk_{11}) - 2(y_n + Bhk_{12}) + 2(t_n + ch)$$
$$k_{22} = 8(x_n + Bhk_{11}) - 4(y_n + Bhk_{12}) + 1$$
$$x_{n+1} = x_n + h(a_1 k_{11} + a_2 k_{12})$$
$$y_{n+1} = y_n + h(a_1 k_{12} + a_2 k_{22})$$

والنتائجِ العددية التي تم الحصول عليها تتضحِ من الجدولين (11) و (12)

t	الحل العددي $x(t)$	الحل الفعلي $\tilde{x}(t)$	مقدار الخطأ
1.000000E−01	0.000000E+00	1.333333E−03	1.333333E−03
2.000000E−01	7.999999E−03	1.066667E−02	2.666668E−03
3.000000E−01	3.200000E−02	3.600001E−02	4.000004E−03
4.000000E−01	8.000001E−02	8.533334E−02	5.333334E−03
5.000000E−01	1.600000E−01	1.666667E−01	6.666660E−03
6.000000E−01	2.800000E−01	2.880000E−01	8.000016E−03
7.000000E−01	4.480000E−01	4.573334E−01	9.333372E−03
8.000001E−01	6.720001E−01	6.826668E−01	1.066679E−02
9.000001E−01	9.600001E−01	9.720003E−01	1.200020E−02
1.000000	1.320000	1.333334	1.333368E−02

جدوِل (11)

t	الحل العددي $y(t)$	الحل الفعلي $\tilde{y}(t)$	مقدار الخطأ
1.000000E−01	8.000000E−02	8.266667E−02	2.666667E−03
2.000000E−01	1.360000E−01	1.413333E−01	5.333334E−03
3.000000E−01	1.840000E−01	1.920000E−01	8.000001E−03

4.000000E−01	2.400000E−01	2.506667E−01	1.066668E−02
5.000000E−01	3.200000E−01	3.333333E−01	1.333335E−02
6.000000E−01	4.400000E−01	4.560000E−01	1.600003E−02
7.000000E−01	6.160000E−01	6.346667E−01	1.866674E−02
8.000001E−01	8.640000E−01	8.853335E−01	2.133352E−02
9.000001E−01	1.200000	1.224000	2.400029E−02
1.000000	1.640000	1.666667	2.666712E−02

جدول (12)

مع ملاحظة أنه تحصلنا على نفس النتائج عندما:

$$a_2 = 0.01, 0.3333, 0.75, 0.125, 0.365, -0.2, -4, -10, 0.25$$

مثال 5

استخدم خوارزميات رونج كوتا لحل النظام:

$$x'(t) = x - y; \qquad x(0) = 1$$
$$y'(t) = 4x - 2y; \quad y(0) = 1$$

حيث $h = 0.25, 0.125, 0.0625$ على الفترة $0 \le t \le 1$، وقارنه بالحل الفعلي:

$$\tilde{x}(t) = e^{2t}, \qquad \tilde{y}(t) = e^{2t}.$$

الحل

خوارزمية الحل هي:

$$k_{11} = x_n + y_n$$
$$k_{12} = 4x_n - 2y_n$$
$$k_{21} = (x_n + Bhk_{11}) + (y_n + Bhk_{12})$$
$$k_{22} = 4(x_n + bhk_{11}) - 2(y_n + Bhk_{12})$$

والنتائج العددية التي تم الحصول عليها تتضح من الجدولين (13) و (14). حيث إن $a_2 = 0.7$.

t	$x(t)$ الحل العددي	$\tilde{x}(t)$ الحل الفعلي	مقدار الخطأ
1.000000E−01	1.220000	1.221403	1.402736E−03
2.000000E−01	1.488400	1.491825	3.424644E−03
3.000000E−01	1.815848	1.822119	6.270766E−03
4.000000E−01	2.215335	2.225541	1.020622E−02
5.000000E−01	2.702708	2.718282	1.557350E−02
6.000000E−01	3.297304	3.320117	2.281284E−02
7.000000E−01	4.022711	4.055201	3.248930E−02
8.000001E−01	4.907708	4.953033	4.532528E−02
9.000001E−01	5.987403	6.049649	6.224537E−02
1.000000	7.304632	7.389058	8.442545E−02

جدول (13)

t	$y(t)$ الحل العددي	$\tilde{y}(t)$ الحل الفعلي	مقدار الخطأ
1.000000E−01	1.220000	1.221403	1.402736E−03
2.000000E−01	1.488400	1.491825	3.424644E−03
3.000000E−01	1.815848	1.822119	6.270766E−03
4.000000E−01	2.215335	2.225541	1.020622E−02
5.000000E−01	2.702708	2.718282	1.557350E−02
6.000000E−01	3.297304	3.320117	2.281284E−02
7.000000E−01	4.022711	4.055201	3.248930E−02
8.000001E−01	4.907708	4.953033	4.532528E−02
9.000001E−01	5.987403	6.049649	6.224537E−02
1.000000	7.304632	7.389058	8.442545E−02

جدول (14)

مع ملاحظة أنه قد حصلنا على نفس النتائج عندما:

$$a_2 = 0.45\,, 0.333\,, -1\,, -10\,, 0.2\,, 1\,, 0.5\,, 0.75$$

ملحق البرامج:

برنامج لحل منظومة المعادلات باستخدام طريقة تايلور

```
PROGRAM TAYLOR
REAL A1,A2,B1,B2,C1,C2,D1,D2
REAL T,H,X,Y,U1,U2
INTEGER I
OPEN(4,FILE='taylor.DAT')
READ(*,*) T,X,Y,H,N
WRITE(4,*)T,X,X,0
DO  I=1,N
Tnew=T+H
A1=4*X−2*Y+2*T
A2=8*X−4*Y+1
B1=4*A1−2*A2+2
B2=8*A1−4*A2
C1=4*B1−2*B2
C2=8*B1−4*B2
D1=4*C1−2*C2
D2=8*C1−4*C2
Xnew=X+H*A1+(H**2*B1)/2+(H**3*C1)/6+(H**4*D1)/24
Ynew=Y+H*A2+(H**2*B2)/2+(H**3*C2)/6+(H**4*D2)/24
U1=(4*Tnew**3)/3
U2=Tnew−2*Tnew**2+(8*Tnew**3)/3
WRITE(4,*)Tnew, Xnew,U1,ABS(U1−Xnew)
T=Tnew
X=Xnew
Y=Ynew
```

```
END DO
CLOSE(4)
STOP
```

برنامج لحل منظومة المعادلات باستخدام طريقة أويلر

```
PROGRAM SYOULER
REAL T,X,Y,H
INTEGER I
F(T,X,Y)=-Y
G(T,X,Y)=X
OPEN(4,FILE='SOULER.DAT')
READ(*,*) T,X,Y,H,N
DO  I=1,N
Tnew=T+H
Xnew=X+H*F(T,X,Y)
Ynew=Y+H*G(T,X,Y)
U1=4*COS(Tnew)
U2=4*SIN(Tnew
WRITE(4,*)Tnew,Ynew,U2,ABS(Ynew-U2)
T=Tnew
X=Xnew
Y=Ynew
END DO
CLOSE(4)
STOP
END
```

برنامج لحل منظومة المعادلات باستخدام طريقة أويلر المعدلة

```
PROGRAM SYOULER
REAL T,X,Y,H
```

```
INTEGER I
F(T,X,Y)=−Y
G(T,X,Y)=X
OPEN(4,FILE='SOULER.DAT')
READ(*,*) T,X,Y,H,N
WRITE(4,*)T,X,X,0
DO  I=1,N
Tnew=T+H
Xold=X+H*F(T,X,Y)
Yold=Y+H*G(T,X,Y)
Xnew=X+H*(F(T,X,Y)+F(Tnew,Xold,Yold))/2
Ynew=Y+H*(G(T,X,Y)+G(Tnew,Xold,Yold))/2
U1=4*COS(Tnew)
U2=4*SIN(Tnew)
WRITE(4,*)Tnew,Ynew,U2,ABS(Ynew−U2)
T=Tnew
X=Xnew
Y=Ynew
END DO
CLOSE(4)
STOP
END
```

برنامج لحل منظومة المعادلات باستخدام طريقة رونـج– كوتا من المرحلة الثانية

```
PROGRAM RUKT2
REAL T,X,Y,H,U1,U2,K11,K12,K21,K22
INTEGER I,N
F(T,X,Y)=4*X−2*Y+2*T
G(T,X,Y)=8*X−4*Y+1
OPEN(6,FILE='SRK2.DAT')
PRINT*,'T,X,Y,H,N,A2'
```

```
READ(*,*) T,X,Y,H,N,A2
A1=1-A2
A=1/(2*A2)
B=1/(2*A2)
WRITE(6,*) 'a2=',A2
DO  I=1,N
Tnew=T+H
K11=F(T,X,Y)
K12=G(T,X,Y)
K21=F(T+A*H,X+B*H*K11,Y+B*H*K12)
K22=G(T+A*H,X+B*H*K11,Y+B*H*K12)
Xnew=X+H*(A1*K11+A2*K21)
Ynew=Y+H*(A1*K12+A2*K22)
U1=(4*Tnew**3)/3
U2=Tnew-2*Tnew**2+(8*Tnew**3)/3
WRITE(6,*)Tnew,Ynew ,U2,ABS(Ynew-U2)
T=Tnew
X=Xnew
Y=Ynew
END DO
CLOSE(6)
STOP
END
```

المراجع:

أ. المراجع العربية:

1. J. Douglas Faires, Richard L.Burden ، ترجمة رمضان محمد جهيمة، كمال أبو القاسم أبو دية، التحليل العددي، منشورات 2001, Elga .

2. سعد محمد فضيلة، النفاتي معمر الرويعي، التحليل العددي للمهندسين، ط 1، منشورات جامعة الفاتح – كلية الهندسة.

ب. المراجع الأجنبية:

3. J.D. Lambert, Numerical Methods For Ordinary Differential Systems. Wiley 1991.
4. John H.Mathews, Kurtis D.Fink, Numerical Methods Using Mathlab, 4th Edition Prenctice, Hall Inc, 2004.
5. Curtis F.Gerald, Patrick O.Wheatley, Applied Numerical Analysis, 6th Edition, Addison Wesley Longman 1999.
6. Erwin Kreystig, Advanced Engineering Mathematics, 7th Edition, Wiley 1993.
7. William E.Boyce, Richard C.Dprime, Elementary Differential equations and Boundary Value Problems, 3rd Editions.
8. Ken Wong, Solving Ordinary Differentia equations with Runge-Kutta methods, February 5, 2002.

ج . مقالات وأوراق بحثية من الإنترنت:

8. Carlos J.Garcia, Introduction to Numerical Analysis, math `104 A; Fall 2004.
www.math.ucsb.edu/cgarcia/courses/math 104A
9. Gerald Recktenwald, Numerical integration of ordinary differential equation for initial value problems; Partland state university, November 27, 2001.
10. Ha Le, Initial-Value problems for ordinary differential equations; Simon Fraser University, Surrey campus MACM 316, Spring 2005.
11. Phailaung Phohomsiri, Firdase E.Udwadia, Acceleration of Runge-Kutta integration schemes, November 24, 2005.