ลอการิทึม

นิยามฟังก์ชันลอการิทึม คือ
อินเวอรส์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเซียลอยู่ในรูป

Exponential : $f = \{(x,y) \mid y = ax, a > 0, a \neq 1\}$

Log : $f^{-1} = \{(x,y) \mid x = ax, a > 0, a \neq 1\}$

นิยามฟังก์ชันลอการิทึม คือ $g = f^{-1} = \{(x,y) \in R^{+} \times R \mid y = log_a x, a > 0, a \neq 1\}$

จึงสรุปได้ว่า ตัวเลขหลัง log ต้องเป็นจำนวนจริงบวก

ฐานของ log ต้องเป็นเลขจำนวนจริงบวก
แต่ไม่เป็น 1

ค่าของ log คือ y เป็นจำนวนจริงบวก
จำนวนจริงลบ หรือศูนย์ก็ได้

" $log_a x$ " อ่านว่า “ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ” หรือ
“ลอกเอ็กซ์ฐานเอ” " loga"

เนื่องจาก f (ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเซียล) เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
ดังนั้น f^{-1} จึงเป็นฟังก์ชันและเป็นฟังก์ชัน 1 – 1

เงื่อนไข : ฐานล็อก คือ มากกว่า 0 , ไม่เท่ากับ 1 **หลังล็อก คือ** มากกว่า 0

1. $log_a M = x$ ก็ต่อเมื่อ $a^x = M$ โดย M และ $a > 0$ และ $a \neq 1$

2. $log_a 1 = 0$ และ $log_a a = 1$ เมื่อ $a \neq 1$

3. $log_a M + log_a N = log_a MN$

4. $log_a M - log_a N = log_a (M/N)$

5. $log_a M^p = p log_a M$

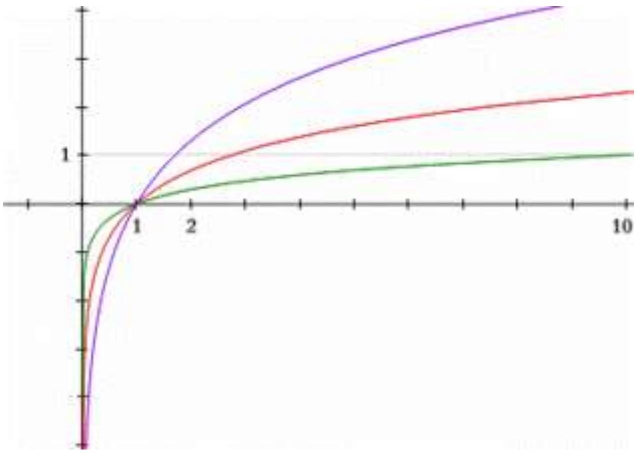
6. $log_N M = \frac{log_a M}{log_a N}$ โดยทั่วไปนิยมเปลี่ยนเป็นฐาน 10

7. $a^{log_a M} = M$

8. $M^{log_a N} = N^{log_a M}$

9. $log_{N^b} M^a = a/b\, log_N M$

10. $\ln M = log_e M \approx \frac{logM}{0.4343} = 2.3026 logM$



ลอการิทึมจากฐานต่างๆ : สีแดง คือ ฐานe, สีเขียว คือ ฐาน 10 และสีม่วง คือ ฐาน 1.7 แต่ละขีดช่วงบนแกน คือ 1 หน่วย

โปรดสังเกตว่าลอการิทึมของทุกฐานจะผ่านจุด (1, 0) (ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะจำนวนใดๆ (ที่ไม่ใช่ศูนย์) เมื่อยกกำลัง 0 มีค่าเท่ากับ 1)
ลอการิทึม เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล (ใช้ค่าคงตัว หรือ "ฐาน" เป็นเลขยกกำลัง)

ลอการิทึมของจำนวน x ที่มีฐาน b คือจำนวน n นั่นคือ x = bn
เขียนได้เป็น

$$log_b(x) = n$$

ตัวอย่างเช่น

$$log_3(81) = 4$$

เพราะว่า

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

หากเป็นจำนวนเต็มบวก, b^n คือ ผลลัพธ์ของตัวประกอบ n ตัว เท่ากับ b

$$\underbrace{b \times b \times \ldots \times b}_{n}$$

อย่างไรก็ตาม อย่างน้อย หาก b เป็นบวก นิยามนี้อาจขยายไปยังจำนวนจริง n ใดๆ ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันลอการิทึมอาจนิยามได้สำหรับจำนวนจริงบวกใดๆ สำหรับฐานบวก b อื่นๆ แต่ละฐาน นอกเหนือจาก 1 ในที่นี้ คือ ฟังก์ชันลอการิทึม 1 ฟังก์ชัน และฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล 1 ฟังก์ชัน โดยมันเป็นฟังก์ชันผกผัน

ลอการิทึม นั้นสามารถลดการดำเนินการคูณเป็นการบวก การหารเป็นการลบ ยกกำลังเป็นการคูณ และการถอดรากเป็นการหาร ดังนั้น ลอการิทึมจึงมีประโยชน์สำหรับการดำเนินการกับตัวเลขจำนวนมากให้ง่ายขึ้น และถ้ามีการใช้อย่างแพร่หลายก่อนมีการใช้คอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะการคำนวณในด้านดาราศาสตร์ , วิศวกรรมศาสตร์ , การเดินเรือ และการทำแผนที่ โดยมีคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ และยังคงใช้ในหลายรูปแบบ

คุณสมบัติ 7 ประการของลอการิทึม มีดังนี้

1. สมบัติการบวก

$$\log_a M + \log_a N = \log_a (M \cdot N)$$

Example จงรวมพจน์ของ $\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 6$

Sol^n $\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 6 = \log_2 (3 \times 4 \times 6)$

$= \log_2 72$ #

2. สมบัติการลบ

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)$$

Example จงรวมพจน์ของ $\log_2 5 - \log_2 10$

Sol^n $\log_2 5 - \log_2 10 = \log_2 \left(\frac{5}{10}\right)$

$= \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$ #

3. สมบัติของเลขลอการิทึม ที่เท่ากับเลขฐาน

$$\log_a a = 1 \text{ , เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1$$

Example จงหาค่าของ $\log_3 3$

Sol^n $\log_3 3 = 1$ #

** การนิยามในลอการิทึม จะไม่นิยามให้เป็นจำนวนลบ **

4. สมบัติของลอการิทึม 1

$$\log_a 1 = 0 \quad , \text{ เมื่อ } a > 0$$

* เหตุที่เป็นเช่นนี้ได้เพราะหากว่าเราเขียนกลับจากรูปลอการิทึม

$$\log_a 1 = 0$$

จะได้เลขยกกำลังเป็น $a^0 = 1$ แต่ a เป็น - หรือ 0 ไม่ได้

5. สมบัติเลขยกกำลังของลอการิทึม

$$\log_a M^P = P \cdot (\log_a M)$$

* คุณสมบัตินี้บอกให้เรานำเลขชี้กำลังของลอการิทึมมาไว้ด้านหน้า เพื่อนำมา

คูณกับเลขลอการิทึม *

Example $\log_5 125x = ?$

Sol^n

$$\log_5 125x = \log_5 5^3 \cdot x$$

$$= \log_5 5^3 + \log_5 x$$

$$= 3 \cdot \log_5 5 + \log_5 x$$

$$= 3 \cdot 1 + \log_5 x$$

$$= 3 + \log_5 125x \qquad \#$$

6. คุณสมบัติฐานลอการิทึมที่เขียนเป็นเลขยกกำลังได้

$$\log_{a^p} M = \frac{1}{p} \cdot (\log_a M)$$

Example $\log_8 7 = ?$

Sol^n

$$\log_8 7 = \log_{2^3} 7$$

$$= \frac{1}{3} \log_2 7 \qquad \#$$

7. คุณสมบัติการเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$, เมื่อ a,b,c > 0 และ c,b, ≠ 1

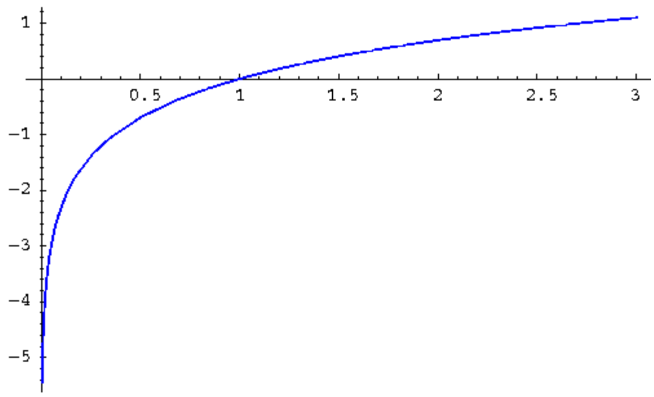
คุณสมบัติการเปลี่ยนฐานได้นี้เป็นคุณสมบัติที่สำคัญสำหรับการแก้ปัญหาสมการลอการิทึม คุณสมบัตินี้บอกว่า
หากเราไม่พอใจฐานลอการิทึมที่โจทย์กำหนดมา
เราสามารถเปลี่ยนฐานลอการิทึมใหม่ได้ตามต้องการ แต่ต้องมากว่า 0 และไม่เท่ากับ 1 ซึ่งมักเปลี่ยนเป็นฐาน 10

Example จงเปลี่ยน $\log_{3^5}$ เป็นฐาน 10

Sol^n

$$\log 5 = \frac{\log 3}{\log 5} \qquad \#$$

ลอการิทึมฐาน 10
เป็นลอการิทึมที่พบบ่อยและมักจะไม่นิยมเขียนเลขฐานกำกับไว้โดยตกลงว่าเมื่อ เขียนลอการิทึมที่ไม่มีฐานแสดงว่าเป็นลอการิทึมฐาน 10
เรียกว่า “ ลอการิทึมสามัญ ”



กราฟของฟังก์ชัน $y = log_a x$; $a > 1$ จะผ่านจุด (1,0) เสมอ เพราะ $log_a 1 = 0$

ถ้า $a > 1 y = log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R^+ ไปทั่วถึง R

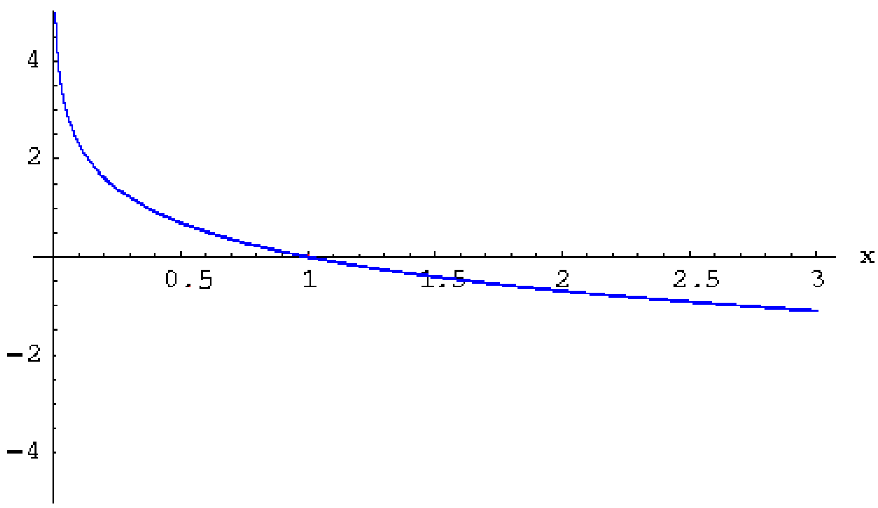
โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า

$log_a x = log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

จากฟังก์ชันลอการิทึม $y = log_a x$; $a > 1; a \neq 1$ จะได้

โดเมนของฟังก์ชัน $Dr = \{x \mid x \in R^+\}$

เรยง์ของฟังก์ชัน $Rr = \{y \mid y \in R\}$



กราฟของฟังก์ชัน $y = log_a x$; $0 < a < 1$ จะผ่านจุด (1,0)เสมอ เพราะ $log_a 1 = 0$

ถ้า $0 < a < 1 y = log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R^+ ไปทั่วถึง R

โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า

$log_a x = log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

จากฟังก์ชันลอการิทึม $y = log_a x$; $0 < a < 1$;$a \neq 1$ จะได้

โดเมนของฟังก์ชัน $Dr = \{x \mid x \in R^+\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน $Rr = \{y \mid y \in R\}$

ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

ฟังก์ชันลอการิทึมที่สำคัญมีอยู่ 2 ชนิด คือ ลอการิทึมฐานสิบ หรือลอการิทึมสามัญ กับลอการิทึมฐาน e หรือลอการิทึมธรรมชาติ

ลอการิทึมสามัญ

ลอการิทึมสามัญ คือลอการิทึมที่มีฐานเท่ากับ 10 และนิยมเขียนลอการิทึมสามัญโดยไม่ต้องมีฐานกำกับไว้ เช่น $\log_{10} 5$ เขียนแทนด้วย $\log 5$, $\log_{10} N$ **เขียนแทนด้วย** $\log N$ **,** $N \in R^+$

การหาค่าลอการิทึมสามัญของจำนวนจริงบวก N โดยที่ $1 \leq N \leq 10$

โดยใช้ตารางลอการิทึม สิ่งที่ควรทราบจากตาราง

1. ค่าลอการิทึมที่ปรากฏในตารางเป็นค่าประมาณที่อยู่ในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง

2. ตารางลอการิทึมที่กำหนดให้

จะแสดงค่าลอการิทึมสามัญของจำนวน (N) ที่มีทศนิยม 2 ตำแหน่งและมีขอบเขตตั้งแต่ 1.00 – 9.99 เท่านั้น

3. แสดงว่าเราสามารถหาค่าลอการิทึมสามัญของจำนวน (N) ที่มีทศนิยม 2 ตำแหน่ง และมีขอบเขตตั้งแต่ 1.00 – 9.99 จากตารางได้ทันที เช่น $\log 1.34$ = …………………

4. ถ้าเราต้องการหาค่าลอการิทึมสามัญของจำนวน (N) ที่มีทศนิยมมากกว่า 2 ตำแหน่ง และมีขอบเขตตั้งแต่ 1.00 – 9.99 จะหาจากตารางโดยตรงไม่ได้ เช่น N = 1.437 จะพบว่า 1.43 < 1.437 < 1.44

การหาค่าลอการิทึมสามัญของจำนวนจริงบวกใด ๆ

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกเราสามารถหาค่า $\log x$ ได้โดยเขียน x ให้อยู่ในรูป $x = N \times 10^n$ เมื่อ $1 \le N < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

หลังจากที่เราเขียนจำนวนจริงบวก x ให้อยู่ในรูป $N \times 10^n$ เมื่อ $1 \le N < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็มแล้วการหาค่า $\log x$ สามารถทำได้โดยอาศัยคุณสมบัติของลอการิทึม ดังนี้

$$x = N \times 10^n$$

$$\log x = \log (N \times 10^n)$$

$$= \log N + \log 10^n$$

นั่นคือ $\log x$ **=** $\log N + n$

ซึ่งเราเรียกค่าของ $\log N$ ว่า แมนทิสซา (mantissa) ของ $\log x$

และเรียกจำนวนเต็ม n ว่า แคแรกเทอริสติก (characteristic) ของ $\log x$

<u>แอนติลอการิทึม</u>

เป็นการดำเนินการที่ตรงข้ามกับการหาค่าลอการิทึม กล่าวคือ แทนที่จะกำหนดค่า x แล้วให้หาค่า $\log x$ แต่กลับกำหนดค่า $\log x$ แล้วให้หาค่า x แทน ซึ่งจำนวนจริง x ที่ได้เราเรียกว่า แอนติลอการิทึม ของ $\log x$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ antilog ($\log x$)

เมื่อกำหนดค่า $\log x$ เรามีวิธีการหาค่า x ได้ดังนี้

1. เขียน $\log x$ ให้เป็นผลบวกของแมนทิสซา และแคเรกเทอริสติกของ $\log x$ ดังนี้

   $\log x$ = $\log N$ + n
2. ใช้ตารางลอการิทึมสามัญหาจำนวนจริง N ที่ทำให้ N = M ดังนี้

$$\log x = \log N + n$$

$$= \log N + \log 10^n$$

$$\log x = \log (N \times 10^n)$$ เพราะฉะนั้น $x = N \times 10^n$

<u>ลอการิทึมธรรมชาติ</u>

หมายถึง ลอการิทึมที่มีฐานเป็น e โดยที่ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะจำนวนหนึ่งซึ่งมีค่าประมาณ 2.7182818 (โดยประมาณ) และนิยมเขียน ln x แทน $\log_e x$

การหาค่า ln x เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวก หาได้โดยอาศัยลอการิทึมสามัญ ดังนี้

$$\ln x = \log_e x$$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$ (แต่ $\log e = \log 2.718 \approx 0.4343$)

ดังนั้น $$\ln x = \frac{\log x}{0.4343} = 2.3026 \log x$$

สมการลอการิทึม คือ สมการที่มีลอการิทึมของตัวแปร การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการลอการิทึมทำได้โดยการกำจัดลอการิทึม ซึ่งอาศัยสมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึม โดยเฉพาะสมบัติการเป็นฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดคือค่าของ x จากสมการ log 49 ฐาน x = 2

ก. 2

ข. 4

ค. 5

ง. 7

2. ข้อใดคือค่าของ log ฐาน 4 (log 3ยกกำลัง 4ฐาน 3)

ก. 0

ข. 1

ค. 3

ง. 4

3. ค่าของ log 1 ฐาน 3 เท่ากับข้อใด

   ก. 0

   ข. 1

   ค. 2

   ง. 3

4. ค่าของ log 3 ฐาน3 เท่ากับข้อใด

   ก. 0

   ข. 1

   ค. 2

   ง. 3

5. ข้อใดคือค่าของ log 2 + log 50

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

6. ข้อใดคือค่าของ log 3 ฐาน 6 + log 24 ฐาน 6- log 2 ฐาน 6

ก.   0

ข.   1

ค.   2

ง.   3

7. ข้อใดมีค่าเท่ากับ   3 ยกกำลัง log 7 ฐาน 3

ก.   7

ข.   3

ค.   1

ง.   0

8. ข้อใดคือค่าของ log 8 ยกกำลัง 2 ฐาน 8 ยกกำลัง 3

ก.   0

ข.   1

ค.   1/2

ง.   2/3

9. กำหนด log 8.32 = 0.9201 ข้อใดคือค่าของ log 0.00832

ก. 1.0799

ข. 0.0799

ค. 1.0799

ง. 2.0799

10. กำหนด log 2.56 = 0.4082 และ log N = 2.4082
ข้อใดคือค่าของ N

ก.   2.56

ข.   256

ค.   2,560

ง.   25,600

เฉลยแบบทดสอบ

1. ง   2. ข   3. ก   4. ข   5. ค

6. ค   7. ก   8. ง   9. ง   10. ข

จงเปลี่ยนจำนวนต่อไปนี้ในรูปลอการิทึมหรือเอกซ์โปเนนเชียล

1. 9 = 3 ฐาน 3

2. 10000 = 10 ยกกำลัง 4

3. 7 = รากที่สองของ 49

4. 8 = ½ ยกกำลัง 3

5. 3= log 125 ฐาน 5

6. ½ = log 2 ฐาน 4

7. 3 = log 5 ยกกำลัง 3/2 ฐาน 5 ยกกำลัง ½

8.จงหาจานวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ log 625 ฐาน 5 = x

9.จงหาจานวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ log 8 ฐาน x =3

10. 8 ยกกำลัง 2 = 64

11. 1/3 ยกกำลัง 2 = 1/9

12. 64 ยกกำลัง 1/6 = ½

13.log 8 ฐาน 0.5 = -3

14.log 4 ฐาน รากที่สองของ 2 = 4

15. log 9 ฐาน 1/3 = -2

จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

1. log 1024 ฐาน 4
2. log 0.008 ฐาน 25
3. log 125 ฐาน5
4. log 2401 ฐาน รากที่สองของ 7
5. log 32* รากที่ห้าของ 4 ฐาน 2*รากที่สองของ 2

6. log รากที่ห้าของ 64 ฐาน 2
7. log 35+log6- log7+ log10- log3
8. log 8 ฐาน 2*log 81ฐาน3+ 4 log 400 –log256
9. log 128 ฐาน 8*log 0.25 ฐาน 4
10. 10.log 64 ฐาน 8+log 64 ฐาน 4 log 27 ฐาน 3-5

การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

เป็นการนำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึมไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น ๆ ได้แก่

- **<u>การเติบโตของประชากร</u>** ณ เวลาหนึ่งในกรณีที่การเพิ่มไม่ได้เป็นไปอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา

มีสูตรดังนี้ $n(t) = n_0(1+r)^t$

เมื่อ n (t) แทน จำนวนประชากรเมื่อเวลาผ่านไป t

n_0 แทน จำนวนประชากร ณ จุดเริ่มต้น

r แทน อัตราการเติบโตของจำนวนประชากรต่อเวลา

t แทน เวลา

- **<u>การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี</u>** ที่มีครึ่งชีวิตเท่ากับ h ปริมาณสารที่เหลืออยู่ มีสูตรดังนี้

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

เมื่อ m (t) แทน

ปริมาณของสารกัมมันตภาพรังสีที่เหลืออยู่เมื่อเวลาผ่านไป t

m_0 แทน ปริมาณของสารกัมมันตภาพรังสี ณ จุดเริ่มต้น

$$r = \frac{\ln 2}{h}$$

- **<u>การวัดระดับความเข้มเสียง</u>**
  เป็นการวัดความเข้มเสียงโดยเทียบกับความเข้มเสียงที่หูคนปกติเริ่ม

ได้ยินเป็นเกณฑ์อ้างอิง ระดับความเข้มเสียง มีสูตรดังนี้

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

เมื่อ β แทน ระดับความเข้มเสียงมีหน่วยเป็นเดซิเบล

I แทน ความเข้มเสียงที่ต้องการวัด

I_0 แทน ความเข้มเสียงที่หูคนปกติเริ่มได้ยิน

ซึ่งเท่ากับ 10^{-12} วัตต์ / ตร.ม.

- **<u>ระดับความเป็น กรด – ด่าง ของสารละลาย</u>** มีสูตรดังนี้

$$pH = -\log H^+$$

เมื่อ pH แทน ระดับความเป็น กรด – ด่าง ของสารละลาย

H^+ แทน ความเข้มข้นของประจุไฮโดรเจนในสารละลาย 1 ลิตร มีหน่วยเป็น

โมล

ที่มา

-http://school.obec.go.th/sidaschool/data/san8.pdf

-http://www.thai-mathpaper.net/documents/nut_logarithm.pdf