Matematik A, STX

07-12-2015

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Andengradsligningen løses.

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

Hvilke to tal sum er 2 men produkt er -35? Det er 7 og -5, da:

$$7 + (-5) = 2$$
$$7 \cdot (-5) = -35$$

Ligningen kan skrives om: $x^2 + 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+7) = 0$. Så løsningerne er:

$$x = -7 \vee x = 5$$

Opgave 2:

a) Man har fået angivet begyndelsesværdien og hældningskoefficienten, så den passende forskrift vil være

$$f(x) = 25x + 420$$

Hvor $f(x)$ angiver antallet af medlemmer i klubben til tidspunktet x, målt efter år 2010.

Opgave 3:

a) Man anvender produktreglen for at differentiere funktionen $f(x)$.
Lad $a(x) = x^2 + 7$ og $b(x) = \ln(x)$, så er $a'(x) = 2x$ og $b'(x) = 1/x$. Man får

$$\begin{aligned} f'(x) &= a'(x)b(x) + a(x)b'(x) \\ &= 2x\ln(x) + \frac{x^2+7}{x}, \qquad x > 0 \end{aligned}$$

Udregnes $f'(1)$ fås

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + \frac{1^2+7}{1} = 0 + 8 = 8$$

Opgave 4:

a) Forholdet udregnes.

$$k = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Så udregnes $|CB|$.

$$|CB| = k \cdot |CE| = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

Afstanden $|EB|$ findes ved

$$|EB| = |CB| - |CE| = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Som er den ønskede længde.

Opgave 5:

a) Stamfunktionen til f benævnes med F, så

$$F(x) = \int (8x^3 - 6x + 1)\, dx = 2x^4 - 3x^2 + x + k$$

Ved anvendelse af punktet P, så kan man finde k

$$-6 = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 + k \Leftrightarrow -6 = 32 - 12 + 2 + k \Leftrightarrow k = -28$$

Så forskriften for den stamfunktion F, der gennemløber P er

$$F(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 28$$

Opgave 6:

a) Der er flere måder at gribe denne opgave an på, den nemmeste er parallelforskyde.

$$y = x^2$$

Forskyd ovenstående vha. punktet P.

$$(y-3) = (x-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$y - 3 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow$$
$$y = x^2 - 8x + 19$$

Som gennemløber P.

Alternativ vej: Da parablen er symmetrisk om toppunktet, så kan man antage at y har nogle rødder som skærer i $x = 3$ og $x = 5$, så

$$3 = a(4-3)(4-5) \Leftrightarrow a = -3$$

Så gælder der:

$$y = -3 \cdot (x-3) \cdot (x-5) \Leftrightarrow y = -3x^2 + 24x - 45$$

Da der spørges efter en mulig ligning.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7:

a) Hvis to vektorer skal være ortogonale, skal deres skalarprodukt være $\mathbf{0}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Der gælder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \binom{1}{3} \cdot \binom{2}{-2} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -4 \neq 0$$

Så vektorerne er ikke vinkelrette. Man kunne også vælge den mere besværlige metode og så regne vinklen mellem vektorerne.

b) Vektoren $\vec{a}$ anvendes som retningsvektor og ved at hatte vektoren fås normalvektoren, som man anvender i linjens ligning. P anvendes som fast punkt i linjens ligning, så der gælder:

$$\hat{a} = \binom{-3}{1}$$

Så er ligningen for l:

$$-3\big(x - (-8)\big) + 1(y - 10) = 0 \Leftrightarrow$$
$$-3x + y - 34 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y = 3x + 34$$

Den ønskede linje l.

Opgave 8:

a) Trekanten ABH er en retvinklet trekant, så længden $|AB|$ er

$$|AB| = \frac{8}{\cos(40)} = 10.443$$

Bruges cosinusrelationerne i trekanten ABC fås

$$|BC| = \sqrt{10.443^2 + (8+12)^2 - 2 \cdot 10.443 \cdot (8+12) \cdot \cos(40)} = 13.75$$

Som er længden af $|BC|$.

b) Anvendelse af cosinusrelationerne for en vinkel fås

$$B = \arccos\left(\frac{10.443^2 + 13.75^2 - (8+12)^2}{2 \cdot 10.443 \cdot 13.75}\right) = 110.778^o$$

Arealet af trekanten ABC er

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10.443 \cdot (8+12) \cdot \sin(40) = 67.126$$

Arealet af trekanten ABH er

$$T_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot 10.443 \cdot 8 \cdot \sin(40) = 26.850$$

Forholdet mellem arealerne er

$$67.126/26.850 = 2.5$$

Så man kan se, at arealet af ABC er 2.5 gange så stort som arealet af ABH.

Opgave 9: [Via Maple]

a) Via Maple og tabellens oplysninger laves der eksponentiel regression.

```
restart
with(Gym) :
E1 := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14] :
E2 := [13.9, 27, 31.9, 40.9, 66.3, 99.9, 171.1, 271.8] :
y(x) := ExpReg(E1, E2, x) :
evalf[7](y(x))
                    14.38554 1.223965^x                    (1)
```

Dermed blev tallene a og b bestemt.

$$a = 1.223965$$
$$b = 14.38554$$

b) Tallet a er fremskrivningsfaktoren. Omregnes denne til vækstraten er

$$r = 1.223965 - 1 = 0.223965 = 22.3965\%$$

Så for hvert år der går, stiger virksomhedens aktiekurs med 22.4% pr. år ved hver årsafslutning efter år 2000.

Fordoblingskonstanten bestemmes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.223965)} = 3.43$$

Det betyder, at ca. hvert 3.43 år er aktiekursen fordoblet for virksomheden.

c) Ligningen $y(x) = 500$ løses.

$$14.38554 \cdot 1.223965^x = 500 \Leftrightarrow$$
$$1.223965^x = \frac{500}{14.38554} \Leftrightarrow$$
$$x\ln(1.223965) = \ln\left(\frac{500}{14.38554}\right) \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{500}{14.38554}\right)}{\ln(1.223965)} = 17.557$$

Så i år 2018 er virksomhedens aktiekurs oversteget 500.

Opgave 10:

a) Man ved, at $\sin(x)$ har maksimumsværdi 1 og minimumsværdi -1, så erstattes $\sin(0.52 \cdot t - 3.14)$ med hhv. 1 og -1 fås:

$$d(t) = 2 \cdot 1 + 7 = 9$$
$$d(t) = 2 \cdot (-1) + 7 = 5$$

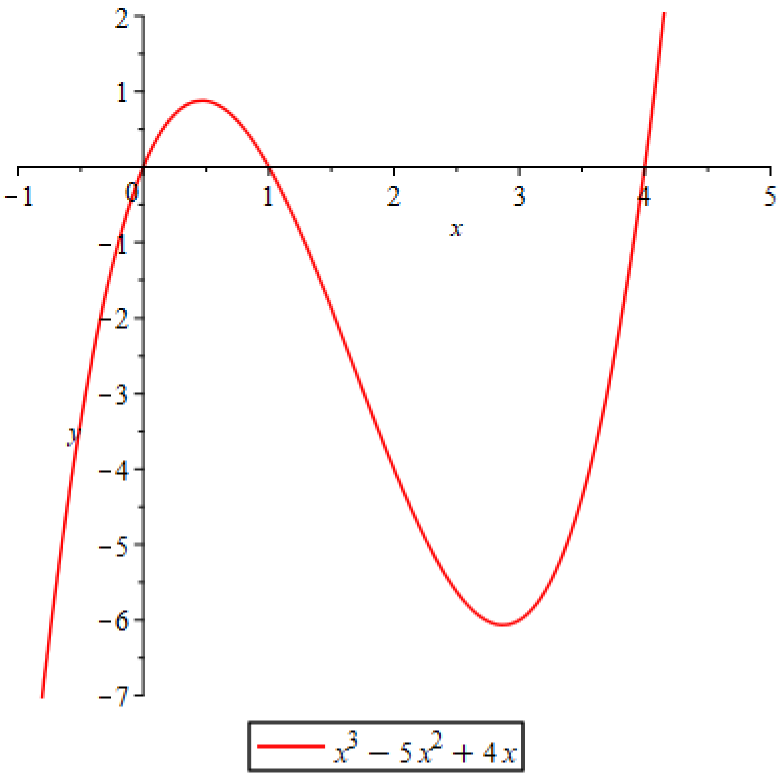
Så den højeste vandstand er 9 meter og den laveste er 5 meter.

Husker man ikke til ovenstående, så kan man også anvende differentialregning.

Opgave 11: [Via Maple]

a) Funktionen defineres i Maple og grafen tegnes.

```
restart
with(Gym) :
f(x) := x^3 - 5·x^2 + 4·x :
plot(f(x), x=-1..5, y=-7..2, legend=f(x), color="Red")
```



Arealet bestemmes numerisk, så det der er under grafen bliver lagt til det der er over grafen. I Maple udregnes det bestemte integral.

$$M = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \left|\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$M = \frac{71}{6} \qquad (1)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$M = 11.833 \qquad (2)$$

Arealet af det samlede område er $M = 11.833$.

b) I Maple bestemmes volumen af de to punktmængder.

$$V = \mathrm{Pi}\cdot\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x + \left|\mathrm{Pi}\cdot\int_1^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x\right|$$

$$V = \frac{5632\,\pi}{105} \qquad (1)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$V = 168.51 \qquad (2)$$

Som er den samlede volumen i de to punktmængder.

Opgave 12: [Via Maple]

a) I Maple defineres funktionen og man udregner $A'(100)$.

```
restart
with(Gym) :
A(t) := 8·t^1.5 :
A'(100)
```

$$120.00 \qquad (1)$$

Tallet betyder, at efter 100 timer siden olieudslippets start, vokser mængden af olien med $120m^2$ pr. time.

b) I Maple udregnes olieudslippets maksimale areal, når oliemængden er $1.5m^3$.

$$A_{max} = 10^4\cdot(1.5)^{0.75}$$

$$A_{max} = 13554.03005 \qquad (2)$$

$$A(t) = 10^4\cdot(1.5)^{0.75} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 142.1190529]]$$

Så ved $1.5m^3$ mængde olie, er det maksimale areal $13554m^2$, og dette tal sættes lig med $A(t)$, så man kan se, hvornår dette sker ved det pågældende udslip. Det viser sig at være 142.11 timer efter olieudslippet.

Opgave 13:

a) Kuglens ligning anvendes.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Indsættes oplysningerne fås

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=5^2$$

Hvis P skal ligge på kuglen, så skal ligningen være sand på begge sider af lighedstegnet. Der må gælde

$$(6-2)^2+(0-3)^2+(-4+4)^2=5^2$$
$$\Rightarrow 25=25$$

Så det er sandt.

b) Ligningen for tangentplanen til kuglen bestemmes vha. P og centrum.

$$\overrightarrow{PC}=C-P=\begin{pmatrix}2-6\\3-0\\-4-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$$

Planens ligning anvendes samt P som fast punkt, så der gælder

$$-4\cdot(x-6)+3\cdot(y-0)+0\cdot\big(z-(-4)\big)=0$$

Eller skrevet pænere:

$$-4x+24+3y=0$$

c) Parameterfremstillingen indsættes i planens ligning.

$$-4(3+t\cdot 0)+24+3\cdot(-4+t\cdot 0)=0$$
$$\Rightarrow 0=0$$

Så m ligger på planen α. Indsættes parameterfremstillingen i kuglens ligning, så er

$$\big((3+0\cdot t)-2\big)^2+\big((-4+0\cdot t)-3\big)^2+\big((2-6\cdot t)+4\big)^2=5^2\Leftrightarrow$$
$$36t^2-72t+86=25\Leftrightarrow$$
$$36t^2-72t+61=0$$

Så løses andengradsligningen. Lad $a=36$, $b=-72$ og $c=61$, diskriminanten er

$$d=b^2-4ac=(-72)^2-4\cdot 36\cdot 61=-3600$$

Da $d<0$ så findes der ingen reelle løsninger. Dermed skærer m ikke kuglen.

Opgave 14:

a) Indsættes 1000 på V's plads så isoleres h:

$$1000=2.6\cdot a^2\cdot h\Leftrightarrow$$
$$h=\frac{1000}{2.6\cdot a^2}$$

Dermed blev højden udtrykt ved a.

b) Indsættes h i formlen for overfladearealet O, så er

$$O(a) = 2.6 \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot \left(\frac{1000}{2.6 \cdot a^2}\right) = 2.6a^2 + \frac{2307.692308}{a}$$

Modellen differentieres.

$$O'(a) = 5.2a - \frac{2307.692308}{a^2}$$

Ligningen $O'(a) = 0$ løses.

$$5.2a - \frac{2307.692308}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$5.2a = \frac{2307.692308}{a^2} \Leftrightarrow$$
$$5.2a^3 = 2307.692308 \Leftrightarrow$$
$$a^3 = 443.7869823$$

Tages den tredje rod fås

$$a = \sqrt[3]{443.7869823} = 7.627663395 \approx 7.628$$

Fortegnsvariation skal bekræfte ovenstående resultat.

$$O'(6) = 5.2 \cdot 6 - \frac{2307.692308}{6^2} = -32.90256411$$
$$O'(8) = 5.2 \cdot 8 - \frac{2307.692308}{8^2} = 5.54230769$$

Så $a = 7.628$ giver den mindste overfaldeareal.

Opgave 15: [Via Maple]

a) Differentialligningen løses i Maple vha. dsolve.

$restart$

$with(Gym):$

$dsolve\left(\left\{A'(t) = \frac{3 \cdot A(t)}{100} + 7000, A(0) = 50000\right\}, A(t)\right)$

$$A(t) = -\frac{700000}{3} + \frac{850000\,e^{\frac{3\,t}{100}}}{3} \qquad (1)$$

$A(t) := -\frac{700000}{3} + \frac{850000\,e^{\frac{3\,t}{100}}}{3}:$

$A(t) = 100000$

$$-\frac{700000}{3} + \frac{850000\,e^{\frac{3\,t}{100}}}{3} = 100000 \qquad (2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = \frac{100\ln\left(\frac{20}{17}\right)}{3}\right]\right] \qquad (3)$$

$evalf[5](\%)$

$$[[t = 5.4179]] \qquad (4)$$

Så når man fik forskriften for $A(t)$, så løses ligningen $A(t) = 100000$, og der vil gå ca. 5.42 år fra man havde 50000kr og man så hvert år indbetalte 7000kr for at få 100000kr med en rente på 3%.

b) Man anvender $A(0) = 30000$, samt $p = 2.5\%$ og $A(8) = 70000$, så i Maple får man

$restart$
$with(Gym):$
$dsolve\left(\left\{A'(t) = \frac{2.5 \cdot A(t)}{100} + s, A(0) = 30000\right\}, A(t)\right)$

$$A(t) = -40\,s + e^{\frac{t}{40}}\,(30000 + 40\,s) \quad \textbf{(1)}$$

$70000 = -40\,s + e^{\frac{8}{40}}\,(30000 + 40\,s)$

$$70000 = -40\,s + e^{\frac{1}{5}}\,(30000 + 40\,s) \quad \textbf{(2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for s}}$

$$\left[\left[s = -\frac{250\left(3\,e^{\frac{1}{5}} - 7\right)}{-1 + e^{\frac{1}{5}}}\right]\right] \quad \textbf{(3)}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[s = 3766.8]] \quad \textbf{(4)}$$

Så man indbetaler ca. 3766.8 på kontoen hvert år, så man dernæst får 70000kr efter 8 år, med en rente på 2.5%.