Matematik A STX 31. maj 2012
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 1:

Givet udtrykket

$(p+q)^2 - (p^2 - q^2) - 2pq$

$= p^2 + q^2 + 2pq - p^2 + q^2 - 2pq$

$= 2q^2$

Bemærk, at vi har hævet en parentes og brugt første kvadratsætning.

Opgave 2:

Andengradsligningen løses.

$x^2 + x - 30 = 0$

Man kan spørge sig selv om hvilke to tal, der går op i 1 og ganget for at få -30.

Det gør 6 og -5, så ligningen er:

$(x-5)\cdot(x+6)$ og rødderne er altså

$x = -6 \vee x = 5$

Overbevis dig selv at disse to rødder som vi fandt, er løsningen.

Opgave 3:

Betragt vektorerne

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Arealet af parallelogrammet vil sige, at vi finder determinanten af vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

$A = |det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| = \left| det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) \right| = |3\cdot 5 - 2\cdot(-2)| = 15 + 4 = 19$

Dvs. arealet af parallelogrammet, udspændt af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er bestemt til at være $A = 19$.

Opgave 4:

Givet stamfunktionen $F(x) = x^6 \cdot e^x + 3$ og vi ønsker at finde ud af, hvilken af f_1, f_2 og f_3 der er sønderen.

$F'(x) = x^6 \cdot e^x \cdot \ln(e) + 6 \cdot x^5 \cdot e^x + 0 = x^6 \cdot e^x + 6 \cdot x^5 \cdot e^x$ og den eneste der opfylder det er $f_2(x)$.

Opgave 5:

Givet tre funktioner. Vi kan se, at alle tre skærer i $y = 4$, så det hele handler om at se på den tilhørende a-værdi.

Da $f(x) = 4 \cdot x^{-2} = \frac{4}{x^2}$ er den eneste funktion med negativ a-værdi og pr. definition er funktionen aftagende. Den eneste der opfylder dette er grafen C. Tilbage er A og B.

Grafen for $h(x) = 4 \cdot x^{0.4}$ ligger i $0 < a < 1$ og det betyder, at denne er voksende op til 1 (men er asymptote med $y = 1$) og den eneste graf der opfylder dette er B. Endelig tages udelukkelsesmetoden og grafen for A tilhører $g(x)$. (Også fordi at $a > 1$.)

Opgave 6:

Der er givet en funktion $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$.
Vi ved, at grafen har et lokalt ekstremumspunkt i $A = (2; 2)$.

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x$

Vi ved, at ved et ekstrenumspunkt er der en vandret vendetangent. Vi løser derfor to ligninger med to ubekendte. Vi har punktet og ligningerne:

$3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 12\,a + 4\,b = 0$ og $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 = 2 \Leftrightarrow 8\,a + 4\,b = 2$

Det er nu en smal sag at løse dem. Vi trækker ligningerne fra hinanden:

$$\begin{matrix} 12\,a + 4\,b = 0 \\ 8\,a + 4\,b = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow 4\,a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

og med denne værdi kan vi indsætte i en af ligningerne og finde b.

$12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot b = 0 \Leftrightarrow -6 + 4\,b = 0 \Leftrightarrow 4\,b = 6 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$ så tallene til funktionen $f(x)$ er:

$a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{3}{2}$.

(Hvorfor sættes den afledede lig 0? Tænk på differentialregning og maksimum)

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 7:

$restart :; with(Gym) :$

Opgave a

Kvartilsættet bestemmes.
2007:
$\{nedre = 24.25\ \%; median = 24.8\ \%; øvre = 25.35\ \%\}$
2011:
$\{nedre = 24.8\ \%; median = 25.3\ \%; øvre = 25.7\ \%\}$

Det ses ud fra begge boksplot, at personbeskatningen er steget fra år 2007 til år 2011. Det ses endvidere, at 50% af personbeskatningen i år 2007 faktisk er 25% i år 2011. Endvidere er 75% af personbeskatningen ca. 50% i år 2011, så der er sket en stigning.

Opgave 8:

$restart :; with(Gym) :$

Opgave a

Givet punkterne $A = (1; 1)$ og $B = (5; 3)$. Ligningen l ønskes.
Vi opstiller en tværvektor.

$\boldsymbol{AB} = \langle 5 - 1, 3 - 1 \rangle$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{8.1.1}$$

Vi finder tværvektoren.
$\widehat{\boldsymbol{AB}} = \langle -2, 4 \rangle$

$$\widehat{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{8.1.2}$$

Og dermed bruges ligningen $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, vi har:
$-2(x - 1) + 4(y - 1) = 0$

$$-2x - 2 + 4y = 0 \tag{8.1.3}$$

ELLER:
$-2(x - 5) + 4(y - 3) = 0$

$$-2x-2+4y=0 \quad \textbf{(8.1.4)}$$

Så vi har en ligning for l der er givet ved ovenstående udregning.

Opgave b

Parablen er givet ved:

$y=x^2-8x+13.5$. Afstanden fra toppunktet til linjen l ønskes. Først differentierer vi parablen og løser ligningen $y'=0$.

$y'=2x-8$, så $2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$, og så bestemmer vi y-koordinaten.

$y=4^2-8\cdot 4+13.5$

$$y=-2.5 \quad \textbf{(8.2.1)}$$

Toppunktet er derfor $T=\left(4;-\frac{5}{2}\right)$, og dernæst benytter vi distformlen.

$dist(l,T)=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, dvs.

$$dist(l,T)=\frac{\left|(-2)\cdot 4+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-2\right|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}$$

$$dist(l,T)=2\sqrt{5} \quad \textbf{(8.2.2)}$$

$evalf[5]$(**(8.2.2)**)

$$dist(l,T)=4.4722 \quad \textbf{(8.2.3)}$$

Som er afstanden fra toppunktet til l.

Overbevis dig om, at afstanden virkelig er $dist(l,T)=4.4722$.

Opgave c

Man kan isolere y i l, dvs. man får $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

og sættes den lig med parablen y får man

$x^2-8x+13.5=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$$x^2-8x+13.5=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad \textbf{(8.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=6.500000000],[x=2.]] \quad \textbf{(8.3.2)}$$

Indsættes $x=2$ i linjen for l eller parablen y fås:

$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2} \tag{8.3.3}$$

Dvs. koordinatsættet til projektionen af toppunktet på linjen l er:
$P=\left(2;\frac{3}{2}\right)$.

Man kunne også opstille en ny ligning for m.
Vi bruger vektor **AB** og vi bruger toppunktet som koordinat.
$4(x-4)+2\left(y+\frac{5}{2}\right)=0$

$$4x-11+2y=0 \tag{8.3.4}$$

Vi løser nu to ligninger med to ubekendte.
$solve(\{4x-11+2y=0,-2x-2+4y=0\})$

$$\left\{x=2, y=\frac{3}{2}\right\} \tag{8.3.5}$$

Opgave 9:

$restart:; with(Gym):$

Opgave a

Vi ved, at $AB := 22.4:; BC := 12.8:$ og $AC := 28.0:$
Så vinkel $\angle ACB$ bestemmes.

$$\angle ACB := invCos\left(\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}\right)$$

$$51.51414362 \tag{9.1.1}$$

Vinkel C eller $\angle ACB$ er derved bestemt. Arealet bestemmes. Vi bruger ½-appelsinformlen.

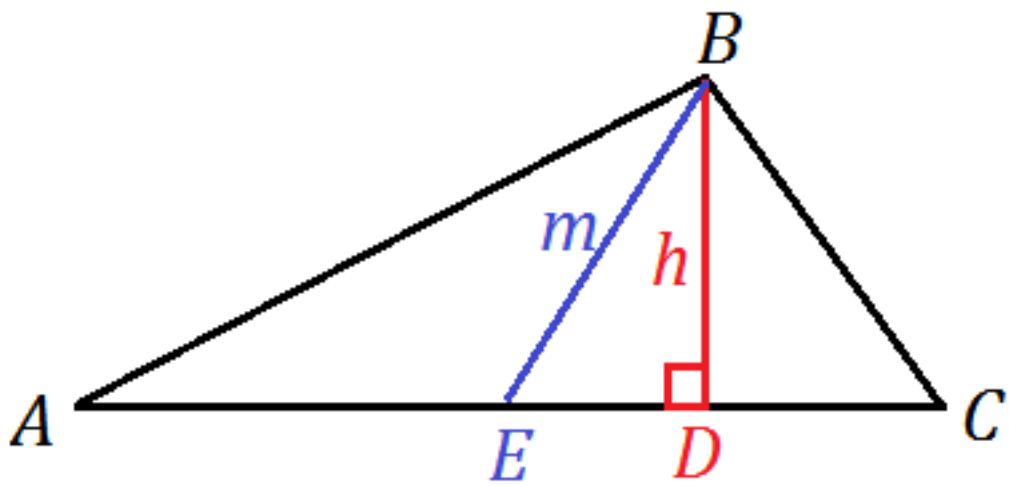
$$T=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot Sin(\angle ACB)$$

$$T=140.2709150 \tag{9.1.2}$$

Som er arealet af trekanten $\triangle$ABC.

Opgave b

Vi tegner trekanten med de relevante oplysninger.



Da vi kender længden af AC som er 28, så er $AE = CE = 14$. Vi bestemmer nu DC vha. trekanten DBC
$DC = BC \cdot Cos(C)$, og da vi har defineret en del oplysninger, så er CD:
$DC = 12.8 \cdot Cos(51.51414362)$

$$DC = 7.965714285 \quad \textbf{(9.2.1)}$$

Dermed har vi fundet DC. Vi bruger nu CE=14 og dermed er længden DE:
$DE = CE - DC$, dvs.
$DE = 14 - 7.965714285$

$$DE = 6.034285715 \quad \textbf{(9.2.2)}$$

Den søgte afstand er dermed fundet til at være $DE = 6.034285715$.

Opgave 10:

$restart :; with(Gym) :$
Vi definerer oplysningerne fra tabellen.
$Masse := [0.025, 0.314, 3.5, 11.4] :$
$Hastighed := [72.85, 529.40, 2751, 7079.4] :$

Opgave a

Vi bruger potensregression for oplysningerne
$v(m) := PowReg(Masse, Hastighed, m) :$
$v(m)$

$$1153.81051948171\, m^{0.739525803225459} \quad \textbf{(10.1.1)}$$

Dermed fik vi bestemt tallene a og b (som kan aflæses i forskriften).

Opgave b

Da massen betegnes m og da vi har et dyr på 70kg, så er
$v(70)$

$$26707.4303358771 \quad \textbf{(10.2.1)}$$

Dvs. hastigheden hvorved blodplasmaet renses er 26707.430 $\frac{mL}{h}$

Dernæst løses ligningen hvorfor hastigheden er 5000 $\frac{mL}{h}$, dvs.

$v(m) = 5000$

$$1153.81051948171\, m^{0.739525803225459} = 5000 \quad \textbf{(10.2.2)}$$

$solve(\textbf{(10.2.2)})$

$$7.263406517 \quad \textbf{(10.2.3)}$$

Dvs. dyret vejer 7.263kg.

Opgave c

Eftersom vi arbejder med en potensfunktion, så bruges formlen $F_v = F_m^a$, dvs.

$(1 + r_v) = (1 + r_m)^a$ og vi indsætter tallene:

$1 + r_v = \left(1 + \frac{20}{100}\right)^{0.739525803225459}$

$$1 + r_v = 1.144343941 \quad \textbf{(10.3.1)}$$

$solve(\textbf{(10.3.1)})$

$$0.1443439410 \quad \textbf{(10.3.2)}$$

$100 \cdot 0.1443439410$

$$14.43439410 \quad \textbf{(10.3.3)}$$

Dvs. når massen af dyret øges med 20%, så øges ændringen i hastigheden med 14.434 %.

Opgave 11:

$restart :; with(Gym) :$
local D

$A := [11, -1, 3] :; B := [8, 26, 12] :; C := [12, 22, 0] :; \mathrm{D} := [12, 0, 0] :; E := [-4, 22, 0] :; F := [0, 26, 12] :; G := [0, -1, 3] :$

Dermed er alle punkter defineret.

Opgave a

Vi opstiller nu to vektorer for efter at krydse dem.

$\boldsymbol{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 27 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{11.1.1}$$

$\boldsymbol{CD} := \langle \mathrm{D} - C \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.1.2}$$

Og dermed har vi to vektorer. Vi laver krydsprodukt for at få den tilhørerende normalvektor på $\boldsymbol{AB}$ og $\boldsymbol{CD}$.

$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{CD}$

$$\begin{bmatrix} 198 \\ 0 \\ 66 \end{bmatrix} \tag{11.1.3}$$

Alternativ kommando:

$linalg[crossprod](\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{CD})$

$$\begin{bmatrix} 198 & 0 & 66 \end{bmatrix} \tag{11.1.4}$$

Som er normalvektoren. Dernæst er planen for α. Bemærk, at punktet A vælges som et fast punkt.

$198 \cdot (x - 11) + 0 \cdot (y - (-1)) + 66 \cdot (z - 3) = 0$

$$198\,x - 2376 + 66\,z = 0 \tag{11.1.5}$$

Og denne plan α indeholder punkterne $ABCD$.

Opgave b

Givet planen for β. Den er:

$3\,y - z = 66$

$$3\,y - z = 66 \tag{11.2.1}$$

Og planen for α er

$198\,x - 2376 + 66\,z = 0$

$$198\,x - 2376 + 66\,z = 0 \tag{11.2.2}$$

Vinklen mellem planerne er fundet udelukkende af deres normalvektorer. Vi definerer de to nye normalvektorer:

$\boldsymbol{n}_{\alpha} := \langle 198, 0, 66 \rangle :$

$\boldsymbol{n}_{\beta} := \langle 0, 3, -1 \rangle :$

Og indsættes disse i nedenstående formel, så er vinklen:

$$v_{stump} = invCos\left(\frac{\boldsymbol{n}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{n}_{\beta}}{len(\boldsymbol{n}_{\alpha}) \cdot len(\boldsymbol{n}_{\beta})}\right)$$

$$v_{stump} = 95.73917047 \qquad \textbf{(11.2.3)}$$

Man kunne også bruge kommandoen vinkel:

$$v_{stump} = vinkel(\boldsymbol{n}_{\alpha}, \boldsymbol{n}_{\beta})$$

$$v_{stump} = 95.73917047 \qquad \textbf{(11.2.4)}$$

Alternativt hvis man bedre kan lide den klassiske metode med at regne i hånden:

$$v_{stump} = invCos\left(\frac{198 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 66 \cdot (-1)}{\sqrt{198^2 + 0^2 + 66^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2}}\right)$$

$$v_{stump} = 95.73917047 \qquad \textbf{(11.2.5)}$$

Vi fik præcis det samme. Vi bestemmer nu den spidse vinkel og dermed den ønskede vinkel.

$v = 180 - v_{stump}$, dvs.

$v = 180 - 95.73917047$

$$v = 84.26082953 \qquad \textbf{(11.2.6)}$$

Dermed er den ønskede vinkel mellem de to flader bestemt.

Opgave c

Vi opstiller nu nogle vektorer:

$\boldsymbol{AB}$:; $\boldsymbol{AD}$:

For trekanten ABD.

$\boldsymbol{CB}$:; $\boldsymbol{CD}$:

For trekanten BCD.

Vi laver krydsprodukt:

$AB \times AD; CB \times CD$

$$\begin{bmatrix} -90 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 264 \\ 0 \\ 88 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11.3.1)}$$

For trekanten ABD er arealet:

$$T_{ABD} := \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-90)^2 + 0^2 + (-30)^2}$$

$$15\sqrt{10} \quad \textbf{(11.3.2)}$$

For trekanten BCD er arealet:

$$T_{BCD} := \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(264)^2 + 0^2 + (88)^2}$$

$$44\sqrt{10} \quad \textbf{(11.3.3)}$$

Dermed er arealet af $ABCD$:

$T = T_{ABD} + T_{CBD}$

$$T = 59\sqrt{10} \quad \textbf{(11.3.4)}$$

$evalf[7]$(**(11.3.4)**)

$$T = 186.5744 \quad \textbf{(11.3.5)}$$

Hvilket er det ønskede.

Opgave 12:

$restart :; with(Gym) :$

Opgave a

Givet differentialligningen:

$$S'(t) = 1.5 - \frac{2}{100 + t} \cdot S(t)$$

$$\mathrm{D}(S)(t) = 1.5 - \frac{2\,S(t)}{100 + t} \quad \textbf{(12.1.1)}$$

Vi bestemmer den partikulære løsning:

$$dsolve\left(\left\{S'(t) = 1.5 - \frac{2}{100 + t} \cdot S(t), S(0) = 30\right\}, S(t)\right)$$

$$S(t) = 50 + \frac{1}{2}\,t - \frac{200000}{(100 + t)^2} \quad \textbf{(12.1.2)}$$

Som gennemløber $S(0) = 30$.

$$S(t) := 50 + \frac{1}{2}\,t - \frac{200000}{(100 + t)^2} :$$

Er altså forskriften for $S(t)$.

Opgave b

Tidspunktet hvorved der er 60kg salt er ved at løse ligningen:

$S(t) = 60$

$$50 + \frac{1}{2}\,t - \frac{200000}{(100+t)^2} = 60 \qquad \textbf{(12.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$40.31626828 \qquad \textbf{(12.2.2)}$$

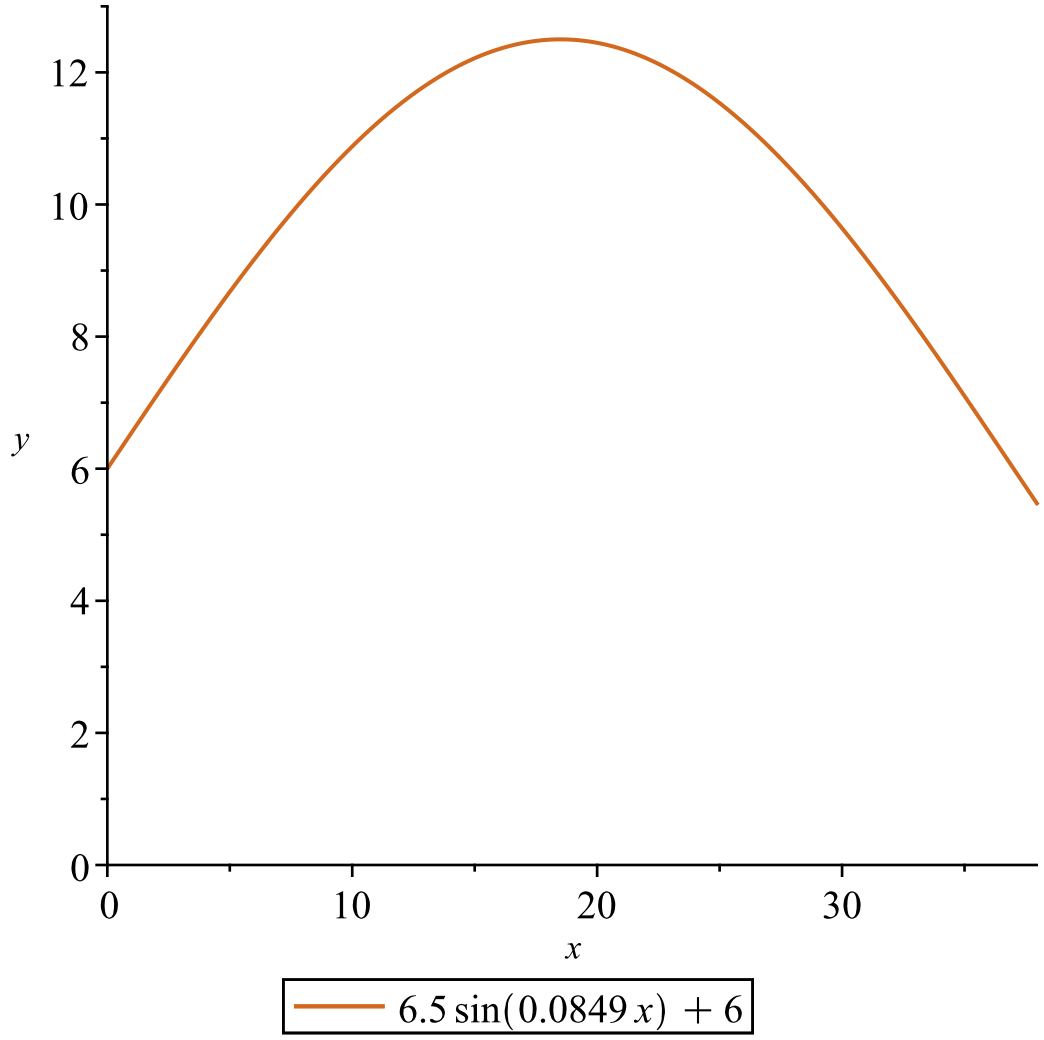
Så efter 40 minutter og 32 sekunder vil der være ca. 60kg salt i karret.

Opgave 13:

restart :; *with*(*Gym*) : Vi definerer funktionen
$f(x) := 6.5 \cdot \sin(0.0849 \cdot x) + 6$:

Opgave a

Vi tegner grafen for $f(x)$.
plot($f(x)$, $x = 0..38$, $y = 0..13$, *color* = ["Chocolate"], *legend* = [$f(x)$])



Arealet af M bestemmes.

$$M = \int_0^{38} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$M = 380.8474566 \quad \textbf{(13.1.1)}$$

Arealet er dermed fundet.

Opgave b

Overfladearealet bestemmes.

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{38} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$O = 2545.638604 \quad \textbf{(13.2.1)}$$

Dermed er overfladearealet af lampen bestemt til at være $O = 2545.639\ cm^2$.

Opgave 14:

$restart :; with(Gym) :$ **local** O

Opgave a

Vi bestemmer beholderens volumen vha r og h.
Volumen af en kasse er
$V = l \cdot b \cdot h$ og vi har:

$$V_{kasse} = 2 \cdot r \cdot 2 \cdot r \cdot h$$

$$V_{kasse} = 4\, r^2\, h \quad \textbf{(14.1.1)}$$

Volumen for en halv kugle er

$$V_{halvkugle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3$$

$$V_{halvkugle} = \frac{2}{3}\, \pi\, r^3 \quad \textbf{(14.1.2)}$$

Volumen af beholderen er: $V_{beholder} = V_{kasse} + V_{halvkugle}$, dvs.:

$$V_{beholder} = 4\, r^2\, h + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3$$

$$V_{beholder} = 4\, r^2\, h + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3 \quad \textbf{(14.1.3)}$$

Dermed har vi beholderens volumen udtrykt ved r og h.

Opgave b

Vi får oplyst, at volumen af beholderen er 5. Vi skal udtrykke h vha r, så vi isolerer h i volumen formlen for beholderen.

$$5 = 4\, r^2\, h + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3$$

$$5 = 4\,r^2\,h + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3 \qquad \textbf{(14.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for h}}$

$$h = -\frac{1}{4}\,\frac{-5 + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3}{r^2} \qquad \textbf{(14.2.2)}$$

$\overset{\text{simplify}}{=}$

$$h = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\,\pi\,r^3}{r^2} \qquad \textbf{(14.2.3)}$$

Overfladearealet af en kasse er pr. definition givet ved formlen:
$O = 2(\,l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$. I vores tilfælde med beholderen har vi:

$O_{kasse} = 2(\,2\,r \cdot 2\,r + 2\,r \cdot h + 2\,r \cdot h) = 8\,h\,r + 8\,r^2$

Men det var kun for kassen. Eftersom vi også arbejder med overfladearealet har vi to faktorer der stadig gælder:
1) Den halve kugles overfladeareal
2) Kassen og kuglen må ikke have flader der overlapper hinanden.
Overfaldearealet af den halve kugle er (kig i vedhæftet formelsamling på opgavesættet)

$O_{halvkugle} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Vi skal nu eliminere kassens flade låg med arealet af en cirkel. Arealet af en virkel er:

$A = \pi \cdot r^2$ og vi har faktisk r. Derfor er kassens overfladeareal givet ved:

$O_{kasse-cirkel} = 8\,h\,r + 8\,r^2 - \pi \cdot r^2$

Den halve kugle fandt vi før. Derfor er den samlede overfladeareal af hele beholderen:

$O_{beholder} = \left(8\,h\,r + 8\,r^2 - \pi \cdot r^2\right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Endelig kan vi nu indsætte $h = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\,\pi\,r^3}{r^2}$ i udtrykket ovenfor:

$$O_{beholder} = \left(8 \cdot \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\,\pi\,r^3}{r^2} \cdot r + 8\,r^2 - \pi \cdot r^2\right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Vi prøver at reducere det. I Maple bruge "Expand".

$$\left(8\cdot\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\pi r^3}{r^2}\cdot r+8r^2-\pi\cdot r^2\right)+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 \overset{\text{expand}}{=} -\frac{1}{3}\pi r^2+8r^2+\frac{10}{r}$$

Da vi nu har den på denne form, så er det meget enkelt at reducere resten.

$$-\frac{1}{3}\pi r^2+8r^2+\frac{10}{r}$$

$$=\frac{10}{r}-\frac{1}{3}\pi r^2+8r^2$$

$$=\frac{10}{r}+\left(-\frac{1}{3}\cdot\pi+8\right)\cdot r^2$$

$$=\frac{10}{r}+\left(8-\frac{\pi}{3}\right)\cdot r^2$$

Som også er funktionsudtrykket

$$O(r)=\frac{10}{r}+\left(8-\frac{\pi}{3}\right)\cdot r^2$$

$$O(r)=\left(-\frac{1}{3}\pi+8\right)r^2+\frac{10}{r} \qquad \textbf{(14.2.4)}$$

Dermed passer vores lange udregninger. Vi har fået den ønskede form, og dermed passer pengene.

Opgave c

Vi skal nu argumentere for, at r er mindst mulig, når vi har $0<r<50$.
Vi har funktionen:

$$O(r)=\frac{10}{r}+\left(8-\frac{\pi}{3}\right)\cdot r^2$$

Funktionen differentieres.

$$O'(r)=-\frac{10}{r^2}+2\cdot r\cdot\left(8-\frac{\pi}{3}\right)$$

Vi sætter ovenstående lig med 0.

$$-\frac{10}{r^2}+2\cdot r\cdot\left(8-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$-\frac{10}{r^2}+2\left(8-\frac{1}{3}\pi\right)r=0 \qquad \textbf{(14.3.1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve}}$$

$$0.8959216638 \qquad \textbf{(14.3.2)}$$

Og dette er den r-værdi der gør, at beholderens overfladeareal bliver mindst mulig.
Vi tjekker ved at differentere funktionen to gange:

$O''(r) = \frac{20}{r^3} + 2 \cdot \left(8 - \frac{\pi}{3}\right)$ og vi indsætter r.

$O''(0.8959216638)$, dvs.:

$$\frac{20}{0.8959216638^3} + 2 \cdot \left(8 - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$41.71681470 \qquad \textbf{(14.3.3)}$$

Da outputtet er større end 0, er der tale om et lokalt minimum og dermed er den r-værdi en værdi, der faktisk gør, at vores beholder bliver mindst mulig i dette punkt.

Matematik A STX 15. august 2012
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 1:

Givet oplysningerne. Vi har x som antal år og $f(x)$ som er årlig elforbrug for et fjernsyn. Modellen er:

$f(x) = 765 + 82x$

Som er en lineær funktion med $b = 765$ og $a = 82$.

Opgave 2:

Ligningen for tangenten er $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ og vi har punktet $P(2, f(2))$.

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 3 \cdot 4 - 8 + 8 = 12$

$f'(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$

Så tangenten er:

$y = 8(x - 2) + 12 \Rightarrow y = 8x - 4$

Opgave 3:

Vi bestemmer $|AB| = e$. vha Pythagoras

$e^2 = b^2 + a^2$, så

$e^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

Dermed er $e = |AB| = 13\ cm$.

Vi bruger skalafaktoren.

$k = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Længden $|CD|$ bestemmes.

$|CD| = k \cdot |BE|$, dvs. $|CD| = \frac{3}{2} \cdot 5 = 7.5$

Men da $FD = CD$, så er

$|FC| = 2 \cdot |CD| = 2 \cdot 7.5 = 15\ cm$

Opgave 4:

Givet ligningen

$x^2+2x+y^2-4y=4$, vi bestemmer cirklens radius og koordinatsæt til centrum

$x^2+1^2+2x+y^2+(-2)^2-4y=4+1^2+(-2)^2$

$(x+1)^2+(y-2)^2=9$

Dermed er koordinatsættet til cirklens centrum

$C=(-1;2)$ og radius er $r=3$.

Bemærk vi har brugt kvadratkomplettering.

Opgave 5:

Det oplyste integrale bestemmes.

$$\int \frac{4x}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Her er $t=2x^2+3$ og den differentieres. Man får $\frac{dt}{dx}=4x \Leftrightarrow dt=4x\cdot dx \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{4x}$

Så integralet er nu:

$\int \frac{4x}{t}\cdot\frac{1}{4x}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln(|t|)+k$ og her indsættes t. Vi får:

$\ln(|t|)+k=\ln\left(2x^2+3\right)+k$ for $x>0$ pga. andengradspolynomiet.

Vi har brugt substitution ved integration.

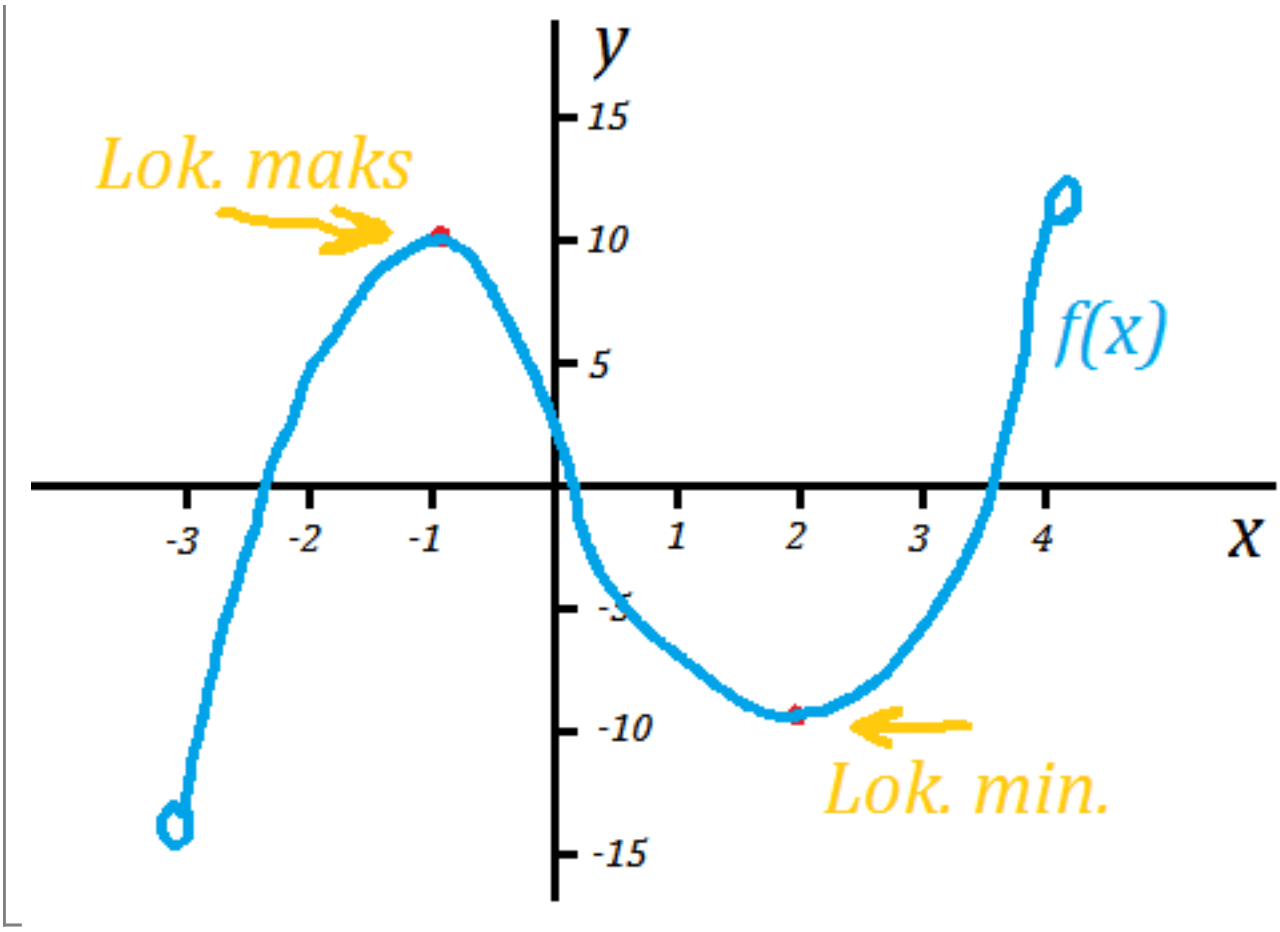
Opgave 6:

Krav 1) Vi har $x\in(-3;4)$

Krav 2) Vi har $f(-1)=10$ og $f(2)=-9$

Krav 3) Se i opgavesættet.

Vi tegner en funktion som opfylder betingelserne.


y
15
10
5
-5
-10
-15
-3
-2
-1
1
2
3
4
x
Lok. maks
Lok. min.
f(x)

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Bemærk, at vektorer er angivet med fed.

Eksempel: $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{AB}$

Opgave 7:

$restart :; with(Gym) :$

Opgave a

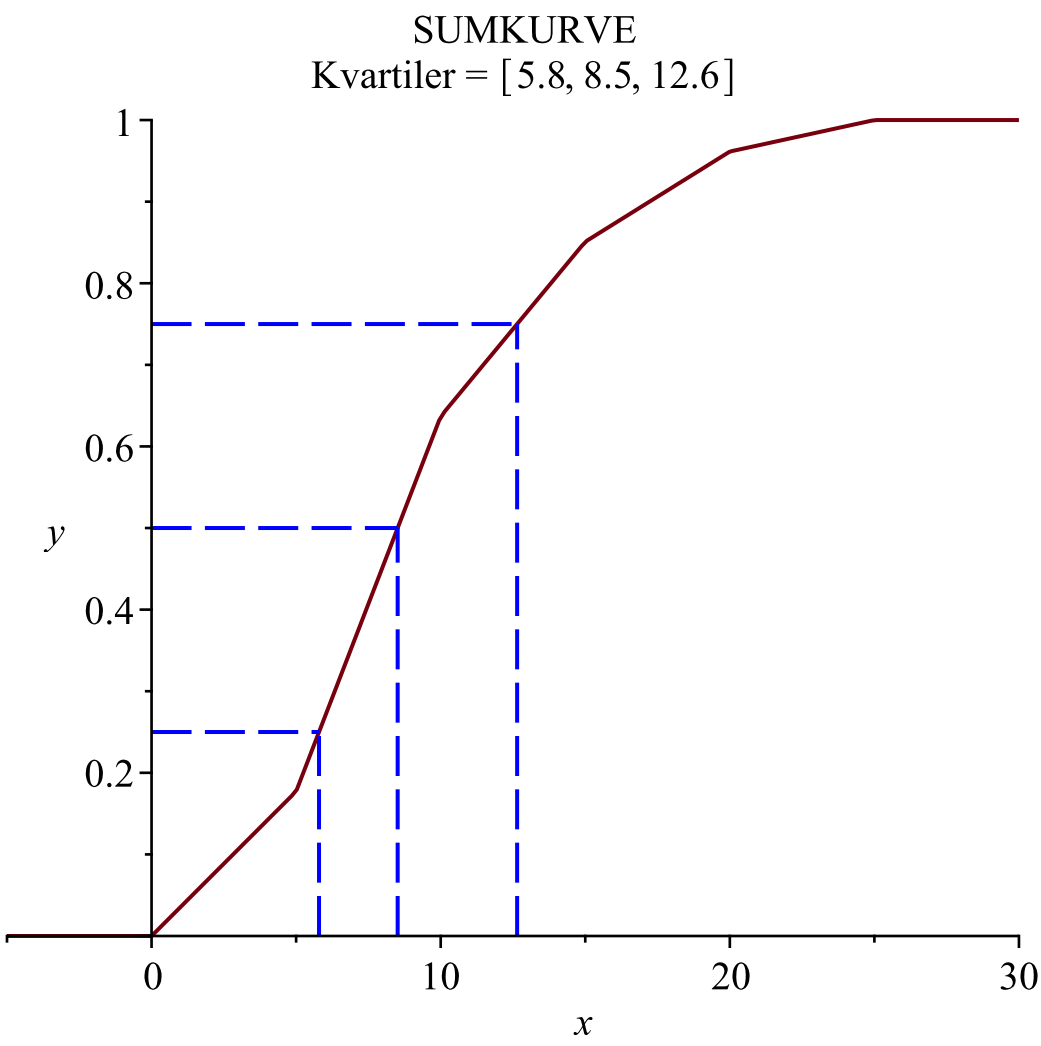
Oplysningerne defineres i en matrix.

$obs := \langle\langle 0..5, 5..10, 10..15, 15..20, 20..25 | 101, 262, 122, 63, 22\rangle\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0..5 & 101 \\ 5..10 & 262 \\ 10..15 & 122 \\ 15..20 & 63 \\ 20..25 & 22 \end{bmatrix} \quad \textbf{(21.1.1)}$$

Vi tegner sumkurven vha. kommandoen:

$plotSumkurve(obs)$



Opgave b

Kvartilsættet blev bestemt ved plottet, men kan også findes via kommandoen:
$kvartiler(obs)$

$$[5.7920, 8.5115, 12.643] \quad \textbf{(21.2.1)}$$

Dernæst finder vi ud af, hvor mange elever er har over 12% fravær.
$f(t) := sumkurve(obs, t)$:
$1 - f(12)$

$$0.277543859649123 \quad \textbf{(21.2.2)}$$

Dvs. 27.754 % af eleverne har over 12% fravær.

Opgave 8:

$restart :; with(Gym) :$

Opgave a

Vinkel A bestemmes vha cosinusrelationerne.

$$\angle A = invCos\left(\frac{12.5^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 12.5 \cdot 10}\right)$$

$$\angle(A) = 97.52738229 \quad \textbf{(22.1.1)}$$

Dermed har vi fundet vinkel $A = 97.52738229^o$ som ønsket.

Opgave b

Vi har at vinkel E er 64°, vinkel C som er 18.5^o og $|DE| = 3.5$, så vi bruger sinusrelationerne

$$\frac{Sin(64)}{|CD|} = \frac{Sin(18.5)}{3.5}$$

$$\frac{0.8987940466}{|CD|} = 0.09065847328 \quad \textbf{(22.2.1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for CD}}$$

$$[[CD = 9.914065548], [CD = -9.914065548]] \quad \textbf{(22.2.2)}$$

Den søgte afstand er så $|CD| = 9.914\ cm$.

Opgave 9:

$restart :; with(Gym) :$

$L1 := [0, 1, 2, 3] :; L2 := [0.48, 1.08, 2.84, 7.16] :$

Opgave a

Vi bruger eksponentiel regression.

$m(t) := ExpReg(L1, L2, t) :$

$m(t)$

$$0.461942156964632\ 2.47794118464703^t \quad \textbf{(23.1.1)}$$

Dermed er tallene a og b fundet, som kan ses i ovenstående forskrift.

Opgave b

Vi har at år 2014 faktisk er $t = 6$, så

$m(6)$

$$106.938370338937 \quad \textbf{(23.2.1)}$$

I år 2014 var den globale mobile datatrafik ca. 106.9383 *exabyte.*

Den årlige vækstrate er:

$r_m = \left(2.47794118464703^1 - 1\right) \cdot 100$

$$r_m = 147.7941185 \quad \textbf{(23.2.2)}$$

Dvs. vækstraten er bestemt til at være 147.7941185 %

Opgave c

Vi bruger fordoblingskonstanten.

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(2.47794118464703)}$

$$T_2 = 1.102015749 \ln(2) \quad \textbf{(23.3.1)}$$

$evalf[5]$ (**(23.3.1)**)

$$T_2 = 0.76385 \quad \textbf{(23.3.2)}$$

Tallet fortæller, at den globale datatrafik fordobles ca. hver 9 måned fra år 2008!

Opgave 10:

$restart :; with(Gym) :$

local O;**local** D

$\mathrm{O} := [0, 0, 0] :; A := [80, -50, 125] :; B := [0, 0, 150] :; C := [0, 300, 150] :; \mathrm{D} := [80, 350, 125] :; E := [0, 300, 0] :$

Opgave a

Vi opstiller en ligning for planen i OAB.

$\boldsymbol{OA} := \langle A - \mathrm{O} \rangle$

$$\begin{bmatrix} 80 \\ -50 \\ 125 \end{bmatrix} \quad \textbf{(24.1.1)}$$

$\boldsymbol{OB} := \langle B - \mathrm{O} \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} \quad \textbf{(24.1.2)}$$

Vi krydser vektorerne.

$linalg[crossprod](\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB})$

$$\begin{bmatrix} -7500 & -12000 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(24.1.3)}$$

Og dermed har vi normalvektoren. Vi opstiller planen vha. et fast punkt. Vi tager O.

$-7500 \cdot (x - 0) - 12000 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0$

$$-7500\,x - 12000\,y = 0 \qquad \textbf{(24.1.4)}$$

Som er planens ligning for trekanten OAB. Vi bestemmer den vinkel mellem endefladen OAB og frontfladen.

(Strengt taget kunne man bare nøjes med outputtet fra krydsproduktet, da det jo er normalvektoren, så ligningen for planen var faktisk helt unødvendig.)

$\boldsymbol{n}_{OAB} := \langle -7500, -12000, 0\rangle$:

$\boldsymbol{n}_{frontflade} := \langle -25, 0, 16\rangle$:

$$v_{spids} = invCos\left(\frac{\boldsymbol{n}_{OAB}.\boldsymbol{n}_{frontflade}}{len(\boldsymbol{n}_{OAB})\cdot len(\boldsymbol{n}_{frontflade})}\right)$$

$$v_{spids} = 63.48686591 \qquad \textbf{(24.1.5)}$$

Så den ønskede vinkel er $v_{spids} = 63.48686591^{o}$.

Opgave b

Arealet af frontfladen bestemmes.

$\boldsymbol{OD} := \langle \mathrm{D} - \mathrm{O}\rangle$

$$\begin{bmatrix} 80 \\ 350 \\ 125 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(24.2.1)}$$

$\boldsymbol{AE} := \langle E - A\rangle$

$$\begin{bmatrix} -80 \\ 350 \\ -125 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(24.2.2)}$$

$linalg[crossprod](\boldsymbol{OD}, \boldsymbol{AE})$

$$\begin{bmatrix} -87500 & 0 & 56000 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(24.2.3)}$$

Arealet af frontfladen er

$$T = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-87500)^2 + 0^2 + (56000)^2}$$

$$T = 1750\sqrt{881} \qquad \textbf{(24.2.4)}$$

$evalf[10](\textbf{(24.2.4)})$

$$T = 51942.87728 \qquad \textbf{(24.2.5)}$$

Dvs. arealet af frontfalden er faktisk $T = 51942.87728\ cm^2$.

Opgave c

Ligningen for frontfladen er

$-87500(x-0)+0(y-0)+56000(z-0)=0$

$$-87500\,x+56000\,z=0 \tag{24.3.1}$$

Og parameterfremstillingen er:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} + t\cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 60 \\ -25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\,t \\ 60\,t \\ 150-25\,t \end{bmatrix} \tag{24.3.2}$$

Koordinatsættet til det punkt på frontfladen findes ved at indsætte parameterfremstillingen i planen for frontfladen. Man har:

$-87500\cdot 16\,t+56000\cdot(150-25\,t)=0$

$$-2800000\,t+8400000=0 \tag{24.3.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=3]] \tag{24.3.4}$$

For $t=3$ indsættes i parameterfremstillingen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} + 3\cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 60 \\ -25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 180 \\ 75 \end{bmatrix} \tag{24.3.5}$$

Koordinatsættet til det punkt hvor lyset skærer frontpladen er $x=48; y=180; z=75$.

Opgave 11:

$restart:; with(Gym):$

Opgave a

Vi har højden som er 120feet og grundlinjen der er 320feet. Derfor kan vi finde et andengradspolynomium ved at antage, at

$r_1=\frac{-320}{2}$ og $r_2=\frac{320}{2}, f(0)=120$. vi har:

$f(x)=a\cdot\left(x+r_1\right)\cdot\left(x+r_2\right),$

$$120 = a \cdot \left(0 + \frac{-320}{2}\right) \cdot \left(0 + \frac{320}{2}\right)$$

$$120 = -25600\, a \qquad \textbf{(25.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$\left[\left[a = -\frac{3}{640}\right]\right] \qquad \textbf{(25.1.2)}$$

Vi indsætter a nedenfor i samme formel:

$$-\frac{3}{640}\,(x-160)\,(x+160) \overset{\text{expand}}{=} -\frac{3}{640}\,x^2 + 120$$

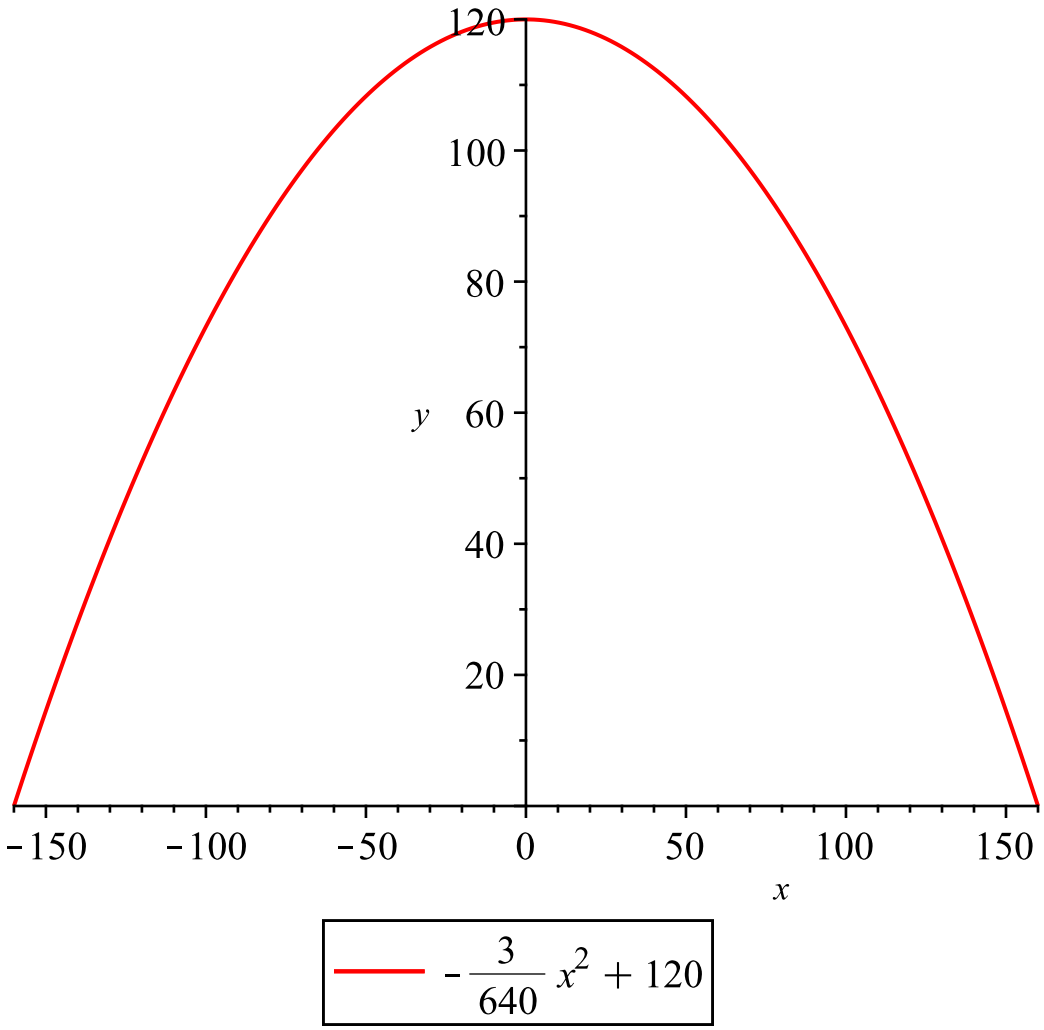
Forskriften er derfor:

$$f(x) := -\frac{3}{640}\,x^2 + 120$$

$$x \rightarrow -\frac{3}{640}\,x^2 + 120 \qquad \textbf{(25.1.3)}$$

Vi tegner grafen.

$plot(f(x), x = -160\,..160, y = 0\,..120, color = [\text{"Red"}], legend = [f(x)])$



Som er broens bue.

Opgave 12:

$restart:; with(Gym):$ Vi definerer den enorm lange funktion:

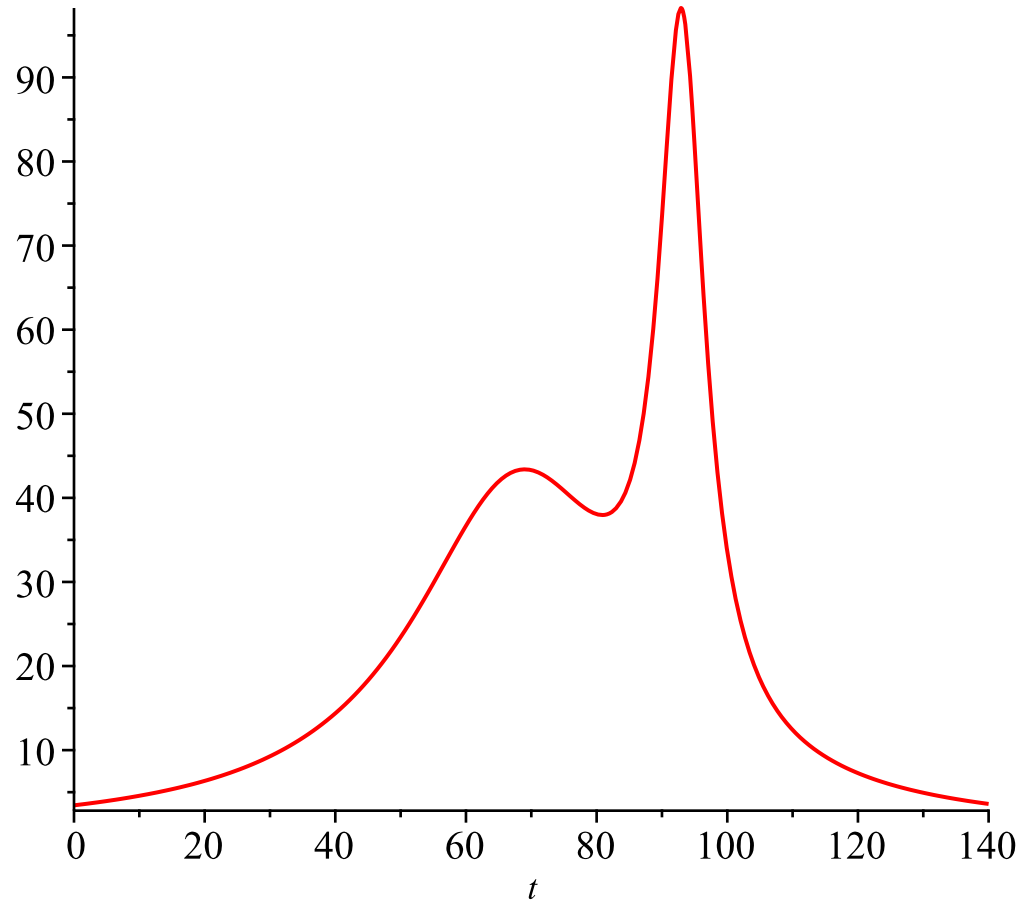
$$a(t) := \frac{16400}{(t-68)^2+400} + \frac{1480}{(t-93)^2+18}:$$

Defineret i intervallet $t \in [0; 140]$.

Opgave a

Vi tegner grafen.

$plot(a(t), t=0..140, color=["Red"], legend=[a(t)])$



$$\frac{16400}{(t-68)^2+400}+\frac{1480}{(t-93)^2+18}$$

Vi differentierer funktionen og løser ligningen $a'(t)=0$. Dvs.:
$a'(t)=0$

$$-\frac{16400\,(2\,t-136)}{\left((t-68)^2+400\right)^2}-\frac{1480\,(2\,t-186)}{\left((t-93)^2+18\right)^2}=0 \qquad \textbf{(26.1.1)}$$

$intervalsolve(a'(t)=0, t=0\,..140)$

Warning, some roots are returned as numeric approximations

$$[68.98516399, 80.87934879, 92.91407443] \qquad \textbf{(26.1.2)}$$

Vi tjekker med den dobbelte afledede for maksimum
$a''(68.98516399)$

$$-0.1779395608 \qquad \textbf{(26.1.3)}$$

$a''(80.87934879)$

$$0.2966782706 \qquad \textbf{(26.1.4)}$$

$a''(92.91407443)$

$$-9.068244204 \qquad \textbf{(26.1.5)}$$

Da $-0.1779395608 < 0$ og $-9.068244204 < 0$ må vi have to maksimale værdier.
Vi indsætter disse i $a(t)$.
$a(68.98516399)$

$$43.38935768 \tag{26.1.6}$$

$a(92.91407443)$

$$98.25574023 \tag{26.1.7}$$

Så den maksimale deceleration er altså $98.25574023 \frac{m}{s^2}$ når tidspunktet er $92.91\ ms$.

Opgave b

Vi bruger integralet. Her er $T = 140\ ms$, så:

$$SI = \int_0^{140} (a(t))^{2.5}\, dt$$

$$SI = \int_0^{140} \left(\frac{16400}{(t-68)^2 + 400} + \frac{1480}{(t-93)^2 + 18} \right)^{2.5} dt \tag{26.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$SI = 9.8285\ 10^5 \tag{26.2.2}$$

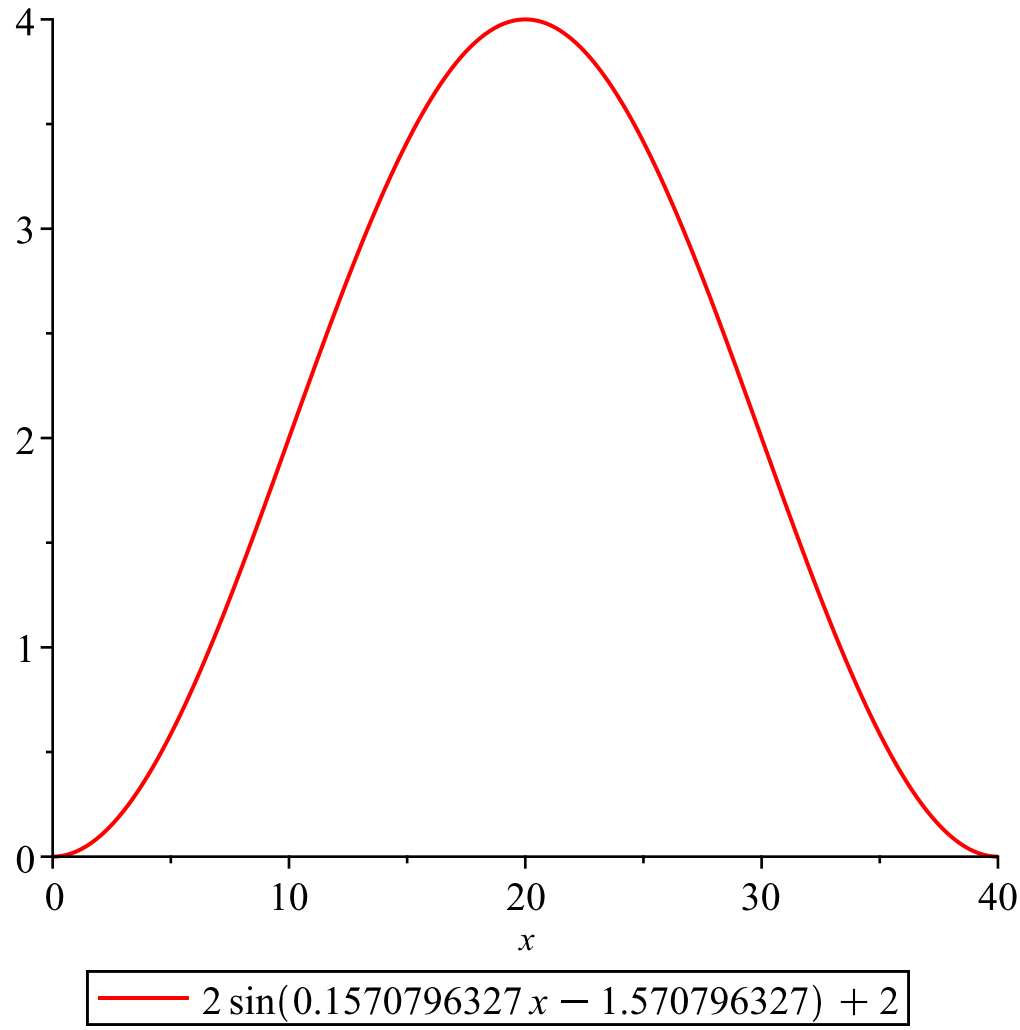
Dvs. $SI = 982850$ for $T = 140\ ms$.

Opgave 13:

$restart :; with(Gym) :$
Givet funktionen:
$f(x) := 2 \cdot \sin(0.05 \cdot \mathrm{Pi} \cdot x - 0.5 \cdot \mathrm{Pi}) + 2 :$
Defineret i intervallet $x \in [0; 40]$.

Opgave a

Vi tegner grafen.
$plot(f(x), x = 0 ..40, color = [\text{"Red"}], legend = [f(x)])$



Hermed er grafen tegnet for bicepsmusklen.

Opgave b

Volumen af bicepsmusklen bestemmes.

$$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^{40} f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$V = 753.9822370 \qquad \textbf{(27.2.1)}$$

Dvs. bicepsmusklen har en volume på 753.982.

Opgave c

Den maksimale tværsnitsareal bestemmes. Funktionen differentieres.

$intervalsolve(f'(x) = 0, x = 0..40)$

$$[1.305728676\ 10^{-9}, 20.00000000, 40.00000000] \qquad \textbf{(27.3.1)}$$

Vi bruger den dobbelte afledede.

$f''(1.305728676\ 10^{-9})$

$$0.04934802202 \qquad \textbf{(27.3.2)}$$

$f''(20.00000000)$

$$-0.04934802202 \quad \textbf{(27.3.3)}$$

$f''(40.00000000)$

$$0.04934802202 \quad \textbf{(27.3.4)}$$

Den maksimale radius for tværsnitsarealet er:
$f(20)$

$$4. \quad \textbf{(27.3.5)}$$

Tværsnitsarealet er givet ved formlen
$A_{tværsnit} = \mathrm{Pi} \cdot r^2$

$$A_{tværsnit} = \pi\, r^2 \quad \textbf{(27.3.6)}$$

Vi indsætter $r = 4$, så:
$A_{tværsnit} = \mathrm{Pi} \cdot 4^2$

$$A_{tværsnit} = 16\,\pi \quad \textbf{(27.3.7)}$$

$evalf[5]$(**(27.3.7)**)

$$A_{tværsnit} = 50.266 \quad \textbf{(27.3.8)}$$

Som altså er den maksimale tværsnitsareal af bicepsmusklen.

Opgave 14:

$restart :; with(Gym) :$

Opgave a

Givet differentialligningen:

$$m'(t) = \frac{k}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot m(t)$$

$$\mathrm{D}(m)(t) = \frac{1}{7000}\, k - \frac{3}{500}\, m(t) \quad \textbf{(28.1.1)}$$

Væksthastigheden for en person med vægt på 85kg og som dagligt indtager 3300kcal/døgn er

$$m'(t) = \frac{3300}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot 85$$

$$\mathrm{D}(m)(t) = -\frac{27}{700} \quad \textbf{(28.1.2)}$$

$evalf[5](\%)$

$$\mathrm{D}(m)(t) = -0.038571 \quad \textbf{(28.1.3)}$$

Så væksthastigheden for personen er $-0.038571\ kg$, så vægten aftager med $0.038571 \frac{kg}{døgn}$.

Opgave b

Vi bruger *dsolve.*

$$dsolve\left(\left\{m'(t)=\frac{k}{7000}-\frac{42}{7000}\cdot m(t),\ m(0)=87\right\},\ m(t)\right)$$

$$m(t)=\frac{1}{42}\,k+e^{-\frac{3}{500}\,t}\left(87-\frac{1}{42}\,k\right) \qquad \textbf{(28.2.1)}$$

Så vi har faktisk udtrykket en forskrift med k og t.

Opgave c

Vi bestemmer k ved at løse ligningen for k vha forskriften fra opgave b.

$$80=\frac{1}{42}\,k+e^{-\frac{3}{500}\cdot 100}\left(87-\frac{1}{42}\,k\right)$$

$$80=\frac{1}{42}\,k+e^{-\frac{3}{5}}\left(87-\frac{1}{42}\,k\right) \qquad \textbf{(28.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$\left[\left[k=\frac{42\left(87\,e^{-\frac{3}{5}}-80\right)}{e^{-\frac{3}{5}}-1}\right]\right] \qquad \textbf{(28.3.2)}$$

$evalf[5]$(**(28.3.2)**)

$$[[k=3002.5]] \qquad \textbf{(28.3.3)}$$

Så her skal k være ca. 3000kcal for, at personen vejer 80kg efter 100 døgn.