Ist I eine radikales Ideal aber kein Primideal, so gibt es $f, g \notin I$ mit $f \cdot g \in I$. Dann ist $g \in I : f \subset I : f^\infty$ und wir erhalten eine echte Zerlegung

$$I = (I : f) \cap (I + \langle f \rangle).$$

Nun ist nicht notwendigerweise $I + \langle f \rangle$ ein radikales Ideal, aber sicherlich

$$\sqrt{I} = I = (I : f) \cap \sqrt{I + \langle f \rangle}$$

Wir haben also $I = I_1 \cap I_2$ geschrieben. Wenn wir mit I_1, J_1 so weiter machen, finden wir letztendlich (weil der Polynomring noethersch ist) Primideale $\mathfrak{p}_1 \ldots, \mathfrak{p}_s$, so dass

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s.$$

Wir können diese natürlich minimal nehmen, also die Primideale in einer solchen Durchschnitt streichen, die man nicht braucht. Also gilt für jedes i:

$$I \subsetneq \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$$

Eine solche Zerlegung ist eindeutig. Ist nämlich $I \cap \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ eine andere solche Zerlegung, so ist $\mathfrak{q}_r \supset \mathfrak{p}_1 \cap \cdot \mathfrak{p}_s$, also $\mathfrak{q}_r \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i. O.B.d.A. ist $i = 1$ und analog folgt $\mathfrak{p}_s \supset \mathfrak{q}_j$. Also ist $j = r$ und $\mathfrak{q}_r = \mathfrak{p}_s$. Analog für die andere Primideale.

6.4.3 Ein Kriterium für Primideale

Ist $I = \langle f \rangle$ ein Hauptideal im Polynomring, so ist I ein Primideal genau dann, wenn f ein irreduzibles Polynom ist. Wir brauchen ein allgemeines Kriterium für Primideale. Weil Primideale radikale Ideale sind, sollte dieses Kriterium das Kriterium für Radikalideale verallgemeinern. Wir lassen uns durch die Geometrie leiten.

Wir nehmen Variablen X, Y, $X = X_1, \ldots, X_r$ und mit $I \cap K[X_1, \ldots, X_r] = \langle 0 \rangle$. Ist $K = \mathbb{C}$ und $I \subset K[X, Y]$ ein Ideal mit $I \cap K[X_1, \ldots, X_r] = \langle 0 \rangle$, so ist die Projektion von $V(I)$ auf K^r mit Koordinaten $X_1, \ldots, X_r$ "fast" surjektiv. Projizieren wir $V(I)$ "allgemein" auf einem $r + 1$ dimensionalen linearen Unterraum welcher K^r enthält, so können wir erhoffen, das Problem zu vereinfachen, indem wir im kleineren Polynomring $K[X_1, \ldots, X_r][T]$ rechnen dürfen. Hierbei ist T eine neue Veränderliche. Im Fall eines nulldimensionale Ideal haben wir das schon gemacht im Satz des primitiven Elementes. Das verallgemeinern wir hier.

Satz 6.4.12 *Sei $I \subset K[X, Y]$ ein Ideal und $X = (X_1, \ldots, X_r)$ eine maximale Menge von Variablen mit $I \cap K[X] = \langle 0 \rangle$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ und T eine zusätzliche Unbestimmte. Sei $>$ eine Eliminationsordnung für X.*

Dann gilt: für allgemeine $(a_1, \ldots, a_d) \in K^d$ gib es Polynome $h_i(X)$ und $\widetilde{h}_i(X, T)$ so dass

$$h_i(X) \cdot Y_i + \widetilde{h}_i(X,T) \in J := I + \langle T - (\textstyle\sum_i a_i Y_i)\rangle$$

$$K[X,T,Y]/J \cong K[X,Y]/I$$

$G = \{f_1, \dots, f_n\}$ Erz.-Sys. von I
$f \in I$. Jedes Leitmonom in I ist Vielfaches der Leitmonome von G

Beweis — Wir wählen bezüglich der Eliminationsordnung eine Gröbner Basis von I. Sie sieht folgendermaßen aus.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= g_1(y)\cdot x^{\beta_1} + \dots \quad \text{mit} x^{\beta_1} \neq 1 \text{ und } g_1(y) \neq 0 \\ &\vdots \\ f_s(x,y) &= g_s(y)\cdot x^{\beta_s} + \dots \quad \text{mit } x^{\beta_s} \neq 1 \text{ und } g_s(y) \neq 0 \end{aligned}$$

(?) Polynome $f \in K[X,Y]$ können wir als Elemente von $K(X)[Y]$ auffassen. Als solches erhalten wir ein Ideal $\widetilde{I} = I \cdot K(X)[Y]$. Weil $h_i \in \widetilde{I}$ für $i = 1, \dots, d$, ist $\widetilde{I}$ ein nulldimensionales Ideal. Der $K(X)$-Vektorraum $K(X)[Y]/\widetilde{I}$ hat die Dimension D. Klar ist, dass $K[X,Y]/I$ isomorph zu $K[T,X,Y]/J$ ist, weil wir die Variable T eliminieren können. Wir wenden den Satz des primitiven Elementes an, wobei wir als Körper nicht K, jedoche $K(X)$ nehmen! Er besagt insbesondere, dass für allgemeine $(a_1, \dots, a_d)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} K(X)[T] &\to K(X)[Y_1, \dots, Y_d]/\widetilde{I} \\ T &\to a_1 Y_1 + \dots + a_d Y_d \end{aligned}$$

Nach Satz vom prim. Element ist $K(X)[T]/\langle p\rangle \cong K(X)[Y_1..Y_d]/\widetilde{I}$
Dann: $K(X)[T]/\langle p\rangle \subseteq K(X)[T]$ $\Rightarrow$ surjektiv

surjektiv ist. Insbesondere ist

weil $\widetilde{J}$ mit $\widetilde{J} :=$

$$Y_i = g_i(T) \mod \widetilde{J} = I + \langle T - \sum_i a_i Y_i\rangle.$$

Hier ist $\widetilde{J}$ als Ideal in $K(X)[T,Y]$ zu interpretieren. Wir erhalten die gewünschte Darstellung von I, indem wir mit dem gemeinsamen Nenner $h_i(X)$ durchmultiplizieren und $\widetilde{h}_i(T) = h_i(X)g_i(T)$ setzen. □

Bemerkung 6.4.13 Es ist rechnerisch sehr kostspielig, tatsächlich allgemeine $(a_1, \dots, a_d)$ zu wählen. In der Praxis nimmt man meistens $T = Y_1$, (oder $T = Y_{d-1}$ usw.) und schaut nach, ob dieser Wahl schon das gewünschte Ergebnis liefert.

```
sage:  R.<z,y,x> = PolynomialRing(QQ,order='lex')
sage: I = ideal(y^2-x*z,x^3-z*y,x^2*y-z^2)
sage: I.groebner_basis()
[z^2 - y*x^2, z*y - x^3, z*x - y^2, y^3 - x^4]
```

Wir sehen, dass $I \cap \mathbb{Q}[X] = \langle 0\rangle$. Es gilt $x \cdot z - y^2 \in I$. Also ist die Aussage des Satzes erfüllt mit $"t = y"$, mit $h(x) = x$ und $\widetilde{h}(x,y) = -y^2$.

Diese allgemeine Projektion erlaubt uns deshalb spezielle Ideale zu betrachten, welche Elemente $h_i(X)Y_i + \widetilde{h}_i(X,T)$ enthält. Für solche Ideale haben wir ein Kriterium für Primideale.

Satz 6.4.14 (Kriterium für Primideale) *Sei $I \subset K[X,T,Y]$ (eine Variable T) mit*

1. $I \cap K[X] = \langle 0 \rangle$
2. $I \cap K[X,T] = \langle f \rangle$ mit f irreduzibel mit G.B
3. Für eine Eliminationsordnung $>$ für (X,T) gibt es Polynome $h_i(X)$ und $\widetilde{h}_i(X,T)$ mit $h_i(X) \cdot Y_i + \widetilde{h}_i(X,T) \in I$ Satz 6.4.12.
4. Mit $h := h_1 \cdot \ldots \cdot h_d$ gilt $I = I : h$. – ausrechnen mit G.B

Dann ist I ein Primideal.

Beweis — Sei $g_1 \cdot g_2 \in I$. Kommt Y^α als Term mit maximalen Totalgrad k in g_1 oder g_2 vor, so können wir in $h^k g_1$ und $h^k g_2$ alle Terme Y^α eliminieren mithilfe der Polynome $h_i(X) \cdot Y_i + \widetilde{h}_i(X,T) \in I$. Also $h^k g_i - \widetilde{g}_i \in I$ für $i = 1,2$ mit $\widetilde{g}_i \in K[X,T]$. Dann $\widetilde{g}_1 \cdot \widetilde{g}_2 \in I \cap K[X,T] = \langle f \rangle$. Weil f irreduzibel ist und $I \cap K[X] = \langle 0 \rangle$ folgt $\widetilde{g}_1 \in I$ oder $\widetilde{g}_2 \in I$. Also ist $g_1 \in I : h^k = I$ oder $g_2 \in I : h^k = I$. □

$\widetilde{g}_i = h^k g_i$ mod I $h^k g_1 \in I$

In den obigen Beispiel ist $f = t^3 - x^4$ irreduzibel. Es gilt hier $h = x$. Um zu prüfen, ob I ein primideal ist, müssen wir nur prüfen ob $I : x \subset I$, oder $I : (I : x) = R$.

```
sage: j = ideal(x)
sage: jj = I.quotient(j)
sage: jj.quotient(I)
Ideal (1) of Multivariate Polynomial Ring in y, t, x over Rational Field
```

6.4.4 Zerlegung eines radikalen Ideals

Ist ein radikales Ideal, welches kein Primideal ist, gegeben, so ist eine der Bedingungen des Satzes 6.4.14 nicht erfüllt. Wir werden dann explizit Elemente finden $g_1, g_2 \notin I$ finden können, so dass $g_1 \cdot g_2 \in I$. Also $I \subsetneq I : g_1 \subset I : g_1^\infty$ und wir haben eine Zerlegung

$$I = (I : g_1^\infty) \cap \sqrt{I + \langle g_2 \rangle}$$

So wiederholend finden wir eine Zerlegung $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s$.
Wir nehmen also an, dass wir (nach evt. allgemeine Projektion) ein Ideal $I \subset K[X,T,Y]$ (nur eine Variable T) haben, so dass es Polynome $h_i(X)$ und $\widetilde{h}_i(X,T)$ gibt mit

$$h_i(X) \cdot Y_i - \widetilde{h}_i(X,T) \in I.$$

Wir gehen die verschiedene Bedingungen in Satz 6.4.14 und nehmen an, dass mindestens eine davon verletzt ist.

1. Ist die vierte Bedingung nicht erfüllt, also $I \neq I : h$, so finden wir direkt die Zerlegung
$$I = (I : h^\infty) \cap \sqrt{I + \langle h \rangle}.$$

2. Wir nehmen an, $I \cap K[X,T] = \langle f \rangle$ mit $f \neq 0$, jedoch f ist nicht irreduzibel. Dann können wir $f = g_1 \cdot g_2$ mit $g_1, g_2 \in K[X,T]$. Weil $I \cap K[X] = \langle 0 \rangle$ ist der Grad von g_1 und von g_2 in T größer als 0. Also ist g_1, g_2 nicht in I.[2]

3. Ist $I \cap K[X,T]$ nicht erzeugt von nur einem Element, so sei aber $f = h(X) \cdot T^d + \ldots \in K[X,T]$ von minimalem Grad $d \geq 1$ und $LM(h)$ minimal. Wir behaupten, dass der Inhalt von f ungleich 1 ist, also f ist reduzibel. Sei nämlich $g = p(X)T^e \in I$ mit $e \geq d$ minimal und $g \notin \langle f \rangle$. Dann ist

$$p(X)T^{e-d}f - h(X) \cdot g \in I$$

Der Grad in T ist kleiner als e. Somit ist das Ergebnis ein Element von $\langle f \rangle$. Es folgt

$$h(X) \cdot g \in \langle f \rangle$$

Aber $h(X) \in \langle f \rangle$ ist nicht möglich, weil der Grad von f in T mindestens 1 ist. Also ist f reduzibel und eine Faktorisierung $f = h_1 \cdot h_2$ existiert mit $h_1, h_2 \notin I$.

```
sage: R.<t,x,z> = PolynomialRing(QQ,order='lex')
sage: j = ideal(t^2-x*z)
sage: jj = ideal(t+x,t-z)
sage: I = j.intersection(jj)
sage: I.groebner_basis()
[t^3 - t^2*z - t*x*z + x*z^2, t^2*x + t^2*z - x^2*z - x*z^2]
```

In diesem Fall ist also $I \cap \mathbb{Q}[x,z] = \langle 0 \rangle$ und $Q[x,y,t]$ ist kein Hauptideal. Das Polynom kleinsten Grades in t ist

$$(x+z) \cdot (t^2 - xz)$$

```
sage: ii = I + (t^2-x*z)
sage: ii.groebner_basis()
sage: sage: i.quotient(ii)
Ideal (x + z, t - z) of Multivariate Polynomial Ring in t, x, z over Rational Field
```

6.4.5 Primäre und irreduzible Ideale

Ein nicht radikales Ideal I ist vergleichbar mit einem nicht quadratfreien Polynom. In diesem Fall kann man I nicht als Durchschnitt von Primideale schreiben. Ein Ersatz ist I als Durchschnitt von Primärideale zu schreiben. Ein Primärideal ist der Ersatz für Potenzen von irreduziblen Polynome. Aber aufgepasst: Potenzen von Primideale sind im Allgemeinen keine Primärideale.

Definition 6.4.15 Ein Ideal $I \subset R$ heißt **Primärideal**, wenn aus $ab \in I$ und $a \notin I$ folgt, dass es ein $n \in N$ gibt $b^n \in I$.

[2] Ist $f = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ mit g_i irreduzibel, so können Sie den Beweis von Satz 6.4.14 anpassen und zeigen, dass mit $\mathfrak{p}_i = I + \langle g_i \rangle$ gilt, dass $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal ist und $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s$.

Der Beweis des folgenden Satzes ist eine einfache Aufgabe.

Satz 6.4.16 *Ist I ein Primärideal, so ist $\sqrt{I}$ ein Primideal.*

Definition 6.4.17 Ist I primär und $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$, so heißt I $\mathfrak{p}$-primär.

Beispiele 6.4.18 Im Ring $\mathbb{Z}$ sind die primären Ideale alle von der Form $\langle p^n \rangle$ mit p eine Primzahl. Ist $n = \pm p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{n_s}$, die Primfaktorzerlegung von n, so ist

$$\langle n \rangle = \langle p_1^{n_1} \rangle \cap \ldots \cap \langle p_s^{n_s} \rangle$$

eine Zerlegung von $\langle n \rangle$ als Durchschnitt von Primäridealen. Primäre Ideale kann man also ansehen als Verallgemeinerung von Primzahlpotenzen.

Definition 6.4.19 Ein Ideal $I \subset R$ heißt **irreduzibel**, wenn aus $I = I_1 \cap I_2$ mit I_1 und I_2 Ideale in R folgt, dass entweder $I = I_1$ oder $I = I_2$.

Man beweist wie in 6.4.3, dass ein Ideal I in einem noetherschen Ring eine Zerlegung der Form

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_k$$

mit I_j irreduzibel besitzt. Eine solche Darstellung ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

Satz 6.4.20 *Sei R ein noetherscher Ring. Dann sind irreduzible Ideale primär.*

Beweis — Sei $ab \in I$ und $a \notin I$. Betrachte die Kette

$$I : b \subset I : b^2 \subset I : b^3 \subset \cdots$$

Da R noethersch ist, gibt es ein $n \in N$ mit $I : b^n = I : b^{n+1}$. Wir behaupten

$$I = (I + \langle b^n \rangle) \cap (I + \langle a \rangle)$$

Dabei ist $\subset$ klar. Sei $x = i + sa = j + tb^n$ mit $i, j \in I$. Dann ist $bi + sba = bj + tb^{n+1} \in I$, also $tb^{n+1} \in I$, also $tb^n \in I$ und somit $x \in I$.
Damit ist $I = I + \langle b^n \rangle$ oder $I = I + \langle a \rangle$. Da aber $a \notin I$, folgt $I = I + b^n$, also $b^n \in I$. I ist also ein Primärideal. □

Folgerung 6.4.21 *In einem noetherschen Ring besitzt jedes Ideal I eine* Primärzerlegung, *d.h. eine Darstellung der Form*

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

mit $\mathfrak{q}_i$ primäre Ideale.

Definition 6.4.22 Eine Primärzerlegung

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

heißt **minimal** wenn

- die $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ paarweise verschieden sind
- für alle j ist $I \subsetneq \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i$.

In einem noetherschen Ring existiert immer eine minimale Primärzerlegung. Sind nämlich $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ zwei $\mathfrak{p}$–primäre Ideale sind, dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ das auch (Aufgabe!). Also erreicht man die erste Eigenschaft. Die zweite erreicht man durch eventuelles Streichen einiger $\mathfrak{q}_i$. Wir haben bewiesen:

Satz 6.4.23 *Ist R ein noetherscher Ring, so besitzt jedes Ideal eine minimale Primärzerlegung.*

Solche minimale Primärzerlegungen sind aber i.A. nicht eindeutig: in $K[X, Y]$ haben wir

$$\langle X^2, XY \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y, X^2 \rangle = \langle X \rangle \cap \langle X^2, XY, Y^2 \rangle.$$

Definition 6.4.24 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Ideal. Dann heißt $\mathfrak{p}$ ein assoziertes Primideal von I, wenn $\mathfrak{p} = \sqrt{I : h}$ für ein $h \in \mathbb{R}$.*

Proposition 6.4.25 *Ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal, so gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{q} : h} = \begin{cases} \sqrt{\mathfrak{q}} & \text{wenn } h \notin \mathfrak{q} \\ R & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis — Ist $h \in I$, so ist immer $I : h = R$. So also $h \notin \mathfrak{q}$. Ist $a \in \mathfrak{q} : h$, so ist $ah \in \mathfrak{q}$, also $a^n \in \mathfrak{q}$ und $a \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. Ist $a \in \sqrt{\mathfrak{q}}$, so ist $a^n \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} : h$. Deshalb $a \in \sqrt{\mathfrak{q} : h}$. □

Satz 6.4.26 (1. Eindeutigkeitssatz) *Die Radikalen $\sqrt{\mathfrak{q}}$ von Primärideale $\mathfrak{q}$ die in einer minimalen Primärzerlegung von I vorkommen, sind genau die assozierten Primidealen. Sie sind damit unabhängig von der minimalen Primärzerlegung.*

Beweis — Sei $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ eine minimale Primärzerlegung. Weil sie minimal ist, existiert für jedes i ein $h \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$ aber $h \notin \mathfrak{q}_i$. Dann

$$\sqrt{I : h} = \bigcap_{j \neq i} \sqrt{\mathfrak{q}_j : h} \cap \sqrt{\mathfrak{q}_i : h} = \sqrt{\mathfrak{q}_i}.$$

Also ist $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ ein assoziertes Primideal.
Sei umgekehrt $\mathfrak{p} = \sqrt{I : h}$ ein assoziertes Primideal. Dann

$$\mathfrak{p} = \sqrt{I : h} = \bigcap_{h \notin \mathfrak{q}_i} \sqrt{\mathfrak{q}_i}$$

Somit $\mathfrak{p} \supset \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ für ein i. Aber sicherlich $\mathfrak{p} \subset \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, also $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. □

Satz 6.4.27 (2. Eindeutigkeitssatz) *Sei $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ eine minimale Primärzerlegung und $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Die Menge der Primärideale $\mathfrak{q}_i$ wofür $\mathfrak{p}_i$ minimal sind, sind eindeutig bestimmt und unabhängig von der Primärzerlegung.*
Ein solches Ideal $\mathfrak{p}_i$ heißt minimal, wenn $\mathfrak{p}_j \not\subset \mathfrak{p}_i$ für alle $i \neq j$.

Beweis — Tatsächlich werden wir zeigen, dass ein solches $\mathfrak{q}_i$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{q}_i = \{b \in R \colon b \cdot x \in I \text{ für ein } x \notin \mathfrak{p}_i\} = \cup_{x \notin \mathfrak{p}_i} I : x$$

Diese Beschreibung der $\mathfrak{q}_i$ hängt nicht von der Primärzerlegung, also ist $\mathfrak{q}_i$ eindeutig bestimmt.
Sei $x \notin \mathfrak{p}_i$ und $b \in I : x$. Dann ist $b \cdot x \in I \supset \mathfrak{q}_i$. Wäre $b \notin \mathfrak{q}_i$, so ist $x^k \in \mathfrak{q}_i$, also $x \in \mathfrak{p}_i$, Widerspruch. Also ist $'' \supset''$ gezeigt.
Sei umgekehrt $b \in \mathfrak{q}_i$. Weil $\mathfrak{p}_i$ minimal ist, existier für $j \neq i$ ein $x_j \in \mathfrak{p}_j \setminus \mathfrak{p}_i$. Dann $x_j^{k_j} \in \mathfrak{q}_i$ und mit $k = \max\{k_j\}$ ist $x := \prod_{j \neq i} x_j^k \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$, aber $x \notin \mathfrak{p}_i$. Es folgt $bx \in \cap \mathfrak{q}_j = I$. □

Definition 6.4.28 *Ist I ein Ideal und $\mathfrak{p}$ ein minimales assoziertes Primideal von I, so heißt das zugehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ in einer Primärzerlegung von I die $\mathfrak{p}-$primäre Komponente von I.*

Satz 6.4.29 *Es sei R ein noetherscher Ring, $I \subset R$ ein Ideal, so dass $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Dann ist I ein primäres Ideal.*

Beweis — Sei dazu $ab \in I$ mit $a \neq I$. Gäbe es kein n mit $b^n \in I$, so ist $b \notin \mathfrak{m}$. Dann ist $\langle b \rangle + \mathfrak{m} = R$, also gibt es $r \in R$ und $m \in \mathfrak{m}$ mit $rb + m = 1$. Dann ist $a = arb + am$. Sei $k \in \mathbb{N}$, so dass $m^k \in I$.

$$a = rab + (arb + am)m = r(1+m)ab + am^2 = \cdots = r(1 + m + \ldots + m^{k-1})ab + m^k a \in I,$$

Widerspruch! □

Beispiel 6.4.30
1. In $R = \mathbb{Q}[X,Y]/\langle XY \rangle$ ist $\langle X \rangle$ ein Primideal, aber $\langle X^2 \rangle$ ist nicht primär. Es gilt $(X+Y) \cdot X \in \langle X^2 \rangle$, $X \notin \langle X^2 \rangle$ und $(X+Y)^n = Y^n \notin \langle X^2 \rangle$ für alle n.
2. Sei $R = \mathbb{Q}[X,Y,Z]/(XY - Z^2)$. Dann ist (XZ) ein Primideal, aber $(X,Z)^2$ ist kein Primärideal.
3. In $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$ ist $\mathfrak{p} = \langle XZ - Y^2, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2 \rangle$ ein Primideal, jedoch $\mathfrak{p}^2$ kein Primärideal. Es gilt $x^k \notin \mathfrak{p}^2$ für alle k, $f := z^3 + y^3x - 3zyx^2 + x^5 \notin \mathfrak{p}^2$ aber $x \cdot f \in \mathfrak{p}^2$, wie man aus der folgenden Gröbner Basis von $\mathfrak{p}^2$ ablesen kann.

```
sage: R.<z,y,x> = PolynomialRing(QQ,order='degrevlex(2),lex')
sage: p = ideal(y^2-x*z, x^3-y*z,z^2-y*x^2)
sage: I = p^2
sage: I.groebner_basis()
[z^4 - 2*z^2*y*x^2 + y^2*x^4, z^3*y - z*y^2*x^2 - z^2*x^3 + y*x^5, z^2*y^2 - 2*z*y*x^3 + x^6,
 z*y^3 - z^2*y*x - y^2*x^3 + z*x^4, y^4 - 2*z*y^2*x + z^2*x^2, z^3*x + y^3*x^2 - 3*z*y*x^3 + x^6]
```

Dei $\mathfrak{p}$-primäre Komponente von $\mathfrak{p}^n$ wird die n-te symbolische Potenz von $\mathfrak{p}$ genannt, Notation $\mathfrak{p}^{(n)}$. Sie besteht aus "Funktionen, die mit mindestens Ordnung n entlang $V(\mathfrak{p})$ verschwinden".

6.4.6 Berechnung einer Primärzerlegung

Um eine Primärzerlegung von I zu finden müssen wir letztendlich auch den Fall, dass $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ ein Primideal ist, erledigen können. Wir brauchen deshalb ein Kriterium.

Satz 6.4.31 *Es seine $I, \mathfrak{p}$ Ideale im Polynomring mit $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal.*

1. *Sei X eine maximale Anzahl von Koordinaten mit $I \cap K[X] = \langle 0 \rangle$ und $>$ eine Eliminationsordnung für X.*

2. *Sei*
$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= g_1(X) \cdot Y^{\beta_1} + \dots \quad \text{mit } Y^{\beta_1} \neq 1 \text{ und } g_1(X) \neq 0 \\ &\vdots \\ f_s(x,y) &= g_s(X) \cdot Y^{\beta_s} + \dots \quad \text{mit } Y^{\beta_s} \neq 1 \text{ und } g_s(X) \neq 0 \end{aligned}$$
eine Gröbner Basis von I

3. *Sei $h = g_1 \cdot \ldots \cdot g_s$.*

Dann ist $I : h^\infty$ ein Primärideal. Ist insbesondere $I = I : h$, so ist I primär.

Beweis — Wie so oft betrachten wir $\widetilde{I} := I \cdot K(X)[Y]$. Dann ist $(f_1, \dots, f_s)$ eine Gröbner Basis von $\widetilde{I}$. Es folgt insbesondere, dass $1 \notin \widetilde{I}$. Analog setzen wir $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot K(X)[Y]$. Weil $\widetilde{I} \supset \widetilde{\mathfrak{p}}$ und $\widetilde{I}$ ein nulldimensionales Ideal ist, folgt dass $\widetilde{\mathfrak{p}}$ ein maximales Ideal ist. Deshalb ist nach 6.4.29 das Ideal $\widetilde{I}$ ein Primärideal.
Wir zeigen nun, dass $I : h^\infty$ ein Primärideal ist. Sei $a \cdot b \in I : h^\infty$ aber $a \notin I : h^\infty$. Also $h^k \cdot a \cdot b \in I$ für ein k, aber $h^\ell \cdot a \notin I$ für alle ℓ. Weil wir in $K(X)[y]$ durch Polynome in $K[X]$, insbesondere h teilen dürfen, gilt $a \cdot b \in \widetilde{I}$. Wäre $a \in \widetilde{I}$, so folgt aus dem Divisionsalgorithmus, dass $h^\ell \cdot a \in I$ für ein ℓ, Widerspruch! Also $a \notin \widetilde{I}$ und es folgt $b^s \in \widetilde{I}$ für ein s. Wiederum mit dem Divisionsalgorithmus folg $h^\ell \cdot b^s \in I$, also $b^s \in I : h^\ell \subset I : h^\infty$. □

Wir sehen, dass wenn $I \neq I : h$, so gibt es eine Zerlegung
$$I = (I + \langle h^k \rangle) \cap (I : h^k)$$
für hinreichend große k.

Beispiel 6.4.32 In $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$ ist $\mathfrak{p} = \langle Z^2 - XY, X^3 - YZ, X^3 - Y^2 \rangle$ ein Primideal (Seite ??). Wir berechnen eine Primärzerlegung von $\mathfrak{p}^2$. und zeigen, dass $I = \mathfrak{p}^2$ nicht primär ist.

```
sage: R.<z,y,x> = PolynomialRing(QQ,order='degrevlex(2),lex(1)')
sage: p = ideal(y^2-x*z, x^3-y*z,z^2-y*x^2)
sage: I = p^2
sage: I.groebner_basis()
[z^4 - 2*z^2*y*x^2 + y^2*x^4, z^3*y - z*y^2*x^2 - z^2*x^3 + y*x^5, z^2*y^2 - 2*z*y*x^3 + x^6,
 z*y^3 - z^2*y*x - y^2*x^3 + z*x^4, y^4 - 2*z*y^2*x + z^2*x^2, z^3*x + y^3*x^2 - 3*z*y*x^3 + x^6]
```

Wir sehen, dass $I \cap \mathbb{Q}[X] = \langle 0 \rangle$ und $\widetilde{I} \subset \mathbb{Q}(X)[Y, Z]$ ein nulldimensionales Ideal ist. Wir nehmen das Produkt der Leitkoeffizienten in $K[X]$. Der Leitkoeffizient sind alle 1, ausser beim letzten Element der Gröbner Basis. Dort ist er x, also berechnen wir $I : x$ und stellen fest, dass $I \neq I : x = I : x^2$ ist. Danach berechnen wir $I + \langle x \rangle$.

```
sage: j = ideal(x)
sage: k = I.quotient(j)
sage: k == I
False
sage: kk = I.quotient(j^2)
sage: k == kk
True
sage: m = I + x
sage: m.groebner_basis()
[z^4, z^3*y, z^2*y^2, z*y^3, y^4, x]
```

Das Ideal k ist dan ein Primärideal, wie aus dem Kriterium folgt. Es gilt $\sqrt{m} = \langle z, y, x \rangle$, ist also ein maximales Ideal und somit ist m ein Primärideal. Tatsächlich gilt $k \cap m = I$, also haben wir eine (minimale) Primärzerlegung von I gefunden.

```
sage: II = k.intersection(m)
sage: I == II
True
```

Ist $\sqrt{I}$ kein Primideal, so können wir ein Primideal $\mathfrak{p} \subsetneqq \sqrt{I}$ finden, so dass

$$\sqrt{I} = \mathfrak{p} \cap J$$

für ein Ideal J. Dann gibt es ein $h \in \mathfrak{p}$ mit $h \notin \sqrt{I}$. Weil $J \not\subset \mathfrak{p}$ gibt es ebenfalls ein $f \in J$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, insbesondere $f \notin \sqrt{I}$, also $f^k \notin I$ für alle k. Andererseits ist $f \cdot h \in \sqrt{I}$, also $(fh)^k \in I$. Es folgt, dass $f^k \in I : h^k$ mit $f^k \notin I$.

Wenn wir die Ergebnisse für Primideale und Primärideale kombinieren, kommen wir zum folgenden Algorithmus, welche eine Primärzerlegung eines Ideals berechnet. Diese Primärzerlegung ist nicht notwendigerweise minimal. Außerdem ist dieser Algorithmus ist nicht besonders optimalisiert.

Algorithmus 6.4.33
EINGABE: *Ein Ideal I im Polynomring, $Q = \emptyset$.*
AUSGABE: *Q: eine Menge von Primärideale so dass $I = \bigcap_{\mathfrak{q} \in Q} \mathfrak{q}$.*

1. Bestimme $\sqrt{I}$
2. Bestimme ein Primideal $\mathfrak{p} \supset \sqrt{I}$.
3. Ist $\mathfrak{p} \neq \sqrt{I}$, so gehe nach Schritt 7.
4. Wähle eine maximale Anzahl von X mit $I \cap K[X] = \langle 0 \rangle$, eine Eliminationsordnung für X eine bestimme eine Gröbner Basis $(f_1, \dots, f_s)$ von I
5. Ist $f_i = g_i(X) \cdot Y^{\beta_i} + \dots$, so setze $h := g_1 \cdot \dots \cdot g_s$
6. Ist $I : h = I$, dann füge I zu Q hinzu, sonst berechne rekursiv eine Primärzerlegung von $I + h^k$ und $I : h^k$ und füge diese Primärideale zu Q hinzu.
7. Wähle $h \in \mathfrak{p}$ mit $h \notin \sqrt{I}$.
8. Berechne k mit $I : h^k = I : h^{k+1}$.
9. Berechne rekursiv eine Primärzerlegung von $I + h^k$ und $I : h^k$ und füge diese Primärideale zu Q hinzu.