

Matematik A

25. maj 2020

Minimale løsningskitser til STX A-niveau eksamen d. 25/05/20. Af CAS kræves: Maple 2019 og evt. GeoGebra.

NB: Dette er ikke en elevbesvarelse!

Delprøve 1:

Denne del besvares ved hjælp af formelsamlingen.

Opgave 1:

- a) En vektorfunktion er givet.

Man skal beregne $\vec{s}(1)$. Dvs. man indsætter $t = 1$ ind i funktionsforskriften.

$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 1^2 \\ 2 \cdot 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 1 \\ 2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- b) Hvis parameterkurven skal gennemløbe P , så kræver det, at ligningen nedenfor har samme t -værdier.

$$\begin{pmatrix} 0.5 \cdot t^2 \\ 2 \cdot t + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Det giver ligningerne $0.5 \cdot t^2 = 2$ og $2 \cdot t + 6 = 10$. Begge ligninger løses.

$$0.5 \cdot t^2 = 2 \iff t^2 = \frac{2}{0.5} \iff t^2 = 4 \iff t = \pm 2.$$

Dernæst,

$$2 \cdot t + 6 = 10 \iff 2 \cdot t = 4 \iff t = 2.$$

Så da $t = 2$ i begge ligninger, så følger det at parameterkurven gennemløber P .

Opgave 2:

- a) Da $f(x)$ er givet som et andengradspolynomium, så benyttes den generelle teori om andengradspolynomier til at slutte, at funktionen C er grafen for $f(x)$.

Differentieres $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fås $f'(x) = 2x - 4$, hvilket er en lineær funktion. Denne er en ret linje, hvorfor det er grafen for B . Dvs. B er grafen for $f'(x)$.

Endelig ses det, at A er grafen for $F(x)$, da det nævnes at $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$. Dette kan også ses, da A viser et tredjegradspolynomium.

Opgave 3:

- a) Udtrykket reduceres.

$$\frac{a(4a + 6)}{2a} = \frac{4a + 6}{2} = \frac{4a}{2} + \frac{6}{2} = 2a + 3.$$

Opgave 4:

- a) Det aflæses på grafen, at $\mu = E(X) = 12$. Se formelsamling s. 43. Se evt. bilaget på sidste side i denne besvarelse.

Opgave 5:

- a) Differensligningen er $y_{n+1} = 1.10 \cdot y_n + 2000$, $n = 0, 1, 2, \dots$
Det ses, at renten er $r = (1.10 - 1) \cdot 100\% = 10\%$. Det beløb, der hvert år indsættes, er 2000kr.

- b) Beløbet på kontoen efter 1 år er,

$$y_1 = 1.10 \cdot 5000 + 2000 = 7500.$$

Dvs. efter 1 år er beløbet på 7500kr.

Opgave 6:

- a) Andengradsligningen $f(x) = 0$ løses.

$$f(x) = 0 \iff 0 = -3x^2 + 12x - 9.$$

Da 3 går op i alle led, kan man dele med -3 på begge sider. Det gør man for at gøre ligningen nemmere, men man må også lade være.

$$\frac{0}{-3} = -\frac{3x^2}{-3} + \frac{12x}{-3} - \frac{9}{-3} \iff 0 = x^2 - 4x + 3.$$

Her er $a = 1$, $b = -4$ og $c = 3$. Diskriminanten,

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \quad d > 0.$$

Løsningerne er,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}.$$

Dvs. $x = 1 \vee x = 3$.

- b) Arealet M bestemmes ved hjælp af integralregning, her benyttes grænserne $x = 1$ og $x = 3$ fra opgave a).

$$\begin{aligned} A_M &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx = [-x^3 + 6x^2 - 9x]_1^3, \\ &= -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - (-1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1), \\ &= 0 - (-4) = 4. \end{aligned}$$

Dvs. det blå areal M er beregnet til at være 4.

Opgave 7:

- a) Først differentieres funktionen $f(x)$ og det skyldes, at man fra generel teori ved, at $f'(x)$ angiver hældningen for tangenten.

$$f'(x) = 3 - \frac{6}{x}, \quad x > 0.$$

Da tangenten t er parallel med l , så følger det at begge linjer har samme hældningstal, dvs. 2. Man kan finde røringspunktet til det sted, hvor hældningen for tangenten er 2, ved at løse ligningen $f'(x) = 2$. Dvs.

$$3 - \frac{6}{x} = 2 \iff -\frac{6}{x} = -1 \iff \frac{6}{x} = 1 \iff 6 = x \iff x = 6.$$

Dvs. førstekoordinaten til røringspunktet mellem $f(x)$ og t er ved $x = 6$.

Opgave 8:

a) Tangentligningen er givet ved $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Her oplyses punktet $P(0,2)$ dvs. $x_0 = 2$ og $y_0 = f(x_0) = 2$. Med disse oplysninger er tangentligningen,

$$y = f'(x_0)(x - 0) + 2.$$

$f'(x_0)$ bestemmes vha. differentiaalligningen. Man indsætter $y_0 = 2$ i y ,

$$y' = 2 \cdot 2(8 - 2) = 24.$$

Altså er ligningen for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet P ,

$$y = 24(x - 0) + 2 = 24x + 2.$$

b) En forskrift for $f(x)$ bestemmes ved at løse differentiaalligningen.

Da differentiaalligningen er en logistisk differentiaalligning, så kan man anvende formelsamlingen og finde den fuldstændige løsning. Man finder (179) s. 29.

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y), \quad y = f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}.$$

Her er $M = 8$ og $a = 2$. Derfor er den fuldstændige løsning,

$$f(x) = \frac{8}{1 + c \cdot e^{-16 \cdot x}}.$$

Konstanten c bestemmes ved udnyttelse af punktet P ,

$$2 = \frac{8}{1 + c \cdot e^{-16 \cdot 0}} \iff 2 = \frac{8}{1 + c} \iff 2(1 + c) = 8 \iff 1 + c = 4 \iff c = 3.$$

Forskriften er,

$$f(x) = \frac{8}{1 + 3 \cdot e^{-16 \cdot x}}.$$

Delprøve 2:

Denne del besvares ved hjælp af formelsamlingen og CAS. Vi snyder og bruger CAS til at tegne visse ting.

Opgave 9:

- a) Benyt teorien om, at $\sin(x)$ har værdimængde $[-1,1]$. Derfor er,
$$f_{min} = 7 \cdot (-1) + 3 = -7 + 3 = -4.$$
- b) En periode bestemmes ved,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Her er $\omega = 2$ fra den harmoniske svingning.

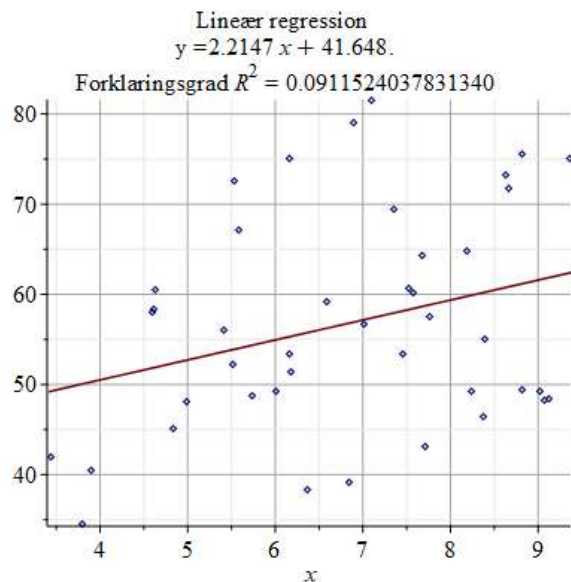
Opgave 10:

- a) Tabellens data indlæses i Maple. I Maple foretages der lineær regression på tabellens data.

restart; with(Gym) :

```
DATA := [[ 7.1, 6.9, 6.16, 5.54, 5.59, 4.63, 4.61, 4.59, 5.41, 5.51,  
4.83, 3.9, 3.8, 3.43, 6.01, 7.46, 7.57, 7.52, 7.01, 6.59, 6.17,  
6.18, 5.74, 4.98, 9.12, 9.08, 9.02, 8.82, 8.38, 7.71, 6.85, 6.36,  
8.24, 8.39, 7.77, 7.68, 8.19, 8.66, 9.37, 8.81, 8.63, 7.36 ],  
[ 81.6, 79.1, 75.1, 72.6, 67.1, 60.5, 58.3, 58.1, 56.1, 52.3,  
45.1, 40.5, 34.6, 41.9, 49.3, 53.4, 60.1, 60.6, 56.7, 59.1, 53.4,  
51.4, 48.8, 48.1, 48.4, 48.2, 49.2, 49.4, 46.5, 43.1, 39.1, 38.3,  
49.2, 55.1, 57.5, 64.3, 64.8, 71.7, 75.1, 75.5, 73.2, 69.5 ]] :
```

LinReg(DATA)



Det fremgår ovenfor, at forskriften er $f(x) = 2.2147x + 41.648$, hvilket er en ringe model.

- b) Her fortsættes arbejdet i Maple.

```
testLin(DATA)

```

	a	b
Koefficient	2.214679	41.648398
Standardfejl	1.105712	7.732141
t-stat	2.002943	5.386400
p-værdi	0.051993	0.000003
Nedre 95.00%	-0.020050	26.021159
Øvre 95.00%	4.449407	57.275637
Frihedsgrader	40	

Konfidensintervallet er $[-0.02; 4.44]$. Det ses umiddelbart at forskerens formodning ikke holder stik, da modellen både indeholder positive og negative værdier i intervallet. Endelig kan man bemærke forklaringsgraden er relativ lav.

Opgave 11:

- a) Funktionen er givet $f(x) = e^{2x-4}$. Differentieres ved hjælp af CAS eller i hånden.

$$f'(x) = (e^{2x-4})' = 2e^{2x-4}.$$

- b) Her benyttes formelsamlingen s. 28.

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (2e^{2x-4})^2} = 7.8632.$$

I Maple:

```
f(x) := exp(2*x - 4) :
evalf[5] (int[1..3] sqrt(1 + f(x)^2) dx)

```

7.8632

Dvs. kurvelængden af funktionen $f(x)$ i intervallet $[1; 3]$ er ca. 7.8632.

Opgave 12:

- a) Her vises det, at $\tilde{y} = 2$ er et fikspunkt for differensligningen. Betragt,

$$\tilde{y} = 2\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}^2. \tag{1}$$

$\tilde{y} = 2$ indsættes i (1).

$$2 = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \iff 2 = 4 - \frac{4}{2} \iff 2 = 2.$$

Det ses umiddelbart, at $\tilde{y} = 2$ er et fikspunkt for differensligningen.

- b) Først bestemmes den afledede funktion,

$$g'(\tilde{y}) = 2 - \tilde{y}.$$

Dernæst indsættes $\tilde{y} = 2$.

$$|g'(2)| = |2 - 2| = 0 < 1.$$

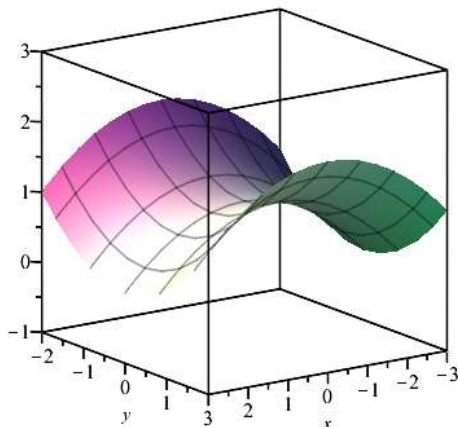
Da $|g'(2)| = 0$, så følger det, at $\tilde{y} = 2$ er et stabilt fikspunkt.

Opgave 13:

- a) Funktionen defineres og tegnes i Maple, som man kan se nedenfor.

$$f(x, y) := 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} :$$

`plot3d(f(x, y), view = [-3 ..3, -2 ..2, -1 ..3])`



- b) Koordinatsættet til saddelpunktet P bestemmes. Funktionen differentieres.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -\frac{2x}{9}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{y}{2}.$$

Sættes ovenstående lig 0 fås ligningerne,

$$-\frac{2x}{9} = 0 \iff x = 0, \quad \frac{y}{2} = 0 \iff y = 0.$$

Dvs. $x_0 = 0 = y_0$. Disse indsættes i $f(x, y)$.

$$f(0, 0) = 1 - \frac{0^2}{9} + \frac{0^2}{4} = 1.$$

Dermed er $P(0, 0, 1)$.

Opgave 14:

- a) Vektorfunktionen er,

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 + t^2 - 4t \end{pmatrix}.$$

Da P ligger på andenaksen er $x(t) = 0$. Dvs.

$$t^2 - 4 = 0 \iff t = \pm 2.$$

Dvs. parameterværdierne hørende til P er $t = \pm 2$.

- b) Vandret tangent til en parameterkurve kræver $y'(t) = 0$. Dvs.

$$3t^2 + 2t - 4 = 0.$$

Ligningen løses vha. Maple.

`solve(3 t^2 + 2 t - 4 = 0)`

$$-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}$$

`evalf[5](%)`

$$0.86857, -1.5352$$

Dvs. $t = -1.5352$ og $t = 0.86857$ er parameterværdierne til de punkter hvor der findes vandrette tangenter til parameterkurven.

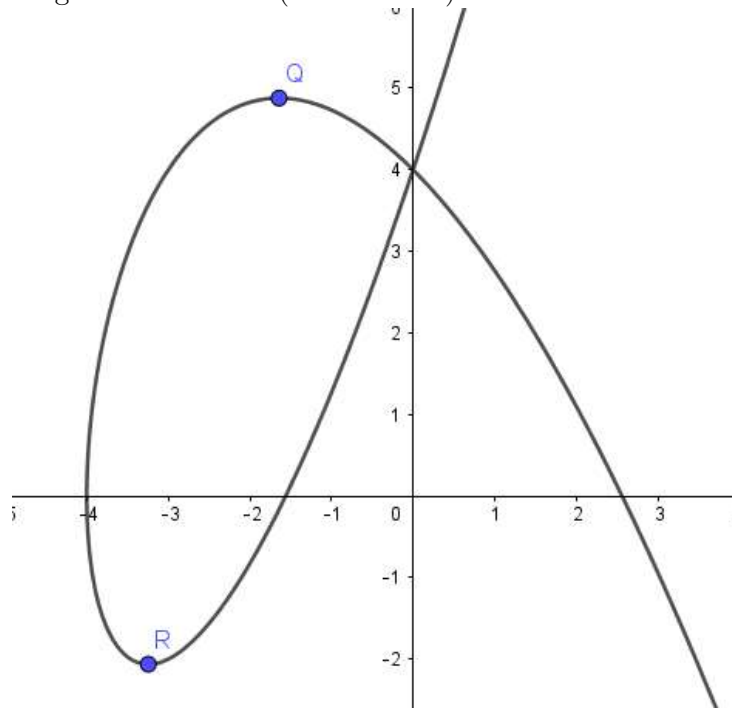
$$\vec{s}(-1.5352) = \begin{pmatrix} (-1.5352)^2 - 4 \\ (-1.5352)^3 + (-1.5352)^2 - 4 \cdot (-1.5352) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.643 \\ 4.879 \end{pmatrix},$$

$$\vec{s}(0.86857) = \begin{pmatrix} 0.86857^2 - 4 \\ 0.86857^3 + 0.86857^2 - 4 \cdot 0.86857 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.246 \\ -2.065 \end{pmatrix}.$$

Koordinatsættene er,

$$Q(-1.643, 4.879), \quad R(-3.246, -2.065).$$

Dette kan afbildes grafisk nedenfor. (Ikke et krav).



Opgave 15:

a) Man indsætter $V = 10$ i differentialligningen.

$$\frac{dV}{dt} = 0.1 - 0.016 \cdot 10^{\frac{2}{3}} \approx 0.025734.$$

Dvs. karrets væskemængde ændres med 0.0257L pr. time.

b) Da karret var tomt var ved tidspunktet $t = 0$ inden påfyldning. Derfor er $V(0) = 0$. Differentialligningen kan ikke løses algebraisk, så der anvendes numerisk løsning vha. Maple.

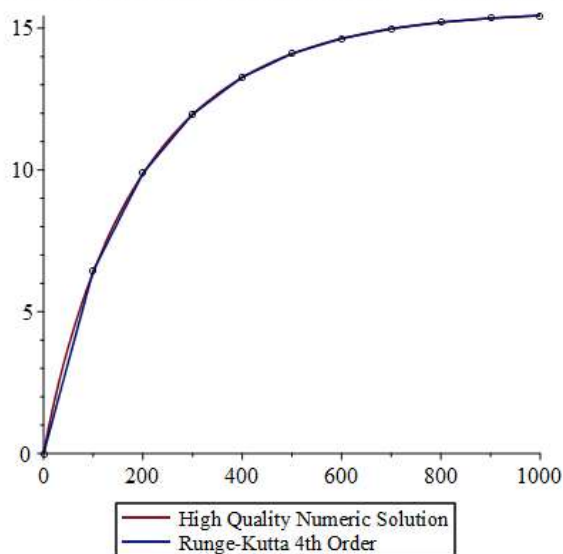
restart

with(Student[NumericalAnalysis]) :

$$V'(t) = 0.1 - 0.016 \cdot (V(t))^{\frac{2}{3}}$$

$$D(V)(t) = 0.1 - 0.016 V(t)^{2/3}$$

RungeKutta(*diff*($V(t), t = 0.1 - 0.016 \cdot V(t)^{\frac{2}{3}}$, $V(0) = 0, t$
 $= 1000, submethod = rk4, numsteps = 10, output = plot$)



RungeKutta(*diff*($V(t), t = 0.1 - 0.016 \cdot V(t)^{\frac{2}{3}}$, $V(0) = 0, t$
 $= 3125, submethod = rk4, numsteps = 10$)

15.62

Det ses umiddelbart, at den øvre grænse for differentialligningen er 15.62. Så der kan omtrent være 15.62 liter i karret ifølge den numeriske løsning ovenfor.

Bilag til opgave 4:

