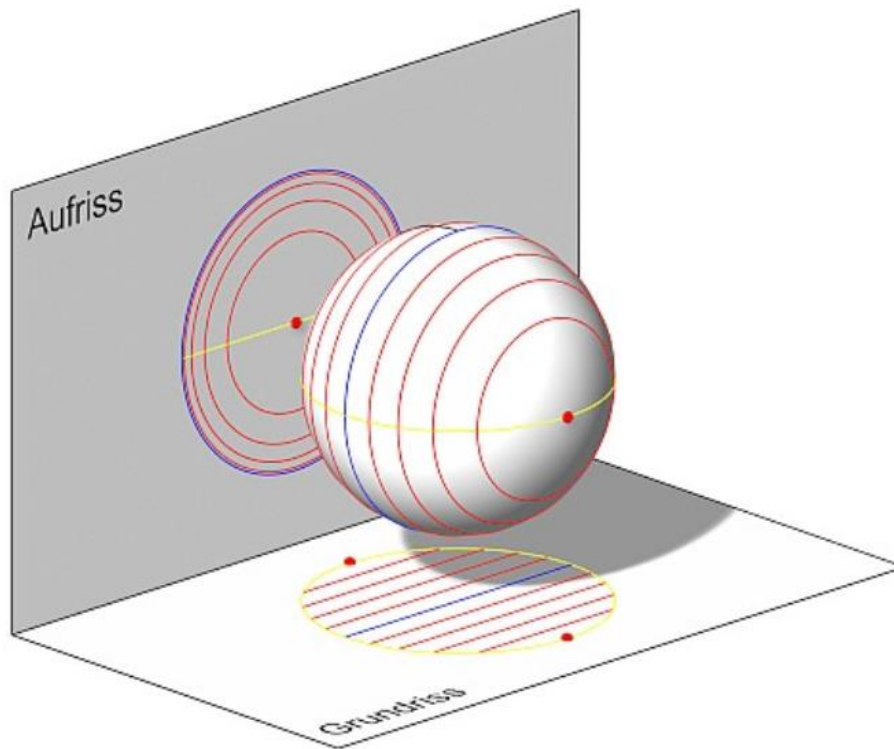


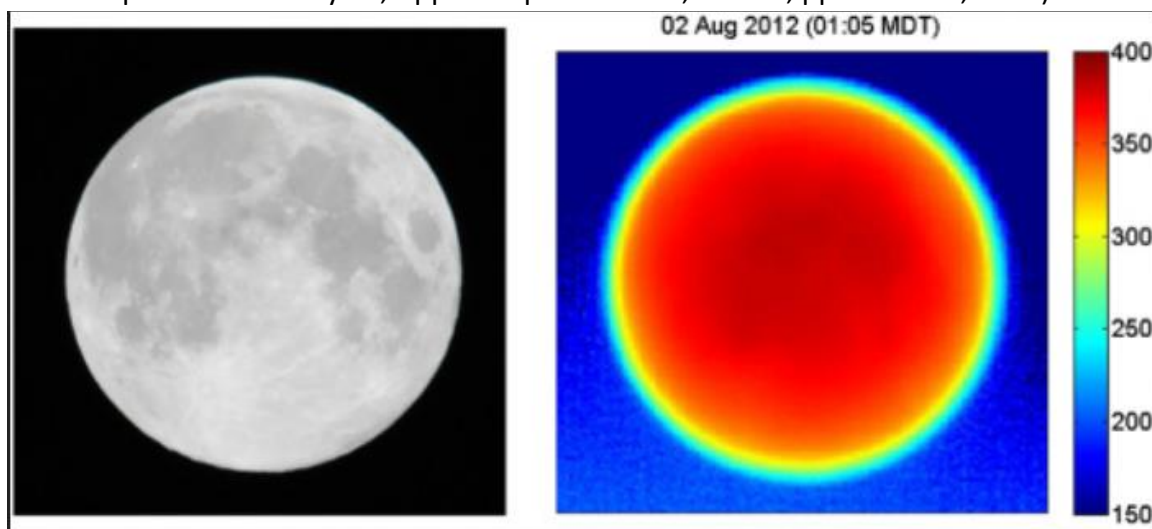
4.3 Zentral-Solarpunkt Ansatz – Energie-Modell

Der Zentral-Solarpunkt Ansatz kann auf die Verteilung der Energiestromdichte sowie der Temperatur auf einer nicht-rotierenden Kugeloberfläche (Hemisphäre) bei Gültigkeit vom Lambertischen Satz für diffus reflektierende Körper angewendet werden (Erich Schoenberg - Photometrie der Gestirne, 1922).

Nach dem Erhaltungssatz der Energie gilt für die nicht-rotierende energetisch passive Sphäre, dass die *Systemenergie* = *Austauschenergie* ist, zudem soll gelten, dass kein Energieaustausch zwischen den Hemisphären H1/H2 der nicht-rotierenden Sphäre stattfindet: $E(\text{ges}) = [E(\text{H1}) - E(\text{H2})] + E(\text{H2}) = E(\text{H1})$. In der nachfolgenden Graphik ist die geometrische Darstellung (orthographische Projektion) einer Kugel im Grundriss und Aufriss verdeutlicht. Die rote Punktfläche beim Aufriss kennzeichnet den Zentral-Solarpunkt (Pol) der bestrahlten Hemisphäre H1. Dabei bilden sich isoenergetische bzw. isotherme konzentrische Kreise um den Zentral-Solarpunkt (Pol) auf der Hemisphäre. Mit einer konstanten Albedo hat der energetische Zentral-Solarpunkt den Wert $j_0 = S \cdot (1-A) = 1367 \cdot (1-0,3) = 956,9 \text{ W/m}^2$ und der thermische Zentral-Solarpunkt den Wert von $T_0 = [(1-A) \cdot S / (\epsilon \cdot \sigma)]^{1/4} = [(1-0,3) \cdot 1367 / (0,96 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8})]^{1/4} = 364,13 \text{ K}$.



Als praktisches Anschauungsbeispiel für den Aufriss der bestrahlten und diffus reflektierenden Hemisphäre sei die thermische Moment-Abbildung vom FeathIR Scope System (Bild rechts) verwiesen (Quelle: J. A. Shaw, P. W. Nugent, M. Vollmer, Infrared Moon imaging for remote sensing of atmospheric smoke layers, Applied Optics Vol. 54, Issue 4, pp. B64-B75, 2015):



A) Zentral-Solarpunkt Ansatz mit konstanter Albedo - Verteilung der Energiestromdichte

Bei dem Zentral-Solarpunkt Ansatz erhält man die Energiestromdichte-Verteilung auf einer nicht-rotierenden Kugeloberfläche (Hemisphäre) aus Sicht der Sonne, wenn man den Zentral-Solarpunkt j_0 als energetischen Pol definiert, wobei sich die Energiestromdichte beim energetischen Breitengrad β mit einer konstanten Albedo ergibt nach: $j(\beta) = j_0 \cdot \cos(\beta)$.

Die Gleichung für den Energiestromdichte-Mittelwert der zum Mutterstern zugewandten Hemisphäre H1 aus der Zentral-Solarpunkt Betrachtung in den Grenzen $0 \leq \beta \leq \pi/2$ ist:

$$j(\beta, H1)_{avg} = j_0 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\beta) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot d\beta = \frac{\pi}{4} \cdot j_0 \quad (4.9)$$

damit erhält man $j(\beta, H1)_{avg} = \pi/4 \cdot 956,9 \text{ W/m}^2 = 751,5 \text{ W/m}^2$, wobei $(\pi/2 - \beta)$ den Winkel der diffus reflektierenden Fläche zum einfallenden Strahlungsvektor vom energetischen Breitengrad bzw. der Zenitdistanz der Hemisphäre aus Sicht der Erde kennzeichnet. Das ist die flächen-treue Berechnung der mittleren Energiestromdichte für die bestrahlte und diffus reflektierende Hemisphäre H1. In der sphärischen Trigonometrie bestimmt die Größe $(\pi/2 - \beta)$ die Winkel-Entfernung (den minimalen Weg bzw. die Zenitdistanz) zwischen Pol und Breitengrad β . Die Fläche zwischen Pol und einem Breitengrad β ergibt sich aus: $A_B = 2\pi \cdot r^2 \cdot \sin(\beta)$. Die Fläche zwischen zwei Breitengraden ermittelt sich nach: $A_{AB} = 2\pi \cdot r^2 \cdot [\sin(\beta_2) - \sin(\beta_1)]$ für $\beta_2 > \beta_1$.

Die flächengewichtete Berechnung von Gleichung (4.9) kann näherungsweise unter zu Hilfenahme einer numerischen Integration durchgeführt werden:

β	$j(\beta)$	$\sin(\beta)$	$[j(\beta_1) + j(\beta_2)]/2 \cdot [\sin(\beta_2) - \sin(\beta_1)]$
0	956,9	0	
10	942,4	0,1736	164,9
20	899,2	0,3420	155,1
30	828,7	0,5	136,5
40	733,1	0,6428	111,5
50	615,1	0,7660	83,1
60	478,5	0,8660	54,7
70	327,3	0,9397	29,7
80	166,2	0,9848	11,1
90	0	1	1,26
	$\emptyset = 595 \text{ W/m}^2$		$\Sigma = 747,9 \text{ W/m}^2$

Man kann die mittlere Energiestromdichte der Hemisphäre H1 theoretisch über die gesamte Kugeloberfläche verteilen, dann würde man einen Wert von $j(H1, H2)_{avg} = 751,5 \text{ [W/m}^2\text{]}/2 = 375,8 \text{ W/m}^2$ erhalten. Dieser Wert von $375,8 \text{ W/m}^2$ würde nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz einer Effektivtemperatur der Oberfläche von $T_{eff_{sfc}} = 288 \text{ K}$ entsprechen. Diese energetische Verteilung wäre im Sinne der Physik nach dem Erhaltungssatz der Energie auch möglich.

B) Zentral-Solarpunkt Ansatz mit effektiver Albedo - Verteilung der Energiestromdichte

Mit der effektiven Albedo von $A(\beta) = (1 - e)/F_{Phase} \cdot [0,62997 - 0,40893 \cdot \cos^2(\beta)]$ unter den Bedingungen der Gültigkeit vom Lambertschen Satz für diffus reflektierende Körper sowie einer rotierenden Kugelform vom System Erde würde man für den energetischen Zentral-Solarpunkt den Wert $j_0 = S \cdot [1 - A(\beta=0)] = 1367 \cdot (1 - 0,19) = 1107,3 \text{ W/m}^2$ und für den thermischen Zentral-Solarpunkt den Wert von $T_0 = \{[1 - A(\beta=0)] \cdot S / (\epsilon \cdot \sigma)\}^{1/4} = \{[1 - 0,19] \cdot 1367 / (0,96 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8})\}^{1/4} = 377,7 \text{ K}$ erhalten. Die planetare (sphärische) Albedo $A(\beta)_{avg}$ der zum Mutterstern zugewandten Hemisphäre H1 über die Phasen erhält man mit folgender Beziehung:

$$A(\beta)_{avg} = \frac{1 - e}{F_{Phase}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a - b \cdot \cos^2(\beta)] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot d\beta = \frac{1 - e}{F_{Phase}} \cdot \left(a - \frac{2 \cdot b}{3}\right) \quad (4.10)$$

wobei $e = 0,0167$ die numerische Exzentrizität der Erdumlaufbahn und $F_{Phase} = 8/7$ die Flächengewichtung der Phasen zwischen Zentral-Solarpunkt zum Terminator (Tag-Nacht-Grenze) bestimmt. Die planetare (sphärische) Albedo ist ein Effekt der beweglichen Oberfläche der rotierenden Erde, der vor allem vom gekoppelten System Sonne - Erde - Erdmond bestimmt wird. Deshalb sind die Eigenschaften und Verhältnisse vom solar-bestrahlten und reflektierenden Teil der Sphäre maßgebend, auch als Phase bezeichnet. Damit erhält man einen Wert der planetaren (sphärischen) Albedo von $A(\beta)_{avg} = 0,3075$. Mit dieser planetaren Albedo erhält man eine mittlere Energiestromdichte der zum Mutterstern zugewandten und diffus reflektierenden Hemisphäre H1 über die Phasen von: $j(\beta, H1)_{avg} = S \cdot [1 - A(\beta)_{avg}] = 1367 \cdot (1 - 0,3075) = 946,6 \text{ W/m}^2$. Die so genannte planetare (sphärische) Albedo bezieht sich immer auf den solar-bestrahlten und reflektierenden Teil der Sphäre vom rotierenden Himmelskörper.

Die Berechnung vom Energiestromdichte-Mittelwert der zum Mutterstern zugewandten Hemisphäre H1 kann näherungsweise mittels einer numerischen Integration erfolgen, wobei die Energiestromdichte beim energetischen Breitengrad β gegeben ist durch $j(\beta) = S \cdot [1 - A(\beta)]$:

β	$j(\beta)$	$\sin(\beta)$	$A(\beta)$	$[j(\beta_1)+j(\beta_2)]/2 \cdot [\sin(\beta_2)-\sin(\beta_1)]$	$[A(\beta_1)+A(\beta_2)]/2 \cdot [\sin(\beta_2)-\sin(\beta_1)]$
0	1107,3	0	0,19		
10	1093,6	0,1736	0,2	191	0,0339
20	1051,2	0,3420	0,231	180,6	0,0364
30	986,9	0,5	0,278	161	0,0402
40	907,7	0,6428	0,336	135,3	0,0438
50	824,3	0,7660	0,397	106,7	0,0451
60	746,4	0,8660	0,454	78,5	0,0425
70	683,5	0,9397	0,5	52,7	0,0352
80	641,1	0,9848	0,531	29,9	0,0233
90	626,1	1	0,542	9,6	0,0082
	$\varnothing = 866,8 \text{ W/m}^2$		$\varnothing = 0,3661$	$\Sigma = 945,3 \text{ W/m}^2$	$\Sigma = 0,3086$

Aus dieser Betrachtung erhält man einen theoretischen Wert von $j(H1, H2)_{avg} = 946,6 \text{ [W/m}^2\text{]}/2 = 473,3 \text{ W/m}^2$ der mittleren Energiestromdichte über die gesamte Kugeloberfläche verteilt. Mit diesem Wert von $473,3 \text{ W/m}^2$ und abzüglich der latenten sowie sensiblen Energiestromdichten von etwa 100 W/m^2 ergibt sich eine Energiestromdichte für die Erdoberfläche von $373,3 \text{ W/m}^2$. Dies würde nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz einer Effektivtemperatur der Erdoberfläche von $T_{eff_{sfc}} = 287,8 \text{ K}$ entsprechen. Diese energetische Verteilung wäre im Sinne der Physik nach dem Erhaltungssatz der Energie auch denkbar.

C) Zentral-Solarpunkt Ansatz mit konstanter Albedo - Verteilung der Temperatur

Bei dem Zentral-Solarpunkt Ansatz erhält man die Temperatur-Verteilung auf einer nicht-rotierenden Kugeloberfläche (Hemisphäre) aus Sicht der Sonne, wenn man den Zentral-Solarpunkt T_0 als thermischen Pol definiert, wobei sich die Temperatur beim thermischen Breitengrad β mit einer konstanten Albedo ergibt nach: $T(\beta) = T_0 \cdot \cos(\beta)^{1/4}$ oder $T(\beta)^4 = T_0^4 \cdot \cos(\beta)$.

Die Gleichung für den Temperatur-Mittelwert der zum Mutterstern zugewandten Hemisphäre H1 aus der Zentral-Solarpunkt Betrachtung in den Grenzen $0 \leq \beta \leq \pi/2$ ist:

$$T(\beta, H1)_{avg} = T_0 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\beta)^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot d\beta = -\frac{4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{15 \cdot \Gamma\left(-\frac{3}{8}\right)} \cdot T_0 \approx 0,93087 \cdot T_0 \quad (4.11)$$

oder

$$T(\beta, H1)_{avg}^4 = T_0^4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\beta) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot d\beta = \frac{\pi}{4} \cdot T_0^4 \quad (4.12)$$

$T(\beta, H1)_{avg} = 0,93087 \cdot T_0 = 0,93087 \cdot 364,13 \text{ K} = 339 \text{ K}$ oder $T(\beta, H1)_{avg} = (\pi/4 \cdot T_0^4)^{1/4} = (\pi/4 \cdot 364,13^4)^{1/4} = 343 \text{ K}$, wobei $(\pi/2 - \beta)$ den Winkel der diffus reflektierenden Fläche zum einfallenden Strahlungsvektor vom thermischen Breitengrad der Hemisphäre aus Sicht der Erde kennzeichnet. Das ist die flächen-treue Berechnung der mittleren Temperatur für die bestrahlte und diffus reflektierende Hemisphäre H1.

Man kann diese flächengewichtete Berechnung für Gleichung (4.11) und (4.12) auch näherungsweise mit Hilfe einer numerischen Integration durchführen:

β	$T(\beta)$	$T(\beta)^4$	$\sin(\beta)$	$[T(\beta_1)+T(\beta_2)]/2 \cdot [\sin(\beta_2)-\sin(\beta_1)]$	$[T(\beta_1)^4+T(\beta_2)^4]/2 \cdot [\sin(\beta_2)-\sin(\beta_1)]$
0	364,13	$1,7579 \cdot 10^{10}$	0		
10	362,74	$1,7313 \cdot 10^{10}$	0,1736	63,09	$3,0283 \cdot 10^9$
20	358,51	$1,6519 \cdot 10^{10}$	0,3420	60,73	$2,8486 \cdot 10^9$
30	351,27	$1,5224 \cdot 10^{10}$	0,5	56,07	$2,5077 \cdot 10^9$
40	340,66	$1,3467 \cdot 10^{10}$	0,6428	49,4	$2,0485 \cdot 10^9$
50	326,04	$1,13 \cdot 10^{10}$	0,7660	41,07	$1,5256 \cdot 10^9$
60	306,19	$0,879 \cdot 10^{10}$	0,8660	31,61	$1,0045 \cdot 10^9$
70	278,46	$0,6013 \cdot 10^{10}$	0,9397	21,54	$0,5455 \cdot 10^9$
80	235,05	$0,3053 \cdot 10^{10}$	0,9848	11,58	$0,2044 \cdot 10^9$
90	0	0	1	1,79	$0,0232 \cdot 10^9$
	$\varnothing = 292,3 \text{ K}$	$\varnothing = 1,093 \cdot 10^{10} \text{ K}^4$		$\Sigma = 336,88 \text{ K}$	$\Sigma = 1,374 \cdot 10^{10} \text{ K}^4$

Anmerkung: Gerlich/Tscheuschner im Kapitel „3.7.4 Die Durchschnittstemperatur eines bestrahlten Globus“ der deutschen Übersetzung.

Diese Betrachtung von Gerlich/Tscheuschner entspricht dem „Zentral-Solarpunkt Ansatz - Verteilung der Temperatur“ in diesem Kapitel.

Die Definition der Bedingungen (77) bei Gerlich/Tscheuschner beschreibt die physikalische Wirksamkeit der Hemisphäre H1, aber keiner Sphäre. Sämtliche physikalischen Prozesse finden nur auf der zum Mutterstern zugewandten Hemisphäre H1 statt.

Die Hemisphäre H2 mit $T(H2) = 0 \text{ K}$ ist physikalisch nicht relevant, weil energetisch nicht relevant. Die Berechnungen der Gleichung (80) und (82) von Gerlich/Tscheuschner sind physikalisch betrachtet sinnfrei und alle darauf aufbauenden physikalischen Aussagen. Physikalisch korrekt (flächen-treu) wären die folgenden Berechnungen bzw. Betrachtungen nach dem Lambertschen Satz für einen bestrahlten und diffus reflektierenden Körper:

Gleichung (80) - inneres Integral $[0, \pi/2]$: $T_{eff}(H1)^4 = (\epsilon \cdot S / \sigma) \cdot \int \cos(\theta) \cdot \sin(\pi/2 - \theta) \cdot d\theta = \pi/4 \cdot (\epsilon \cdot S / \sigma)$

Gleichung (82) - inneres Integral $[0, \pi/2]$: $T_{phys}(H1) = (\epsilon \cdot S / \sigma)^{1/4} \cdot \int \cos(\theta)^{1/4} \cdot \sin(\pi/2 - \theta) \cdot d\theta \approx 0,93087 \cdot (\epsilon \cdot S / \sigma)^{1/4}$

Das ergibt für Gleichung (80) $T_{eff}(H1) = [\pi/4 \cdot (\epsilon \cdot S / \sigma)]^{1/4} = 339 \text{ K}$ (748 W/m^2) sowie einen Pseudo-Temperaturmittelwert von $339 \text{ K}/2 = 169,5 \text{ K}$ und für Gleichung (82) $T_{phys}(H1) = 0,93087 \cdot (\epsilon \cdot S / \sigma)^{1/4} = 336 \text{ K}$ (723 W/m^2) sowie einen Pseudo-Temperaturmittelwert von $336 \text{ K}/2 = 167,5 \text{ K}$. Betrachtet man das auf energetischer Basis, dann ergibt sich $(748 \text{ W/m}^2)/2 = 374 \text{ W/m}^2$ (entspricht $T_{eff_{sfc}} = 285 \text{ K}$) bzw. $(723 \text{ W/m}^2)/2 = 362 \text{ W/m}^2$ (entspricht $T_{phys_{sfc}} = 283 \text{ K}$).

Die energetische Interpretation ist im Sinne der Physik die einzig legitime Betrachtungsweise. Deshalb wäre die korrekte „physikalische Mitteltemperatur“ bei energetischer Gleichverteilung, die sich auf Basis der Bedingungen (77) für die Oberfläche vom Globus ergibt $T_{eff_{sfc}} = 285 \text{ K}$ bzw. $T_{phys_{sfc}} = 283 \text{ K}$. Damit wäre auch der Erhaltungssatz der Energie für die Betrachtung der Hemisphären H1/H2 wieder erfüllt. Und der Pseudo-Temperaturmittelwert hat gar nichts mit der Hemisphäre H2 zu tun, sondern kennzeichnet die mittlere Temperaturdifferenz der Hemisphäre H1.

Wie sagte einmal Melchior Palágyi so treffend: „Mathematik schützt vor Torheit nicht. Und was dabei herauskommt, ist Mathematismus, zur Formel erstarrte Pseudo-Physik.“