**Opgave 1:** Ligningen løses

$$3x - 7 = 5 \Leftrightarrow$$
$$3x = 12 \Leftrightarrow$$
$$x = 4$$

**Opgave 2:** Givet en funktion

$$f(x) = x^3 - 2x + 6$$

Her er

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

Så er

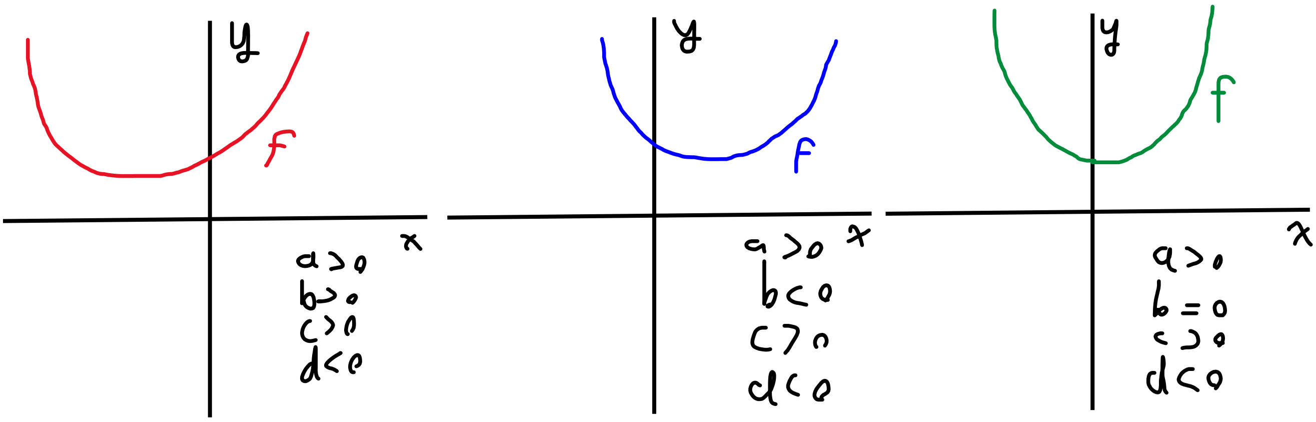
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10$$

**Opgave 3:**

Der er tale om en eksponentiel udvikling. Tallet $\mathbf{1134}$ er begyndelsesværdien og $\mathbf{1.014}$ er fremskrivningsfaktoren. I år 2005 var antallet af befolkningen i Indien 1134mio., hvorved dette vokser hvert år med $\mathbf{1.4\%}$ ifølge modellen.

**Opgave 4:**

Her er $a > 0$, $c > 0$ og $d < 0$. Der er intet oplyst om $b$. Her er der eksempler:




**Opgave 5:** Der er givet $f(x) = 6x^2 - 2x$, og stamfunktionen ønskes.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (6x^2 - 2x)\,dx = 2x^3 - x^2 + k$$

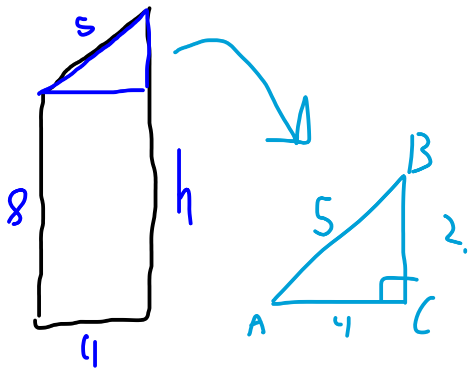
Indsæt punktet og udregn $k$.

$$2 \cdot 1^3 - 1^2 + k = 10 \Leftrightarrow k = 9$$

Og dermed er stamfunktionen i $P$ givet ved

$$F(x) = 2x^3 - x^2 + 9$$

**Opgave 6:**




Vi ser, at husets top, (lyseblå trekant $ABC$) kan den ukendte side bestemmes vha. Pythagoras, dvs. her skal $a$ bestemmes. Dette g-øres sådan:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tallene indsættes og man får

$$a^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

Dermed er dette højden af trekanten. Vi husker resten af gavlen og dermed er

$$h = 8m + 3m = 11m$$

Som er svaret.

**Opgave 7:**

a) Der foretages lineære regression af data oplysningerne. Disse foretages i Maple.

```
restart :; with(Gym) :
L1 := [62, 64, 70, 73, 78] :
L2 := [1.0, -1.6, -4.2, -7.2, -11.4] :
f(x) := LinReg(L1, L2, x) :
evalf[5](f(x))
                    -0.73154x + 46.089                    (1)
```

Dermed er tallet $a = -0.73154$ og $b = 46.089$ bestemt.

b) Fortolkning: For hver gang man øger den nordlige breddegrad med $1$, falder middeltemperaturen med $0.73154^o C$. Dernæst indsættes $x = 66$ i $f(x)$ og man får

$$f(66) = -0.73154 \cdot 66 + 46.089 = -2.19264$$

Så med en nordlig breddegrad på $66$, så er middeltemperaturen $-2.19264^o C$.

c) Her løses ligningen $f(x) = -10$.

$$-0.73154 \cdot x + 46.089 \underset{\text{Udregn selv ligningen}}{\Longleftrightarrow} x = 76.672 \approx 77$$

Så ved en nordlig breddegrad på $77$ opnås en cirka middeltemperatur på $-10^o C$.

**Opgave 8:**

a) Vinkel $B$ kan bestemmes vha. sinusrelationerne.

$$\angle B = \arcsin\left(\frac{8 \cdot \sin(22)}{5}\right) = 36.824^o$$

b) Længden $|AD|$ kan bestemmes. Det forudsætter man først bestemmer vinkel $D$ og $\angle C$.

$$\angle D = \arcsin\left(\frac{8 \cdot \sin(22)}{5}\right) = \angle B$$

Men da vi søger en stump vinkel, så fratrækkes $\angle B$ de $180^o$, så

$$\angle D = 180^o - \angle D = 180^o - 36.824^o = 143.176^o$$

**NB:** Man kunne også være skarp og observere selve trekanten. Det overlades til læseren for overbevisning. Vinkel $C$ bestemmes.

$$\angle C = 180^o - \angle A - \angle D = 180^o - 22^o - 143.176^o = 14.824^o$$

Og cosinusrelationerne anvendes for at finde $|AD|$.

$$|AD| = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(14.824)} = 3.415$$

Arealet af $ACD$ bestemmes vha. ½-appelsinformlen.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin(14.824) = 5.117$$

**Opgave 9:**

Ligningssystemet løses.

$$\begin{matrix} 2 = b \cdot 1^a \\ 7 = b \cdot 5^a \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2 = b \cdot 1 \\ 7 = b \cdot 5^a \end{matrix}$$

Fordi et hvert tal $n$ i eksponenten med grundtallet $1$ giver $1$, $\forall n \in \mathbb{R}$ . Vi ser, at $b = 2$, så det indsættes og vi får en ligning med en ubekendt.

$$7 = 2 \cdot 5^a \Leftrightarrow \frac{7}{2} = 5^a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{7}{2}\right) = a \cdot \ln(5) \Leftrightarrow \mathrm{a} = \frac{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}{\ln(5)} \approx 0.77843$$

Dermed er funktionen

$$f(x) = 2 \cdot x^{0.77843}$$

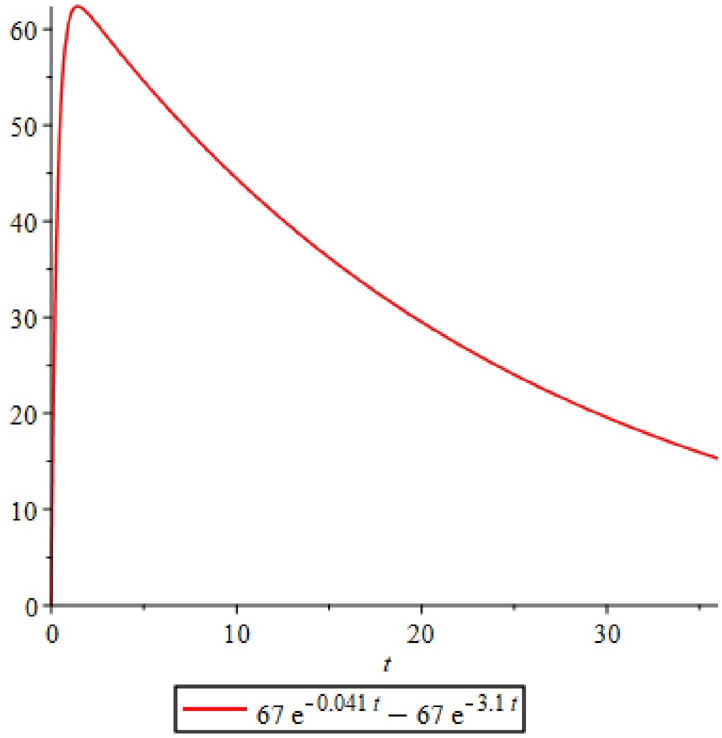
**Opgave 10:**

a) Funktionen tegnes i Maple vha. en plotkommando.

$C(t) := 67 \cdot (\exp(-0.041 \cdot t) - \exp(-3.1 \cdot t))$

$$C := t \mapsto 67\, e^{-0.041\, t} - 67\, e^{-3.1\, t} \quad \textbf{(1)}$$

$plot(C(t), t = 0..36, legend = [C(t)], color = ["Red"])$




Herefter indsættes $t = 20$ i $C(t)$, sådan så $C(20)$. I Maple ses svaret.

$C(20)$

$$29.50892085 \quad \textbf{(2)}$$

b) Her løses $C'(t) = 0$ og svaret indsættes i $C''(t)$. Er $C''(t) < 0$, så der maksimum, er $C''(t) > 0$ minimum. I Maple fås

$C'(t) = 0$

$$-2.747\, e^{-0.041\, t} + 207.7\, e^{-3.1\, t} = 0 \quad \textbf{(3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 1.414052084]] \quad \textbf{(4)}$$

$C''(1.414052084)$

$$-7.929748627 \quad \textbf{(5)}$$

Efter 1.41 timer er østrogenkoncentrationen maksimal.

c) Ligningen $C(t) = 25$ løses i Maple.

```
with(Gym) :
intervalsolve(C(t) = 25, t = 0 ..36)
                    [0.1539058611, 24.04431206]                    (7)
```

Det er ret indlysende at se, hvilken der er den korrekte løsning. Dermed skal der tages en pille, 24 timer senere.

**Opgave 11:**

a) Ligningen for tangenten bestemmes, men det forudsætter man har $f'$. Produktreglen anvendes.

$$\begin{aligned} f'(x) &= a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x) \\ &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x-7) \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x} - (x-7) \cdot \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Punktet indsættes i $f$ og $f'$ så

$$f(2) = (2-7) \cdot \mathrm{e}^{-2} = -5\mathrm{e}^{-2}$$
$$f'(2) = \mathrm{e}^{-2} - (2-7) \cdot \mathrm{e}^{-2} = 6\mathrm{e}^{-2}$$

Tangentligningen er så

$$\begin{aligned} y &= 6\mathrm{e}^{-2}(x-2) - 5\mathrm{e}^{-2} \\ &= 6\mathrm{e}^{-2}x - 12\mathrm{e}^{-2} - 5\mathrm{e}^{-2} \\ &= 6\mathrm{e}^{-2}x - 17\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Eller approksimeret

$$y = 0.81204x - 2.3008$$

b) Ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-x} - (x-7) \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\mathrm{e}^{-x} = (x-7) \cdot \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \\ &1 = x - 7 \Leftrightarrow \\ &x = 8 \end{aligned}$$

Der vælges $7$ og $9$ for at teste fortegn.

$$f'(7) = \mathrm{e}^{-7}, \qquad \mathit{positivt}$$
$$f'(9) = -\mathrm{e}^{-9}, \qquad \mathit{negativt}$$

Dermed er funktionen $f(x)$:

- Voksende i intervallet $x \in (-\infty; 8]$
- Aftagende i intervallet $x \in [8; \infty)$

## Opgave 12:

a) Nulhypotese: *Valg af kaffetype er uafhængig af nationalitet.*

De forventede værdier bestemmes ved formlen:

$$\frac{vandret\ sum \cdot lodret\ sum}{total\ sum}$$

Tabellen med de forventede værdier opstilles, og anvendes ovenstående formel fås resultaterne: (afrundet til hele tal)

| | Caffe latte | Espresso | Cappuccino | Total |
|---|---|---|---|---|
| Danske kunder | 696 | 160 | 233 | 1089 |
| Udenlandske kunder | 267 | 61 | 90 | 418 |
| Total | 963 | 221 | 323 | 1507 |

Vi viser udregningen for (Danske kunder, caffe latte) hvoraf resten overlades til læseren.

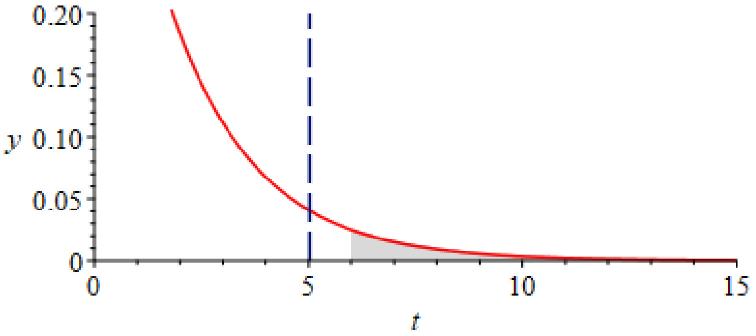
b) Her anvendes en uafhængighedstest[1]. Denne bestemmes i Maple.

$with(Gym):$

$OBS := \begin{bmatrix} 712 & 159 & 218 \\ 251 & 62 & 105 \end{bmatrix}:$

$ChiKvadratUtest(OBS, level = 0.05)$

$\chi^2$-teststørrelse = 5.0230
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.081148




Da $p$-værdien er større end 5%, så accepteres nulhyptesen.

[1] Ønsker man at regne den i hånden, se dette link: http://www.webmatematik.dk/lektioner/matematik-b/statistik/chi-2-chi-2-test

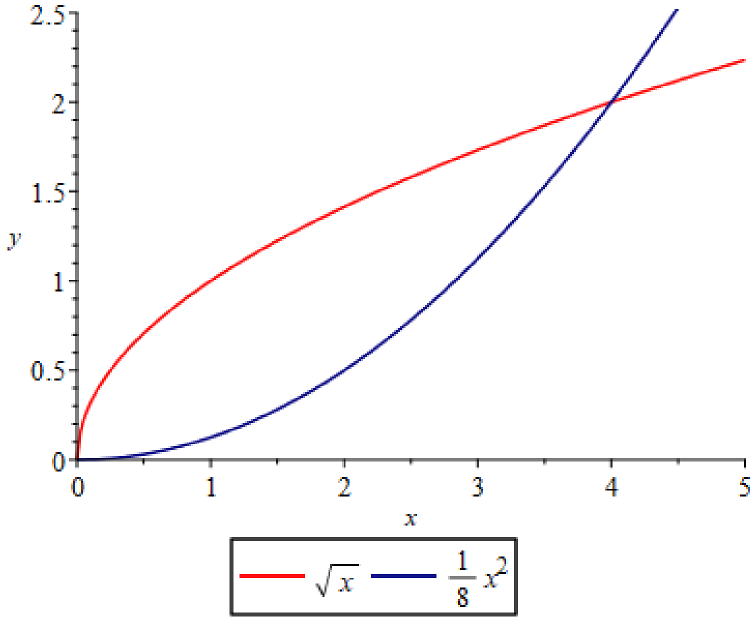
**Opgave 13:**

a) I Maple indlæses funktionerne, og samme plot kommando anvendes som i opgave 10.

*with*(*Gym*) :

$f(x) := x^{\frac{1}{2}} :; g(x) := \frac{1}{8} \cdot x^2 :$

*plot*( [ $f(x)$, $g(x)$ ], $x = 0\,..5$, $y = 0\,..2.5$, *legend* = [ $f(x)$, $g(x)$ ], *color* = ["Red", "Navy"])




Arealet af $M$ bestemmes vha. integralregning. Begge funktioner integreres. Der anvendes sum af to bestemte integraler.

$$M = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^2\right) dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^4$$

$$= \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4^3}{24} - \left(\frac{2 \cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{0^3}{24}\right)$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{64}{24}$$

$$= \frac{8}{3}$$

Som er arealet af $M$.