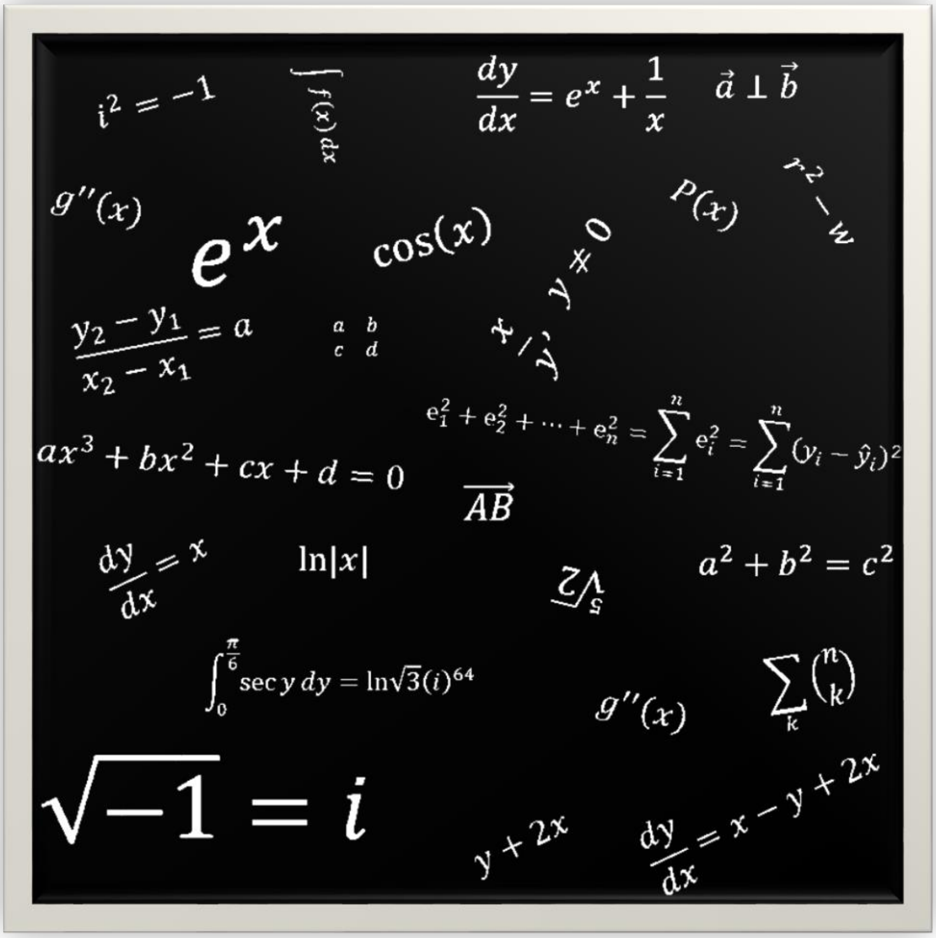
MATEMATIK B-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

24. maj 2013



Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

$$STX\ matematik\ B\ maj\ 2013 - niveau, delprøve\ 1$$

Opgave 1

a) Tallet a bestemmes.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{29-5}{6-2} = \frac{24}{4} = 6$$

Hermed er tallet a bestemt til 6.

Opgave 2

a) Længden $|AB|$ bestemmes vha. arealformlen.

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot g \Leftrightarrow 40 = 5 \cdot g \Leftrightarrow \frac{40}{5} = g \Leftrightarrow g = 8$$

Så er længden $|AB|$=8.

Opgave 3

a) Toppunktet bestemmes.

$$f'(x) = 2x - 2$$

Så løses der en ligning.

$$2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Så finder man y, man har

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Altså er toppunktet

$$T_x = 1; \quad T_y = -4$$

Opgave 4

a) Den største fordoblingskonstant er for h, da a −værdien er mindst her. Dette kan man også se ved grafisk analyse af funktionernes forløb.

Opgave 5

a) Funktionen er givet. $f(x) = -2x^4 + 2x + 5$, så bestemmes den afledede.

$$f'(x) = -2 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 1x^{1-1} + 0 = -8x^3 + 2$$

Opgave 6

a) Arealet bestemmes. Man har funktionen $f(x) = -x^3 + 8$.

$$M = \int_0^2 f(x)\,dx$$

Så indsætter man oplysningerne.

$$M = \int_0^2 -x^3 + 8\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 8x\right]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 8 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 8 \cdot 0\right)$$
$$= -4 + 16 + 0 + 0 = 12$$

Således fandt man arealet.

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

$STX\ matematik\ B\ maj\ 2013 - niveau, delprøve\ 2$

Opgave 7

a) Alle oplysninger indskrives i Maple 2016, for der udføres lineære regression.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :; L2 := [195, 190, 161, 110, 107, 82] :$
$y(x) := LinReg(L1, L2, x) :$
$y(x)$

$$-24.7142857142857\,x + 202.619047619048$$

Det ses, at modellen er bestemt samt tallene a og b.
$a = -24.714$ og $b = 202.619$

b) $y(6)$

$$54.3333333333333$$

Dvs. i det første halve år, er der ca. $54.33 \approx 54$ dræbte i trafikken

c) $y(x) = 50$

$$-24.7142857142857\,x + 202.619047619048 = 50$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 6.175337187]]$$

Dvs. I år 2013.175 eller 2014 hvis man skal tro på modellen, vil antallet af dræbte være 50.

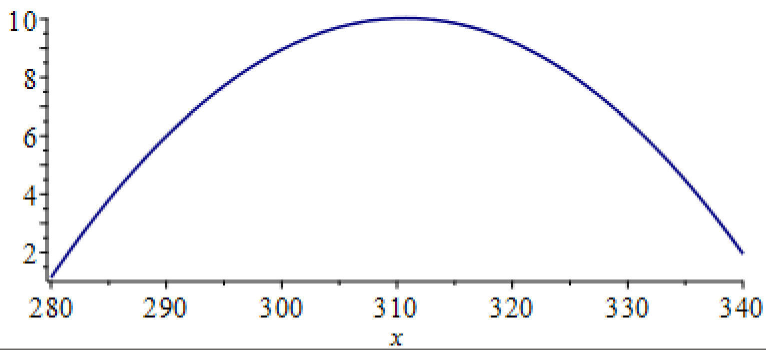
Opgave 8

a) I Maple 2016 udføres tegningen.

$f(x) := -0.009425\,x^2 + 5.857\,x - 899.9$

$$x \rightarrow (-1) \cdot 0.009425\,x^2 + 5.857\,x - 899.9$$

Så tegnes grafen.
$plot([f(x)], x = 280\,..340, legend = [f(x)], color = [\text{"Navy"}])$



Fortsættes næste side

Så har man grafen. Hvis man indsætter 300 i $f(x)$ fås

$$f(300) = -0.009425 \cdot 300^2 + 5.857 \cdot 300 - 899.9 = 8.95$$

Så der vil altså være $8.95 \approx 9$ æg.

b) Så har man en ligning.

$$f(x) = 6$$

Så er

$$6 = -0.009425 \cdot x^2 + 5.857 \cdot x - 899.9 \Leftrightarrow$$
$$0 = -0.009425 \cdot x^2 + 5.857 \cdot x - 905.9$$

Løses mht. x, så er

$$d = 5.857^2 - 4 \cdot (-0.009425) \cdot (-905.9) = 0.152019, \qquad d > 0$$

Så er

$$x = \frac{-5.857 \pm \sqrt{0.152019}}{2 \cdot (-0.009425)} = \begin{cases} 290.032 \\ 331.400 \end{cases}$$

Dvs. at en skildpadde skal have en rygskjold på $290mm$ eller $331mm$ for, at den ligger 6 æg.

<u>Opgave 9</u>

a) Al den tekst blev afkodet og man har modellen

$$f(x) = 2038 \cdot 1.013^x$$

Som beskriver udviklingen af det årlige nye antal lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark fra år 2010

$$a = 1 + r \Leftrightarrow a = 1 + \left(\frac{1.3}{100}\right) \Leftrightarrow a = 1 + 0.013 \Leftrightarrow a = 1.013$$

Her er $a > 1$

b) Så er der givet en anden model.

$$m(x) = 2244 \cdot 0.99^x$$

Dvs. her er $0 < a < 1$.

Hvis tilfældene skal være ens, så har man en ukendt variabel i ligningerne. Man har $f(x) = m(x)$, så er

$$2038 \cdot 1.013^x = 2244 \cdot 0.99^x$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 4.192663$$

Dvs. i år 2014 vil der være ens tilfælde for mænd og kvinder.

Opgave 10

a) For bestemmelse af $|BD|$ har man allerede de oplysninger der gør, at man kan bruge cosinusrelationerne.

$$|BD| = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos(10)} = 0.697$$

Så er længden $|BD|$ ca. 0.697 meter.

b) For bestemmelse af differencen mellem høj- og lavvandet, så betyder det faktisk, at man har højvandet til at være ingen afstand. Lavvandt giver den rette linje. I denne retvinklet trekant har man vinkel C. På figuren ses det, at linjen ovenfor og nedenfor er parallelle, så hvis man kender en vinkel i den vilkårlige trekant, er det hermed muligt at bestemme vinklen i den retvinklede trekant for derefter at bestemme højden. Så vinkel B bestemmes i den vilkårlige trekant. Den bestemmes vha. sinusrelationerne.

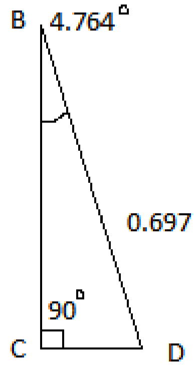
$$\frac{\sin(A)}{|BD|} = \frac{\sin(B)}{|AD|}$$

Så indsættes værdierne.

$$\frac{\sin(10)}{0.697} = \frac{\sin(B)}{4} \Leftrightarrow \sin(10) \cdot 4 = 0.697 \cdot \sin(B) \Leftrightarrow \sin(B) = \frac{\sin(10) \cdot 4}{0.697} \Leftrightarrow$$

$$\angle B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(10) \cdot 4}{0.697}\right) = 85.236^o$$

Her antager man, at højden er ortogonal med de to parallelle linjer, der danner den retvinklede trekant. Så har man



$$90 - 85.236 = 4.764$$

Så vinkel B i den vilkårlige trekant må altså være 4.764^o

Så kan man endelig bestemme den højde, $|BC|$, som der ønskes.

$$|BC| = |BD| \cdot \cos(B)$$

Man indsætter sine oplysninger og man får så højden

$$|BC| = 0.697 \cdot \cos(4.764) = 0.694$$

Altså er det den højde der angiver differencen mellem høj- og lavvand. Det hele måles i meter.

Opgave 11

a) For nemhedens skyld skrives tabellen ind MED "i alt". Man har så

Observerende	A er bedst	B er bedst	Ved ikke	I alt (lodret)
Jyder	55	40	30	125
Sjællændere	75	45	20	140
I alt (vandret)	130	85	50	265

Man antager, at nulhypotesen er

$$H_0 = Der\ er\ ikke\ forskel\ på\ unge\ juders\ og\ unge\ sjællænderes\ smag\ for\ de\ to\ typer\ cornflakes$$

De forventede værdier bestemmes så. Formlen er:

$$\frac{vandret\ sum}{sum\ i\ alt} \cdot lodret\ sum$$

Så har man

Forventede	A er bedst	B er bedst	Ved ikke	I alt (lodret)
Jyder	$\frac{130}{265} \cdot 125 = 61.320$	$\frac{85}{265} \cdot 125 = 40.094$	$\frac{50}{265} \cdot 125 = 23.584$	125
Sjællændere	$\frac{130}{265} \cdot 140 = 68.679$	$\frac{85}{265} \cdot 140 = 44.905$	$\frac{50}{265} \cdot 140 = 26.415$	140
I alt (vandret)	130	85	50	265

Man kunne også i Maple bestemme de forventede værdier.

with(*Gym*) :
restart

$$obs := \begin{bmatrix} 55 & 40 & 30 \\ 75 & 45 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 55 & 40 & 30 \\ 75 & 45 & 20 \end{bmatrix}$$

forventet(*obs*)

$$\begin{bmatrix} 61.321 & 40.094 & 23.585 \\ 68.679 & 44.906 & 26.415 \end{bmatrix}$$

b) I Maple kan man desuden udføre chi-anden-testen. Først vises metoden pr. håndkraft. Formlen er

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(O_1 - F_1)^2}{F_1} + \frac{(O_2 - F_2)^2}{F_2} + \cdots + \frac{(O_k - F_k)^2}{F_k}$$

Så indsætter man og får

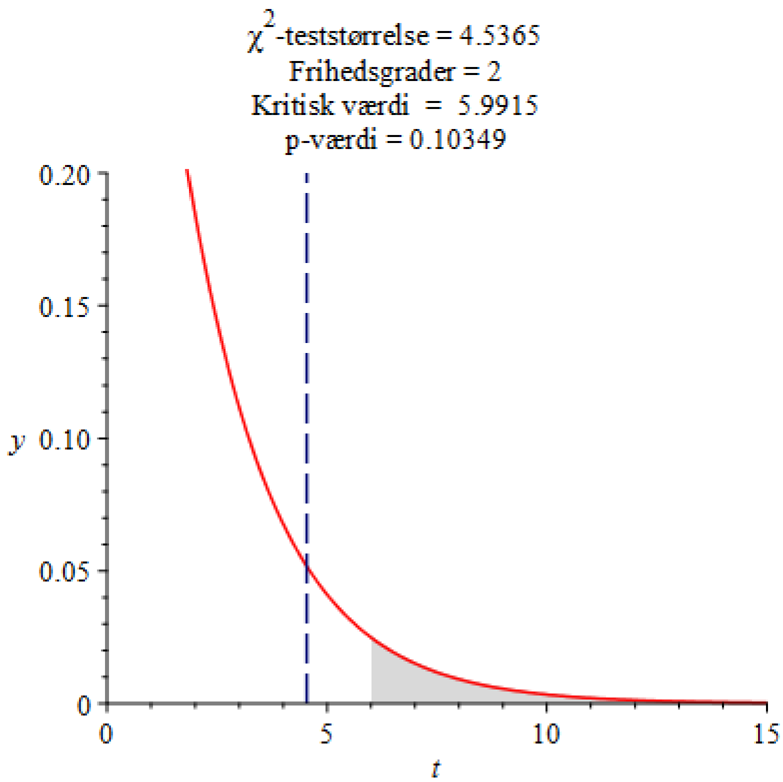
$$\chi^2 = \frac{(55 - 61.320)^2}{61.320} + \frac{(40 - 40.094)^2}{40.094} + \frac{(30 - 23.584)^2}{23.584} + \frac{(75 - 68.679)^2}{68.679} + \frac{(45 - 44.905)^2}{44.905} + \frac{(20 - 26.415)^2}{26.415} = 4.5369$$

Hermed har man sin teststørrelse. Desuden er der tale om et signifikansniveau på 5%.

$$Teststørrelse = 4.5369, frihedsgrader = 2$$

Normalt vil det være en god idé at finde den kritiske værdi, så man kan tjekke om hypotesen er sand eller falsk. Nu vises det hvordan det udføres i Maple. Man må håbe teststørrelsen bliver det samme.

$ChiKvadratUtest(obs)$



Det ses, at teststørrelsen (heldigvis) er den samme. Da den er mindre en den kritiske værdi, accepteres nulhypotesen. Der er altså ikke noget signifikans forskel på unge og deres valg af morgenmad.

Opgave 12

a) Monotoniforholdene bestemmes på TO måder.
Funktionen er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$$

Metode 1)
For at bestemme monotoniforholdene, må man differentiere funktionen og løse en ligning mht. x. Man har så

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Så er

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

Her ses to reelle rødder. Endelig gør man prøve for at se, om hvordan grafen forløber sig.

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 9 = 15$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9 = -12$$
$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 9 = 15$$

Så kan monotonitabellen tegnes.

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Derved må konklusionen være, at
f er voksende i intervallet $]-\infty; -1]$
f er aftagende i intervallet $[-1; 3]$
f er voksende i intervallet $[3; \infty[$

Metode 2)
Funktionen differentieres og man har

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Så tog man

$$f'(x) = 0$$

Og rødderne fik man i metode 1, som er

$$x = -1 \vee x = 3$$

Disse indsættes i den dobbelte afledede af f, så man har

$$f''(x) = 6x - 6$$

Så er

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12, \qquad -12 < 0$$
$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12, \qquad 12 > 0$$

Så er konklusionen ud fra hhv. maksimale og minimale punkt så:
f er voksende i intervallet $]-\infty; -1]$
f er aftagende i intervallet $[-1; 3]$
f er voksende i intervallet $[3; \infty[$

b) Tangenten t_1 bestemmes, når man kender punktet $P(0, f(0))$, så man har

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + 30 = 30$$
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9$$

Så er

$$t_1 = -9 \cdot (x - 0) + 30 \Leftrightarrow t_1 = -9x + 30$$

Som altså er tangentligningen for t_1.

c) Hvis t_2 har samme hældningskoefficient og i dette tilfælde er $a = -9$, så kan man bestemme førstekoordinaten til det punkt, hvor t_2 tangerer grafen for f, vha. den afledede af f. Man har så ligningen

$$f'(x) = -9$$

Så er

$$3x^2 - 6x - 9 = -9 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 - 6x = 0$$

Så anvendes nulreglen.

$$x(3x - 6) = 0$$

Så er

$$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Koordinaterne er så:

$$x = 0 \lor x = 2$$

Det ses, at $x = 0$ allerede optræder et sted, nemlig $P = (0, f(0))$. Derved må $x = 2$ være det punkt, hvorpå t_2 tangerer grafen for $f(x)$. Man kan endvidere finde andenkoordinaten ved indsættelse af x værdien i $f(x)$. Dette gøres.

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 30 = 8$$

Så er koordinatsættet

$$Q = (2, 8)$$

Selvom det kun var førstekoordinaten man skulle finde. Grafisk ser det så farligt ud: