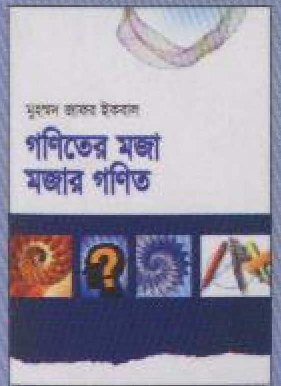
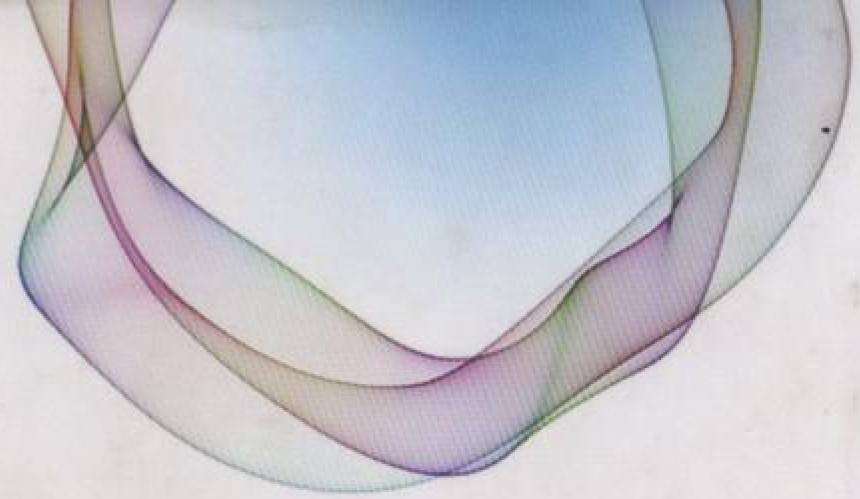


Goniter Moja Mojar Gonit

by Muhammed Zafar Iqbal
price Bdt 180.00 only
US $ 9.00
cover design :: Masum Rahman
anyaprokash<< dhaka<< bangladesh
www.anyaprokash.com

an ANYAPROKASH publication
Bdt 180
ISBN 984 868 422 0

গণিতের মজা মজার গণিত | মুহম্মদ জাফর ইকবাল



মুহম্মদ জাফর ইকবাল

গণিতের মজা
মজার গণিত

CONVERTED TO PDF

BY

---RoNy

E-mail: tanvir_ahmad_rony@yahoo.com

(c) **Tanvir Ahmad rony**

Mechanical Engineering , Batch -2004

KUET

বইটির উদ্দেশ্য গণিত শেখানো নয়, বইটির উদ্দেশ্য গণিতে উৎসাহী করে তোলা। গণিতের চমকপ্রদ, রহস্যময় বা মজার কিছু বিষয় এখানে তুলে ধরা হয়েছে।

গণিতের সমস্যা না করা হলে গণিতের মজাটুকু পুরোপুরি বোঝা যায় না, তাই খুঁজে পেতে একশ সমস্যা এখানে জুড়ে দেয়া হয়েছে। সমস্যাগুলো এমনভাবে বেছে নেয়া হয়েছে যে গণিতের জ্ঞান খুব বেশি না হলেও কোনো ক্ষতি নেই, যে-কেউ এখানে দাঁত বসাতে পারবে। সত্যি কথা বলতে কী, কিছু কিছু সমস্যা আসলে খাঁটি গণিতের সমস্যা নয়— যুক্তিতর্ক এবং লজিকের সমস্যা।

এই বইয়ের শেষ পর্বে একশ চমকপ্রদ সংখ্যা তুলে দেয়া হয়েছে, সেগুলোতে একবার চোখ বুলিয়ে গেলে যে কেউ মজা পাবে, বুদ্ধি পরীক্ষা করার জন্যে এর চাইতে মজার কিছু হতে পারে না।

প্রচ্ছদ :: মাসুম রহমান

গণিতের মজা মজার গণিত

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

অন্যপ্রকাশ

দ্বিতীয় মুদ্রণ | একুশের বইমেলা ২০০৭
প্রথম প্রকাশ | একুশের বইমেলা ২০০৭

© | লেখক

প্রচ্ছদ | মাসুম রহমান

প্রকাশক | মাজহারুল ইসলাম
অন্যপ্রকাশ
৩৮/২-ক বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০
ফোন : ৭১২৫৮০২ ফ্যাক্স : ৮৮০-২-৯৬৬৪৬৮১

মুদ্রণ | কালারলাইন প্রিন্টার্স
৬৯/এফ গ্রীনরোড, পান্থপথ, ঢাকা

মূল্য | ১৮০ টাকা

আমেরিকা পরিবেশক | মুক্তধারা
জ্যাকসন হাইট, নিউইয়র্ক

যুক্তরাজ্য পরিবেশক | সঙ্গীতা লিমিটেড
২২ ব্রিক লেন, লন্ডন, যুক্তরাজ্য

Goniter Moja Mojar Gonit | by Muhammed Zafar Iqbal
Published by Mazharul Islam
Anyaprokash
Cover Design : Masum Rahman
Price : Tk.180.00 only
ISBN : 984 868 422 0

গণিত অলিম্পিয়াডের
স্বেচ্ছাসেবক— 'মুভার্স'দের উদ্দেশে
যাদের ছাড়া বাংলাদেশে
গণিতকে নিয়ে এই আন্দোলন গড়ে উঠত না

ভূমিকা

এই বইটির উদ্দেশ্য গণিত শেখানো নয়, বইটির উদ্দেশ্য গণিতে উৎসাহী করে তোলা। গণিতের যে বিষয়গুলো আমার কাছে চমকপ্রদ, রহস্যময় বা মজার বলে মনে হয়েছে তার কিছু এখানে তুলে ধরা হয়েছে।

গণিতের সমস্যা না করা হলে গণিতের মজাটুকু পুরোপুরি বোঝা যায় না, তাই খুঁজে পেতে একশ সমস্যা এখানে জুড়ে দেয়া হয়েছে। বইয়ে এর সমাধানগুলোও আছে, কিন্তু আমি আশা করব একেবারে বাধ্য না হলে কেউ সমস্যাগুলো দেখবে না। সমস্যাগুলো এমনভাবে বেছে নেয়া হয়েছে যে গণিতের জ্ঞান খুব বেশি না হলেও কোনো ক্ষতি নেই, যে-কেউ এখানে দাঁত বসাতে পারবে। সত্যি কথা বলতে কী, কিছু কিছু সমস্যা আসলে খাঁটি গণিতের সমস্যা নয়— যুক্তিতর্ক এবং লজিকের সমস্যা। আমি নিজে সেগুলোর পিছনে অনেক সময় কাটিয়ে দিতে পারি, আমার ধারণা অন্যেরাও পারবে।

এই বইয়ের শেষ পর্বে একশ চমকপ্রদ সংখ্যা তুলে দেয়া হয়েছে, সেগুলোতে একবার চোখ বুলিয়ে গেলে যে কেউ মজা পাবে, বন্ধুদের বুদ্ধি পরীক্ষা করার জন্যে এর চাইতে মজার কিছু ব্যবহার করা যায় বলে আমার জানা নেই।

বলা বাহুল্য এখানে অনেক কিছুই বিভিন্ন বই এবং ইন্টারনেট থেকে সংগ্রহ করা। বইগুলোর নাম এবং ওয়েবসাইটগুলো বইয়ের পিছনে জুড়ে দিয়েছি, যারা আগ্রহী সেখানে চোখ বুলিয়ে নিতে পারবে।

আবার বলছি, একজন পাঠক বা পাঠিকাও যদি এই বইটি পড়ে গণিতে উৎসাহী হয় আমি মনে করব আমার পরিশ্রমটুকু কাজে লেগেছে— সবাইকে বলে রাখি, এর চাইতে অনেক কম পরিশ্রমে একটা সায়েন্স ফিকশান বা একটা কিশোর অ্যাডভেঞ্চার লেখা যায়।

মুহম্মদ জাফর ইকবাল
শাবিপ্রবি, সিলেট

সূ চি

প্রথম পর্ব : গণিতের মজা

1. 1 = 2 ১৩
2. আবার 1 = 2 ১৬
3. আরো একবার 1 = 2 ১৮
4. শেষবার 1 = 2 ২১
5. গাউস দিয়ে শুরু ২৫
6. ফিবোনাচি ধারা ৩০
7. ফিবোনাচি পদ ৩৪
8. মৌমাছির বাচ্চা ৩৬
9. সোনালী অনুপাত ৩৮
10. টাওয়ার অফ হ্যানয় ৪৬
11. মারজেন প্রাইম ও পারফেক্ট সংখ্যা ৫০
12. সসীম ক্ষেত্রের অসীম পরিসীমা ৫৭
13. বাইনোমিয়ালের সূত্র এবং প্যাস্কেলের ত্রিভুজ ৬০
14. বর্গমূল কতো ? ৬৬
15. উৎপাদক কতো ? ৭১

দ্বিতীয় পর্ব :

একশ মজার গাণিতিক সমস্যা ৭৬

সমাধান ৯৭

তৃতীয় পর্ব :

একশ চমকপ্রদ সংখ্যা ১২৪

পরিশিষ্ট

বই ওয়েবসাইটের তালিকা ১৫২

প্রথম পর্ব

1. 1 = 2

গণিতে কখনো 1 = 2 হয় না। হলে কী বিপদই না হতো— বন্ধুর কাছ থেকে একটা বই পড়তে এনে দুটো ফেরত দিতে হতো, একটা পরীক্ষা দিতে গিয়ে দুটো পরীক্ষা দিয়ে আসতে হতো কিংবা এক কিলোমিটার হাঁটতে গিয়ে দুই কিলোমিটার হেঁটে ফেলতে হতো! 1 = 2 কখনো হতে পারে না জেনেও কেউ কেউ নিশ্চয়ই এটা প্রমাণ করে দেখিয়ে দেয়। প্রমাণটা হয় এরকম :

$$x = y$$

$$xy = y^2$$

দুই পাশে x^2 বিয়োগ করে পাই—

$$xy - x^2 = y^2 - x^2$$

$$x(y - x) = (y + x)(y - x)$$

এখন দুই পাশ থেকে $y - x$ কাটাকাটি করে ফেলা হয়। তখন বাকি থাকে :

$$x = x + y$$

যেহেতু $x = y$ কাজেই

$$x = x$$

অর্থাৎ $x = 2x$ অর্থাৎ 1 = 2

বোঝাই যাচ্ছে এখানে কোনো একটা ভুল করা হয়েছে। ভুলটি হচ্ছে দুই পাশে $y - x$ বা $x - x$ কাটাকাটি করে ফেলা। $x - x$ হচ্ছে শূন্য (0), আর দুই পাশ থেকে $x - x$ কাটাকাটি করার আসল অর্থ দুই পাশেই $x - x$ বা শূন্য দিয়ে ভাগ দেওয়া। গণিতে শূন্য দিয়ে ভাগ করা নিষিদ্ধ। অর্থাৎ কোথাও যদি কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে ভাগ দেয়া হয় তাহলে তারপরে যা ঘটবে গণিত তার দায়দায়িত্ব নেবে না। কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে ভাগ দেয়া হলে সেটা হয়ে যায় অনির্ণেয় অর্থাৎ যার

মান কেউ বের করতে পারবে না। কারণটা বোঝা এমন কিছু কঠিন নয়, কারণ আমরা জানি কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে গুণ করা হলে গুণফল হয় শূন্য।

$$a.0 = 0$$

যদি কোনো কিছুকে 0 দিয়ে ভাগ দেয়া যেত তাহলে আমরা লিখতে পারতাম—

$$\frac{a}{0} = b$$

অর্থাৎ a-কে শূন্য দিয়ে ভাগ করে ভাগফল পেয়েছি b, এবারে আমরা লিখতে পারি—

$$a = b.0$$

যার অর্থ b-কে শূন্য দিয়ে গুণ করে গুণফল পেয়েছি a, কিন্তু আমরা খুব স্পষ্ট করে বলে দিয়েছি কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে গুণ করা হলে গুণফল হবে শূন্য অন্য কোনো কিছু নয়। নিজেরাই নিজেদের ফাঁদে পড়ে গিয়েছি $\frac{a}{0} = b$ লিখে! কাজেই এটা লেখা যাবে না, শূন্য দিয়ে ভাগ করলে যেটা পাওয়া যায় সেটা অনির্ণেয়।

অনেকেই বলে থাকে কোনো বিন্দুকে শূন্য দিয়ে ভাগ দেয়া হলে সেটা হয়ে যায় অসীম (Infinity) এটাও কিন্তু ভুল। কেন ভুল সেটা বেশ সহজেই প্রমাণ করা যায়। ধরা যাক আমরা 1-কে শূন্য দিয়ে ভাগ করার চেষ্টা করব তবে চট করে না করে ধীরে ধীরে। 1 থেকে বেশি দিয়ে ভাগ করা হলে ভাগফল হবে 1 থেকে কম আবার 1 থেকে ছোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হলে ভাগফল হবে 1 থেকে বেশী। কাজেই আমরা 1 দিয়ে শুরু করি এবং ধীরে ধীরে আরও ছোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিতে থাকি। ফলাফলটা হবে এরকম—

1-কে 1 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 1

1-কে 0·1 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 10

1-কে 0·01 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 100

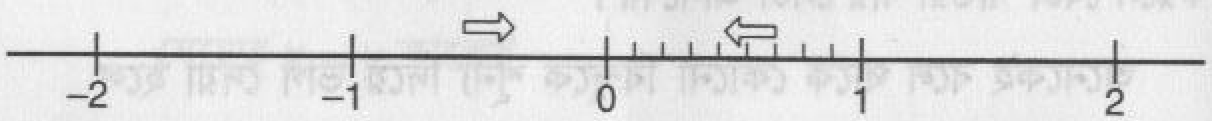
1-কে 0·001 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 1000

⋮

1-কে 0·0000001 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 10,000,000 = 10^7

1-কে 0·00000001 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 100,000,000=10^8

কাজেই আমরা দেখতেই পাচ্ছি যত ছোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিই ভাগফল তত বাড়তে থাকে। কাজেই যে ছোট সংখ্যাটা দিয়ে ভাগ দিচ্ছি সেটাকে যদি ছোট করতে করতে এক সময় শূন্য করে ফেলি তাহলে নিশ্চয়ই ভাগফল বাড়তে বাড়তে এক সময় অসীম হয়ে যাবে! যুক্তিটাতে ভুল কোথায় ? কেন আমরা বলি কোনো সংখ্যাকে 0 দিয়ে ভাগ দেয়া হলে ভাগফল অসীম নয়, ভাগফল অনির্ণেয় ?



চিত্র-1 : সংখ্যারেখা, 0 থেকে বড় বা ধনাত্মক (পজেটিভ) সংখ্যা শূন্যের ডানপাশে এবং শূন্য থেকে ছোট বা ঋণাত্মক (নেগেটিভ) সংখ্যা বাম পাশে দেখানো হয়েছে।

কারণটা বোঝার জন্যে আমাদের একবার সংখ্যারেখা বা নাম্বার লাইন (Number Line)-এর দিকে তাকাতে হবে। এই রেখাটার ঠিক মাঝখানে শূন্য, যা কিছু শূন্য থেকে বড় সেগুলো ডান দিকে এবং যা কিছু শূন্য থেকে ছোট সেগুলো বামদিকে বসানো হয়েছে। আমরা 1-কে ক্রমান্বয়ে ছোট থেকে ছোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিয়ে শূন্যের কাছে পৌছে শূন্য দিয়ে ভাগ করেছি (অন্তত চেষ্টা করেছি!) কিন্তু সংখ্যা রেখার দিকে

তাকিয়েই আমরা একটা জিনিস বুঝতে পারি— আমরা ইচ্ছে করলে নেগেটিভ সংখ্যা দিয়ে শুরু করেও শূন্যের কাছে পৌছাতে পারতাম। আমরা সেটা করে দেখি কী হয়—

1-কে – 1 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল – 1

1-কে – 0·1 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল – 10

1-কে – 0·01 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল – 100

⋮

1-কে –0·0000001 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল – 10,000,000

= -10^7

অর্থাৎ 1-কে যতই ছোট নেগেটিভ সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিচ্ছি ভাগফল হিসেবে ততই বড় একটা নেগেটিভ সংখ্যা পেয়ে যাচ্ছি। কাজেই নেগেটিভ সংখ্যাটাকে ছোট করতে করতে যখন একেবারে শূন্য করে ফেলব ভাগফল তখন একটা নেগেটিভ বড় সংখ্যা হতে হতে নেগেটিভ অসীম সংখ্যা হয়ে যাবে! কাজেই এই যুক্তিটাতে ভুল কোথায় ?

আলাদা আলাদাভাবে কোনো যুক্তিতেই ভুল নেই। 1-কে শূন্য দিয়ে ভাগ করে আমরা অসীম পেয়েছি কিন্তু সংখ্যারেখায় যখন ডানদিক থেকে এসেছি তখন পেয়েছি পজেটিভ ইনফিনিটি এবং যখন বামদিক থেকে এসেছি তখন পেয়েছি নেগেটিভ ইনফিনিটি। কোনটা ঠিক ?

উত্তর খুব সহজ: কোনোটাই ঠিক না। কোনো সংখ্যাকে শূন্য দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল কী হবে গণিত সেটা জানে না— সেটা হচ্ছে অনির্ণেয়। ভাগ করার জন্যে শূন্যের যত কাছাকাছি সম্ভব সংখ্যা নেয়া যেত পারে কিন্তু কখনো শূন্যকে নেয়া যাবে না!

2. আবার 1 = 2

1 = 2 প্রমাণ করার জন্যে আমাদের শূন্য দিয়ে ভাগ করার মতো একটা ঘোরতর অন্যায় কাজ করতে হয়েছিল। এবারে দেখা যাক অন্যভাবে সেটা করা যায় কী না। এভাবে শুরু করি—

$$-2 = -2$$

এটাকে লেখা যায় : $1 - 3 = 4 - 6$

কিংবা $1^2 - 2 \times 1 \times \frac{3}{2} = 2^2 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2}$

এখন দুই পাশে $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ যোগ করে পাই—

$$1^2 - 2 \times 1 \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

বা, $\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$

দুই পাশে বর্গমূল নিয়ে পাই

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \left(2 - \frac{3}{2}\right)$$

দুই পাশের $-\frac{3}{2}$ সরিয়ে নিলে হয়, $1 = 2$

আমরা জানি 1 সমান 2 নয়, কাজেই আবারও নিশ্চয়ই কিছু একটা বে-আইনী কাজ করা হয়েছে, সেটা কী ? উত্তরটা কী কেউ ভেবে বের করতে পারবে ?

উত্তরটা খুবই সহজ, অনেকেই সেটা খেয়াল করে না। সেটা হচ্ছে $x^2 = y^2$ হওয়ার অর্থ নয় $x = y$ কাজেই $\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$ পর্যন্ত সবকিছু ঠিক ছিল কিন্তু বর্গমূল নেবার পর যখন লেখা হয়েছে $1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$ সেটা হচ্ছে ভুল। $(+2)^2 = (-2)^2$-এর অর্থ নয় $+2 = -2$, মনে রাখতে হবে বর্গমূলের গাণিতিক সংজ্ঞা হচ্ছে এরকম—"একটা অঋণাত্মক সংখ্যা x-এর বর্গমূল $\sqrt{x}$ হচ্ছে সেই অঋণাত্মক

সংখ্যা যেটাকে বর্গ করলে x পাওয়া যায়।" কাজেই মনে রাখতে হবে x-এর মান (পজেটিভ, নেগেটিভ বা শূন্য) যাই হোক না কেন বর্গমূলের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(-2-কে বর্গ করলে পাই 4 কিন্তু 4-কে বর্গমূল করলে আমরা পাই $+2$, এটা মনে রাখতে হবে। এটা হচ্ছে বর্গমূলের সংজ্ঞা।)

3. আরও একবার 1 = 2

দেখাই যাচ্ছে কোনো বেআইনী কাজ না করে 1 = 2 প্রমাণ করা যাচ্ছে না কিন্তু আবার চেষ্টা করে দেখতে ক্ষতি কী ? আমরা কোনো আইন না ভেঙে লিখতে পারি—

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

দুই পাশে বর্গমূল নেয়া হলে—

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$$

এটাকে লেখা যায়—

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

আমরা $\sqrt{1}$ তারপর $\sqrt{-1}$ দিয়ে গুণ করে ভগ্নাংশগুলো দূর করতে পারি—

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1}\sqrt{1}$$

এখন আমরা বর্গমূলের সংজ্ঞা ব্যবহার করতে পারি কোনো সংখ্যার বর্গমূলের বর্গ হচ্ছে সেই সংখ্যা, অর্থাৎ

$$-1 = 1$$

এখন দুই পাশেই 2 দিয়ে ভাগ করে 1·5 যোগ করলে আমরা পাই,

$$1 = 2$$

বোঝাই যাচ্ছে কোথাও নিশ্চয়ই কোনো একটা বেআইনী কাজ করা হয়েছে। কেউ কী বলতে পারবে সেটা কোথায় ? (আমরা বলেছি বর্গমূল নিতে হয় অঋণাত্মক সংখ্যা, এখানে আমরা ঋণাত্মক সংখ্যা বর্গমূল নিয়েছি তবে সেটি ভুল নয়। কারণ ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল নিয়ে গণিতে কমপ্লেক্স সংখ্যার অত্যন্ত চমকপ্রদ গণিত গড়ে তোলা হয়েছে। কাজেই $\sqrt{-1}$ লেখাটি ভুল নয়। ভুলটি অন্য কোথাও! কে বলতে পারবে ?)

আমি জানি একজনের কাছে বিষয়টা প্রায় অবিশ্বাস্য মনে হতে পারে কিন্তু ভুলটা হয়েছে তিন নম্বর ধাপে যখন ব্যবহার করা হয়েছে—

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

বর্গমূলের বেলায় $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ সবসময় সত্যি নয় যখন y পজেটিভ সংখ্যা তখন সেটা সত্যি। এখানে আমাদের লেখা উচিৎ ছিল—

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{-\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

একটা উদাহরণ দিয়ে বিষয়টা দেখানো যাক। ধরা যাক $x = -16$ এবং $y = -25$ এবং আমরা বের করতে চাই—

$$\sqrt{\frac{x}{y}}$$

কাজেই আমরা লিখতে পারি,

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{-16}{-25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

ধরা যাক আমাদেরকে বলা হয়েছে $y = -25$ কিন্তু x সমান কত সেটা এখনো বলা হয় নি। এখন যদি $\sqrt{\frac{x}{y}}$ বের করতে হয় তাহলে কী করব ?

আমরা লিখতে পারি,

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{x}{-25}} = \sqrt{\frac{-x}{25}}$$

যেহেতু ভগ্নাংশের নিচের অংশটা 25 এবং সেটা নেগেটিভ নয় কাজেই এবারে আমরা এটাকে দুটি আলাদা বর্গমূল হিসেবে লিখতে পারি। অর্থাৎ

$$\sqrt{\frac{-x}{25}} = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{-x}}{5}$$

এবারে যদি বলে দেয়া হয় $x = -16$ তাহলে আমরা হিসেবটা শেষ করতে পারি,

$$\frac{\sqrt{-x}}{5} = \frac{\sqrt{-(-16)}}{5} = \frac{\sqrt{16}}{5} = \frac{4}{5}$$

পুরো প্রক্রিয়াটা শুদ্ধ করে করা হয়েছে বলে আমরা সঠিক মান পেয়েছি। কিন্তু যদি আমরা এভাবে না করতাম তাহলে কী হতো ?

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{x}{-25}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-25}}$$

আমরা একটা বেআইনী কাজ করেছি, নিচে নেগেটিভ সংখ্যা হওয়ার পরও আমরা বর্গমূলটিকে দুটি আলাদা বর্গমূল হিসেবে লিখেছি। এবারে দেখা যাক ঝামেলাটা কী হয়!

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-25}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-1 \times 25}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{25}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-1} \times 5}$$

আমরা – 1-কে আলাদা করে এনেছি এবং সেটায় বর্গমূল নিয়েছি। ভয় পাবার কোনো কারণ নেই, গণিত এটাকে স্বীকার করে নিয়েছে! \r(– 1)-এর জন্যে নিচের নিয়মগুলো সত্যি :

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

$$-\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 1$$

আমরা নিচের নিয়মটা ব্যবহার করতে পারি, ওপরে নিচে $-\sqrt{-1}$ দিয়ে গুণ দিতে পারি :

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-1} \times 5} = \frac{-\sqrt{-1} \times \sqrt{x}}{-\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times 5} = \frac{-\sqrt{-1} \times \sqrt{x}}{5}$$

কিন্তু $\sqrt{-1} \times \sqrt{x} = \sqrt{-x}$

কাজেই $\frac{-\sqrt{-1} \times \sqrt{x}}{5} = \frac{-\sqrt{-x}}{5}$

এবারে যদি বলা হয় x = – 16 এবং সেটা ব্যবহার করি তাহলে আমরা পাই,

$$\frac{-\sqrt{-x}}{5} = \frac{-\sqrt{-(-16)}}{5} = \frac{-\sqrt{16}}{5} = \frac{-4}{5}$$

শুদ্ধ উত্তর ছিল $\frac{4}{5}$ আমরা পেয়েছি $-\frac{4}{5}$

4. শেষবার 1 = 2

আমরা পর পর তিনবার 1 = 2 প্রমাণ করার চেষ্টা করেছি কিন্তু প্রত্যেকবারই দেখা গেছে কোনো একটা বেআইনী কাজ করা হয়েছে। এতো সহজে হাল ছেড়ে না দিয়ে শেষবারের মতো চেষ্টা করে দেখা যাক। এবারে চেষ্টা করা হবে কোনো "বেআইনী" কাজ না করার।

আমরা শুরু করব একটা অসীম ধারা নিয়ে। ধারাটি বেশ সহজ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots\ldots$$

ধারাটি অসীম সংখ্যক। আমরা এখন এর সমষ্টি বের করার চেষ্টা করি, একবারে পুরোটা নয় একটু একটু করে। প্রথমে একটি পদ নিই :

$$S_1 = 1$$

এরপর দুটি :

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

তারপর 3টি, 4টি এভাবে প্রথম 10টি পদ পর্যন্ত নিয়ে সমষ্টি বের করা যাক :

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{\cdot}8333\ldots$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0{\cdot}5833\ldots$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0{\cdot}7833\ldots$$

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 0{\cdot}61666\ldots$$

$$S_7 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0{\cdot}759523809\ldots$$

$$S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = 0{\cdot}634523809\ldots$$

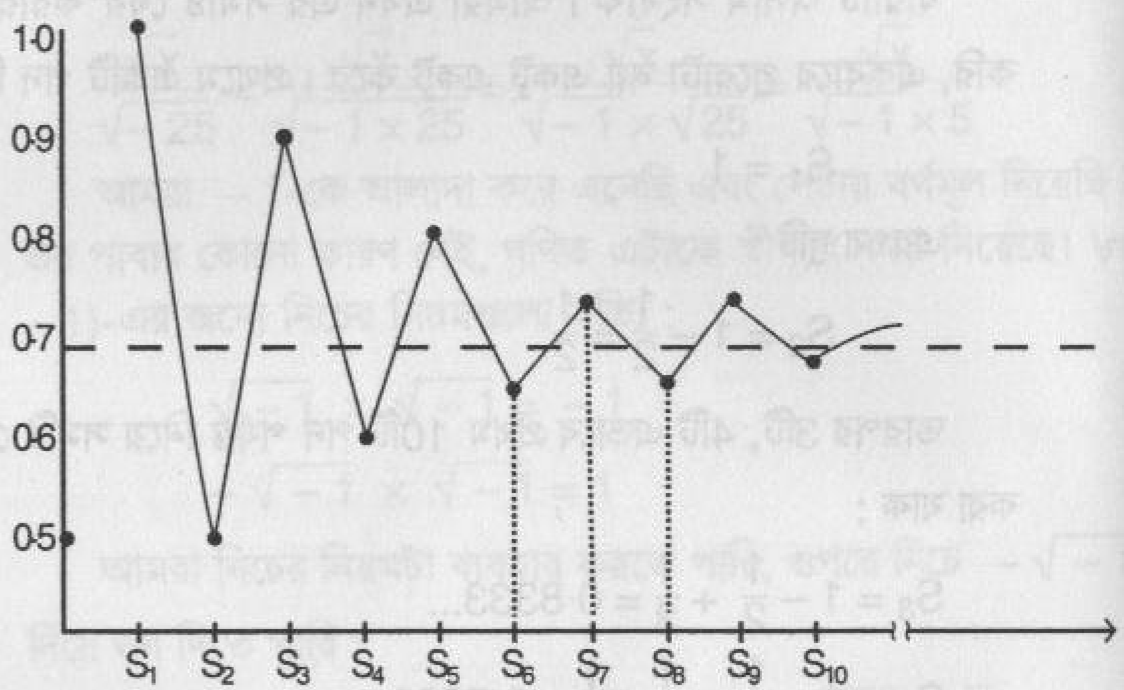
$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} =$$

0·7445492...

$$S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$= 0·64563492...$$

একটা মনোযোগ দিয়ে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে সমষ্টি শুরু হয়েছে 1 থেকে এবং যতই একটি একটি করে পদ যোগ করা হচ্ছে সমষ্টিগুলো কমছে এবং বাড়ছে।



(চিত্র 2 : যত বেশী পদ যোগ করা হচ্ছে সমষ্টি ততই একটা সুনির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে পৌচাচ্ছে)

আমরা বসে বসে অসীম সংখ্যক পদ যোগ করতে পারব না কিন্তু যথেষ্ট সংখ্যক পদ নেয়া হলে দেখব ধারার সমষ্টি ধীরে ধীরে একটা সুনির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে পৌছাচ্ছে। সংখ্যাটি হচ্ছে = ln 2 বা 0·69314718

এটুকু হচ্ছে ভূমিকা, এবারে 1 = 2 প্রমাণ করার কাজে লেগে যেতে পারি। ধরা যাক, এই অসীম ধারার সবকয়টি পদের যোগফল হচ্ছে S অর্থাৎ,

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + ...$$

কাজেই আমরা লিখতে পারি,

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{9} - \frac{2}{10} + ...$$

$$= 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + ...$$

এবারে পদগুলো এভাবে সাজানো যায়—

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - ...$$

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ...$$

ডানদিকে আমাদের আসল ধারাটি চলে এসেছে।

কাজেই 2S = S

আমরা জানি S = 0 নয়, S-এর মান 0·69314718-এর কাছাকাছি, কাজেই দুই পাশে S দিয়ে ভাগ করে পাই,

2 = 1

এবারে আমরা চেষ্টা করেছি কোনো বেআইনী কাজ না করতে—কোথাও শূন্য দিয়ে ভাগ দেয়া হয় নি, বর্গমূল নিতে গিয়ে নিয়ম ভঙ্গ করা হয় নি, তাহলে 2 = 1 হলো কীভাবে?

এই বিপত্তি থেকে উদ্ধার পাবার সহজ কোনো উপায় নেই! যে সকল অসীম ধারার পদগুলো পজেটিভ এবং নেগেটিভ হিসেবে আসে সেখানে এ ধরনের ব্যাপার ঘটতে পারে। যেমন- নিচের ধারাটি দেখা যাক,

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - .....$$

আমরা লিখতে পারি—

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0...$$

$$= 0$$

অর্থাৎ এই অসীম ধারাটির সমষ্টি হচ্ছে শূন্য। আবার আমরা ইচ্ছে করলে পদগুলো অন্যভাবে সাজাতে পারতাম,

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$
$$= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$
$$= 1 - 0 - 0 - 0 - 0$$
$$= 1$$

অর্থাৎ পদগুলোর সমষ্টি হচ্ছে 1! এবারে আরও একটু ভিন্নভাবে লিখি—

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$
$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)$$
$$S = 1 - S$$
$$2S = 1$$

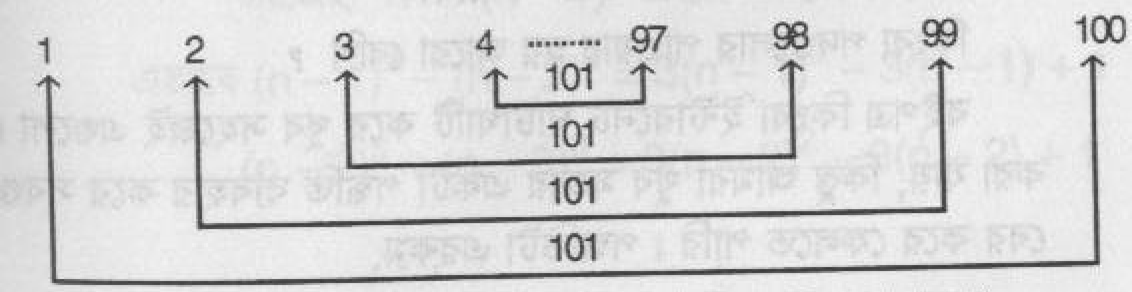
$\therefore S = \frac{1}{2}$ অর্থাৎ পদগুলোর সমষ্টি হচ্ছে $\frac{1}{2}$!

কাজেই দেখা যাচ্ছে, একই ধারার সমষ্টি আমরা ইচ্ছে করলে 1, 0 কিংবা $\frac{1}{2}$ বের করে আনতে পারি!

এ ধরনের বিপদ থেকে উদ্ধার পাবার জন্যে একটি থিওরেম রয়েছে, থিওরেমটির নাম রিমান সিরিজ থিওরেম (Rieman Series Theorem)। থিওরেমটি এই বিষয়টি নিয়ে সতর্ক করে দেয়, থিওরিমটি আমাদেরকে বলে যে-কোনো ধারার পদগুলো যদি পজেটিভ এবং নেগেটিভ হিসেবে আসে এবং সেটা যদি absolutely converge না করে; তাহলে তার পদগুলো আমাদের ইচ্ছে মতন সাজিয়ে আমরা তার সমষ্টির জন্যে যে-কোনো মান পেতে পারি! কাজেই আমরা যে একবার S পেয়েছি আরেকবার 2S পেয়েছি সেটা বিচিত্র কিছু নয় সেটাই নিয়ম! ইচ্ছে করলে আমরা অন্য কিছুও পেতে পারি। সবগুলো এক ধারা থেকে এসেছে কাজেই সবগুলোর মান সমান সেটা সত্যি নয়— শুধু সেটাই মনে রাখতে হবে।

5. গাউস দিয়ে শুরু

কার্ল ফ্রেডারিক গাউস পৃথিবীর একজন সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতবিদ, বলা হয় গাউস নাকী কথা বলা শুরু করার আগে গণিত করতে শুরু করেছিলেন! তিনি যখন খুব ছোট, মাত্র স্কুলে যেতে শুরু করেছেন তখনই তার শিক্ষক তাকে নিয়ে খুব ঝামেলায় পড়ে গিয়েছিলেন। তাকে যে অঙ্কই দেয়া হয় সেটা সাথে সাথে করে বসে থাকেন— গাউসকে ব্যস্ত রাখতেই শিক্ষকের নাভিশ্বাস উঠে যাবার অবস্থা! উপায় না দেখে বেচারা শিক্ষক গাউসকে ব্যস্ত রাখার জন্যে একদিন তাকে বললেন, 1 থেকে 100 পর্যন্ত লিখে সেটা যোগ করতে! ভাবলেন আর কিছু না হোক এতগুলো সংখ্যা লিখতেও তো তার খানিকটা সময় লাগবে! শিক্ষক তার কথা শেষ করার আগেই গাউস 1 থেকে 100 পর্যন্ত যোগ করে উত্তরটা বলে দিলেন, 5050! শিক্ষক বেচারার চোয়াল ঝুলে পড়ল, চোখ কপালে তুলে বললেন, তুমি কীভাবে করলে? গাউস বললেন, খুব সোজা, প্রথম সংখ্যাটা 1 শেষ সংখ্যা 100, দুটি মিলে হয় 101, ঠিক সেরকম দ্বিতীয় সংখ্যাটা 2, শেষের আগেরটি 99 আবার দুটি মিলে হয় 101, (3 নং ছবি) এভাবে সব মিলিয়ে 50টি 101 রয়েছে, কাজেই 1 থেকে 100 পর্যন্ত যোগ করা হলে তার উত্তর হচ্ছে $50 \times 101 = 5050$ গাউসের উত্তর শুনে বেচারা শিক্ষক একেবারে হতবাক হয়ে গেলেন!



(চিত্র 3 : প্রথম ও শেষ সংখ্যার যোগফল সবসময় 101)

গাউস সেই শৈশবে যেটা মাথার মাঝে করে ফেলেছিলেন আমরা কাগজ কলমে সেটা করতে পারি। আমরা একটু চেষ্টা করলেই দেখাতে পারি,

$$1 + 2 + 3 + \dots (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

n যদি জোড় হয় তাহলে গাউসের পদ্ধতিটাই ব্যবহার করে বলতে পারি এখানে $\frac{n}{2}$ সংখ্যক (n + 1) আছে কাজেই সমষ্টি হচ্ছে $\frac{n}{2}$ (n + 1)। যদি n বেজোড় হয় তাহলে ধারাটির সামনে একটা শূন্য বসিয়ে জোড় সংখ্যক (n + 1) পদ তৈরি করতে পারি।

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots (n - 1) + n$$

তাহলে বলতে পারি এখানে রয়েছে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ সংখ্যক n অর্থাৎ সমষ্টি হচ্ছে

$n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ অর্থাৎ n জোড় হোক আর বেজোড় হোক তার সমষ্টি হচ্ছে $\frac{n(n+1)}{2}$ অথবা $\frac{1}{2}(n^2 + n)$

যারা গণিত নিয়ে একটু নাড়াচাড়া করেছে তারা সবাই মোটামুটিভাবে এটা জানে। কিন্তু যদি ধারাটি এরকম হয় তাহলে কী কেউ তার সমষ্টি কত বলতে পারবে?

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots n^2$$

কিংবা যদি এরকম হয়—

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots n^3$$

কিংবা এরকম হয়—

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots n^4$$

কিংবা পদগুলোর পাওয়ার হয় আরো বেশি?

বইপত্র কিংবা ইন্টারনেট ঘাটাঘাটি করে খুব সহজেই এগুলো বের করা যায়, কিন্তু আমরা খুব মজার একটা পদ্ধতি ব্যবহার করে সবগুলো বের করে ফেলতে পারি। পদ্ধতিটা এরকম,

আমরা জানি $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

কিংবা $(n-1)^2 - (n-2)^2 = 2(n-1) - 1$

কিংবা $(n-2)^2 - (n-3)^2 = 2(n-2) - 1$

কমতে কমতে হবে $3^2 - 2^2 = 2\cdot3 - 1$

$$2^2 - 1^2 = 2\cdot2 - 1$$

$$1^2 - 0^2 = 2\cdot1 - 1$$

আমরা যদি বামপাশের সবগুলো এবং ডানপাশের সবগুলো যোগ করি তাহলে পাব,

$n^2 - (n-1)^2 + (n-1)^2 - (n-2)^2 + (n-2)^2 - (n-3)^2 + (n-3)^2 + \ldots\ldots + 3^2 - 2^2 + 2^2 - 1^2 + 1^2$

$= 2\{n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots 3 + 2 + 1\} - (1 + 1 + 1 + 1 + 1\ldots\ldots 1 + 1)$

বাম পাশে ছাড়া আর সবগুলো পদ একটার সাথে আরেকটা কাটাকাটি হয়ে যায়। ডান পাশে ব্যবহার করতে পারি

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots (n-1) + n$$

তাহলে আমরা পাই $n^2 = 2S_n - n$

কাজেই $S_n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ আমরা যেটা আগেই দেখেছি!

$n^2 - (n-1)^2$ দিয়ে শুরু করে আমরা S_n পেয়েছি। $n^3 - (n-1)^3$ দিয়ে শুরু করে কী পাওয়া যায় দেখা যাক!

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$$

কাজেই $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

এভাবে $(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$

$$(n-2)^3 - (n-3)^3 = 3(n-2)^2 - 3(n-2) + 1$$

$$\vdots$$

$$3^3 - 2^3 = 3\cdot3^2 - 3\cdot3 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot2^2 - 3.2 + 1$$

$$1^3 - 0 = 3\cdot1^2 - 3\cdot1 + 1$$

দুই পাশে যোগ করে পাই—

$n^3 = 3\{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + ...3^2 + 2^2 + 1\} - 3\{n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1) + (1 + 1 + 1 + ...1)\}$

কিংবা $n^3 = 3S_{n^2} - 3S_n + n$

যেখানে $S_{n^2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ...n^2$

কাজেই $S_{n^2} = \frac{1}{3}[n^3 + 3S_n - n]$

S_n-এর মান বসালে আমরা পাই—

$$S_{n^2} = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right]$$

এটাকে গুছিয়ে আমরা লিখতে পারি—

$$S_{n^2} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

ঠিক একইভাবে আমরা $n^4 - (n-1)^4$ ব্যবহার করে $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...n^3 = S_{n^3}$ বের করে ফেলতে পারি।

$$(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$$

কাজেই $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

যেহেতু আমরা এর আগে দুইবার এটা করে ফেলেছি আমরা সরাসরি লিখে ফেলতে পারি—

$$n^4 = 4S_{n^3} - 6S_{n^2} + 4S_n - n$$

$$4S_{n^2} = n^4 + 6S_{n^2} - 4S_n + n$$

$$= n^4 + \frac{6}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$\therefore\ S_{n^3} = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$$

ঠিক একইভাবে $n^5 - (n-1)^5$ ব্যবহার করে আমরা

$S_{n^4} = 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + ...\ n^4$ বের করতে পারি।

$$(n-1)^5 = n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 1$$

$$n^5 - (n-1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$$

এখান থেকে আমরা সরাসরি লিখে ফেলতে পারি—

$$n^5 = 5S_{n^4} - 10S_{n^3} + 10S_{n^2} - 5S_n + n)$$

$$S_{n^4} = \frac{1}{5}(n^5 + 10S_{n^3} - 10S_{n^2} + 5S_n - n)$$

আমরা এর মাঝে S_{n^3}, S_{n^2} আর S_n বের করে ফেলেছি। এগুলো ব্যবহার করে খুব সহজেই দেখাতে পারি—

$$S_{n^4} = \frac{1}{3}(6n^5 + 15n^4 - 10n^3 - n)$$

কেউ কী বলতে পারবে

$S_{n^5} = 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + ...\ n^5$ কত?

কিংবা $S_{n^6} = 1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + ...\ n^6$ কত?

কিংবা এর পরের ধারা? পরের ধারা?

6. ফিবোনাচি ধারা

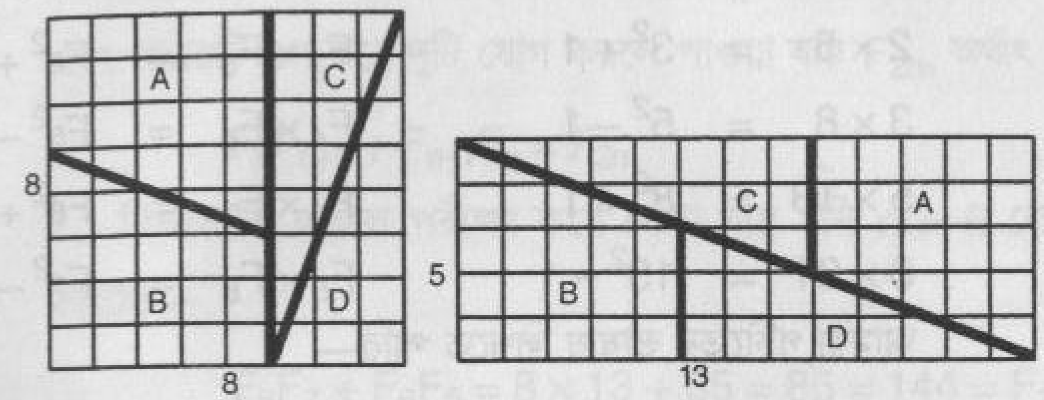
ফিবোনাচি ধারার মতো মজার ধারা আমার মনে হয় আর একটিও নেই। ধারাটি খুব সহজ, আগের দুটো পদ যোগ করে পরেরটা তৈরি করতে হবে— অর্থাৎ শুধু প্রথম পদ দুটো বলে দিলেই পরের সবগুলো বের করে ফেলা যাবে। প্রথম দুটো পদ কী হতে পারে? অবশ্যই 0 এবং 1! কাজেই ফিবোনাচি পদগুলোকে F_n হিসেবে দেখিয়ে আমরা লিখতে পারি—

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = F_1 + F_0 = 1+0 = 1$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2+1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3+2 = 5$$
$$F_6 = F_5 + F_4 = 5+3 = 8$$

এভাবে আমরা অনন্তকাল পর্যন্ত যেতে পারি! আপাতত প্রথম পনেরোটা পদ লিখেই শুরু করা যাক—

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

আমরা দাবি করেছি ফিবোনাচি ধারা খুব মজার একটা ধারা, কাজেই দুই একটা মজার উদাহরণ এখনই দেয়া উচিৎ। উপরে যে ধারা নেয়া হয়েছে তার যে-কোনো একটা নেয়া যাক। ধরা যাক সেটা $F_6 = 8$ এবারে আমরা 8×8 একটা বর্গক্ষেত্র আঁকি। (4নং ছবি) এখন আমরা এই বর্গক্ষেত্রটা A, B, C এবং D এই চারটা ভাগে ভাগ করি। এখন এই চারটুকরাকে এমনভাবে বসাই যেন পাশের আয়াতক্ষেত্রটি তৈরি হয়। বর্গক্ষেত্রটি তৈরি হয়েছে F_6 দিয়ে, আয়াতক্ষেত্রের দুই বাহু হচ্ছে $F_5 = 5$ এবং $F_7 = 13$ দিয়ে। সবকিছুই ঠিক আছে, কিন্তু একটা সমস্যা। বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $8 \times 8 = 64$, এই বর্গক্ষেত্রের চার টুকরা A, B, C এবং D দিয়ে আয়াতক্ষেত্রটি তৈরি হয়েছে,



(চিত্র 4 : বাম পাশের বর্গক্ষেত্রটি চার টুকরো করে ডানদিকের আয়তক্ষেত্রে জুড়ে দেয়া হয়েছে।)

আয়াতক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হচ্ছে $5 \times 13 = 65$ বর্গক্ষেত্র থেকে এক বেশি! এটি কেমন করে হতে পারে? এটি হতে পারে না— কোথাও না কোথাও ভুল আছে! খুব নিখুঁতভাবে ছবিটি আঁকা হলে ভুলটা বের করা সম্ভব। আয়াতক্ষেত্রের যে কর্ণটি আছে সেটা একটা সরল রেখা দিয়ে দেখানো হয়েছে, বর্গক্ষেত্রের চার টুকরো A, B, C এবং D দিয়ে আয়াতক্ষেত্রটি তৈরি করার চেষ্টা করা হলে দেখা যাবে আয়াতক্ষেত্রের কর্ণটি সরলরেখা নয়— আয়াতক্ষেত্রের 65টি এককের একটির সমান অংশ সেখানে ফাঁকা রয়ে গেছে!

মজার ব্যাপার হচ্ছে $n = 3$ থেকে শুরু করে ফিবোনাচি ক্রমের যে-কোনো পদ দিয়ে এটা দেখানো সম্ভব। আমরা যদি F_6 না নিয়ে $F_7 = 13$ নিতাম তাহলে 13×13 বর্গক্ষেত্রটি একইভাবে চার ভাগে ভাগ করে সেটা দিয়ে একটা আয়াতক্ষেত্র তৈরি করা যেত যার একবাহু হতো $F_6 = 8$ অন্যবাহু হতো $F_8 = 21$, এইক্ষেত্রে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $13 \times 13 = 169$ আর আয়াতক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $8 \times 21 = 168$; আবার এক এককের হিসেব মিলছে না। আগের বার ছিল 1 বেশি এবারে 1 কম!

আমরা সব সময়েই দেখাতে পারি একটি ফিবোনাচি পদের বর্গ তার আগের এবং পরের পদের গুণফল থেকে 1 বেশি বা কম।

$1 \times 3 = 2^2 - 1$	অর্থাৎ	$F_1 \times F_4 = F_3^2 - 1$
$2 \times 5 = 3^2 + 1$		$F_3 \times F_5 = F_4^2 + 1$
$3 \times 8 = 5^2 - 1$		$F_4 \times F_6 = F_5^2 - 1$
$5 \times 13 = 8^2 + 1$		$F_5 \times F_7 = F_6^2 + 1$
$8 \times 21 = 13^2 - 1$		$F_6 \times F_8 = F_7^2 - 1$

আমরা গণিতের ভাষায় লিখতে পারি—

n>1-এর জন্যে $F_{n+1} \times F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$

ফিবোনাচি ধারার পদগুলো নিয়ে মজার ব্যাপারের কোনো শেষ নেই। দুই একটি এখানে দেখানো যেতে পারে।

যে-কোনো দশটি পরপর ফিবোনাচি পদ যোগ করলে সেটা 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়। যেমন- প্রথম দশটি পদ হচ্ছে $0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 9 + 8 + 13 + 21 + 34 = 88$ এটি 11 দিয়ে ভাগ করা যায়! ভাগফল 8, অর্থাৎ ধারার 7নং পদ। এটি সবসময়ে সত্যি— পরপর যে-কোনো দশটি পদের সমষ্টি শুরু থেকে সাত নম্বর পদের 11 গুণ। যেমন আমরা যদি F_{10} থেকে শুরু করি তাহলে পাই—

$$55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + 4181 = 10{,}857$$

এবং এটাকে 11 দিয়ে ভাগ করলে পাই সাত নম্বর পদ 987!

আসলে এটি কোনো ম্যাজিক নয় $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ এই সূত্রটি ব্যবহার করে খুব সহজেই দেখানো যায়—

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \ldots\ldots F_{n+8} + F_{n+9} = 11F_{n+6}$$

ফিবোনাচি ধারার আরো একটি মজার নিয়ম আছে শুরু থেকে যে-কোনো পদ পর্যন্ত চোখের পলকে যোগ করে ফেলা যায়! তার কারণ শুরু থেকে F_n পর্যন্ত যোগ করলে পাওয়া যায় $F_{n+2} - 1$ অর্থাৎ F_{12}

পর্যন্ত পদের যোগফল $F_{14} - 1 = 377 - 1 = 376$ কেউ বিশ্বাস না করলে পরীক্ষা করে দেখতে পারে।

ফিবোনাচি ধারার কোনো একটি পদ F_n-এর সঙ্গে তার আগেরটি এবং পরেরটি গুণ করে দুটি যোগ করলে পাওয়া যায় F_{2n}, অর্থাৎ

$$F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n = F_{2n}$$

বিশ্বাস না করলে পরীক্ষা করে দেখা যায় যদি n = 6 নেয় হয় তাহলে—

$$F_6F_7 + F_6F_5 = 8 \times 13 + 85 = 85 = 144 = F_{12}$$

সত্যি কথা বলতে কী ওপরের সূত্রটি আরও ব্যাপক—

$$F_{2n} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n$$

সেরকম $F_{3n} = F_{2n}F_{n+1} + F_{2n-1}F_n$

$$F_{4n} = F_{3n}F_{n+1} + F_{3n-1}F_n$$

$$F_{5n} = F_{3n}F_{n+1} + F_{4n-1}F_n$$

$$\vdots$$

ইত্যাদি ইত্যাদি

উপরের সূত্রগুলো একটু মনোযোগ দিয়ে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে এর সবগুলো $F_{2n}, F_{3n}, F_{4n}, F_{5n}\ldots$ এর সবগুলো F_n দিয়ে বিভাজ্য! সত্যি কথা বলতে কী $F_{(k \times n)}$ সবসময়েই F_n দিয়ে বিভাজ্য। এখানে k আর n-এর মাঝে তো কোনো গুণগত পার্থক্য নেই— যার অর্থ F_{kn} আসলেও F_k দিয়েও বিভাজ্য। কেউ বিশ্বাস না করলে পরীক্ষা করে দেখতে পারে!

7. ফিবোনাচি পদ

বেশ কয়েকবার বলে দেয়া হয়েছে— "বিশ্বাস না করলে পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে।" কিন্তু পরীক্ষা করার জন্যে তো ফিবোনাচি পদগুলো দরকার। দেয়া হয়েছে মাত্র পনেরোটা, পরীক্ষা করলে তো ঘুরেফিরে এই পনেরোটা দিয়েই পরীক্ষা করতে হবে— সেটা আর এমন কী মজা ? যদি আরও বড় বড় পদ দিয়ে পরীক্ষা করে দেখা যেত তাহলে না মজা হতো। সেগুলো বের করা খুব কঠিন নয় কিন্তু বসে বসে যোগ তো করতে হবে, যোগের মাঝে কোথাও একটা ভুল হয়ে গেলে এর পরের সবগুলো ভুল হয়ে যাবে! যোগ না করে চট করে কী বের করা যায় ? আসলে একটা সহজ পদ্ধতি আছে, পদ্ধতিটা হচ্ছে—

$$F_n \simeq \frac{(1{\cdot}618033989)^n}{\sqrt{5}}$$

অর্থাৎ ডানপাশে যেটা পাওয়া যাবে তার কাছাকাছি পূর্ণ সংখ্যাটা হচ্ছে ফিবোনাচি পদ। ব্যাপারটা পরীক্ষা করে দেখা যাক—

$$n = 10 \text{ হলে } \frac{(1{\cdot}618033989)^{10}}{\sqrt{5}} = 55{\cdot}00363621$$

দেখাই যাচ্ছে এটার কাছাকাছি সংখ্যা হচ্ছে 55, কাজেই

$F_{10} = 55$, এটা আমরা আগেই দেখেছি! সেরকম—

$$n = 11 \text{ হলে } \frac{(1{\cdot}618033989)^{11}}{\sqrt{5}} = 88{\cdot}9977529$$

এটা কাছাকাছি পূর্ণ সংখ্যা 89 থেকে একটুখানি কম কাজেই

$F_{11} = 89$

আমরা কয়েকটা বড় ফিবোনাচি পদ বের করার চেষ্টা করি—

$$\frac{(1{\cdot}618033989)^{30}}{\sqrt{5}} = 832040{\cdot}0038$$

$\therefore F_{30} = 832040$

$$\frac{(1{\cdot}618033989)^{26}}{\sqrt{5}} = 832040{\cdot}0005$$

$\therefore F_{26} = 121393$

সবাই নিশ্চয়ই ভুরু কুঁচকে 1·618033989 সংখ্যাটির দিকে তাকিয়ে ভাবছে এই বিদঘুটে সংখ্যাটা কোথা থেকে এলো! আসলে এটা মোটেও বিদঘুটে সংখ্যা নয় এবং এই সংখ্যাটার ওপর অনেক মোটা মোটা বই লেখা হয়েছে— শুধু গণিতে নয় শিল্পকলাতে এমন কী জীববিজ্ঞান বা উদ্ভিদবিজ্ঞানেও এই সংখ্যাটি ঘুরেফিরে চলে এসেছে! সংখ্যাটিকে বলে ϕ (ফাই) এবং এটি হচ্ছে $x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান! অর্থাৎ

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{\cdot}618033989...$$

এটি একটি অমূলদ (irrational) সংখ্যা অর্থাৎ এটি অনন্তকাল লিখলেও শেষ হবে না, তবে আমাদের কাজ চালানোর জন্যে দশমিকের পর পাঁচ ছয় ঘরই যথেষ্ট। আমরা ফিবোনাচি পদের জন্যে যেটা লিখেছি সেটা সঠিক সংখ্যাটির কাছাকাছি কিন্তু সঠিক সংখ্যাটি নয়। তার কারণ আমরা সূত্রটিকে সহজ করে লেখার জন্যে একটু কাটছাট করেছি! আসল সূত্রটি ছিল এরকম—

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n + (1 - \phi)^n]$$

এটা ব্যবহার করলে আমরা হুবহু সংখ্যাটা পেয়ে যেতাম। কিন্তু সহজ করার জন্যে আমরা $(1 - \phi)^n$ টুকু বাদ দিয়েছি। খুব বড় অপরাধ হয় নি। কারণ $1 - \phi = -0{\cdot}618033989$ এবং n যদি একটু বড় হয় তাহলে $(1 - \phi)^n$ ধর্তব্যের মাঝে নয়! সেটা আমরা আগেই দেখেছি।

কাজেই আমরা এখন যে-কোনো ফিবোনাচি পদ বের করতে পারব!

৪. মৌমাছির বাচ্চা

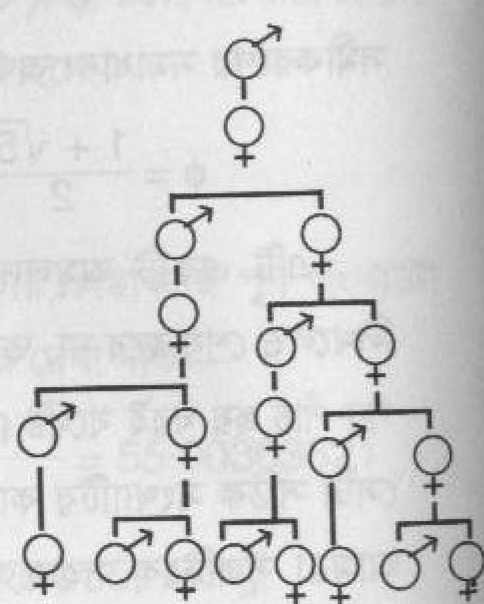
মৌমাছিদের বাচ্চা-কাচ্চার ব্যাপারটা খুব অদ্ভুত। পুরুষ মৌমাছির জন্ম দেয় মা (কিংবা মহিলা মৌমাছি) তার জন্যে বাবা মৌমাছির প্রয়োজন নেই। কিন্তু মহিলা মৌমাছি জন্মানোর জন্যে বাবা এবং মা দুজনেরই দরকার হয়। এখন আমরা যদি একটা পুরুষ মৌমাছির বংশ তালিজা তৈরি করি তাহলে কী পাব ? এটা দেখানোর জন্যে আমরা পুরুষ ♂ এবং মহিলা ♀ চিহ্ন দুটি ব্যবহার করি।

পুরুষ মৌমাছি :

জন্মের জন্যে শুধু মা'ই যথেষ্ট :

জন্মের জন্যে বাবা এবং মা দুই'ই দরকার :

ইত্যাদি



(চিত্র 5 : মৌমাছির বংশ তালিকা)

আমরা যদি বংশ তালিকাটিতে প্রতি প্রজন্মে মৌমাছির বাবা-মা, দাদা-দাদি, নানা-নানির সংখ্যা দেখি তাহলে দেখব সংখ্যাটি হচ্ছে—

1, 1, 2, 3, 5, 8

এটি একটি ধারা এবং ধারাটি ফিবোনাচি ধারা ছাড়া আর কিছু নয়!

মৌমাছির কথা না বলে আমরা যদি খরগোসের কথা বলতাম— এক জোড়া খরগোসের বড় হতে এক মাস সময় নেয় এবং দ্বিতীয় মাসে তারা এক জোড়া বাচ্চার জন্ম দেয়, সেই বাচ্চাগুলো আবার বড় হতে

এক মাস সময় নেয় এবং তারাও আবার বাচ্চাদিতে শুরু করে! এভাবে কয়েক মাস পরে কত খরগোসের বাচ্চা হবে হিসেব করে বের করতে পারি!

১ম মাসে ছোট খরগোস 1 জোড়া

২য় মাসে বড় খরগোস 1 জোড়া

৩য় মাসে বাচ্চা দেবার কারণে বড় এবং ছোট মিলিয়ে 2 জোড়া

৪র্থ মাসে বড় জোড়া বাচ্চা দিল ছোটগুলো বড় হলো সব মিলিয়ে 3 জোড়া

৫ম মাসে ছোটগুলো বড় হলো বড়গুলো বাচ্চা দিল সব মিলিয়ে 5 জোড়া

:

:

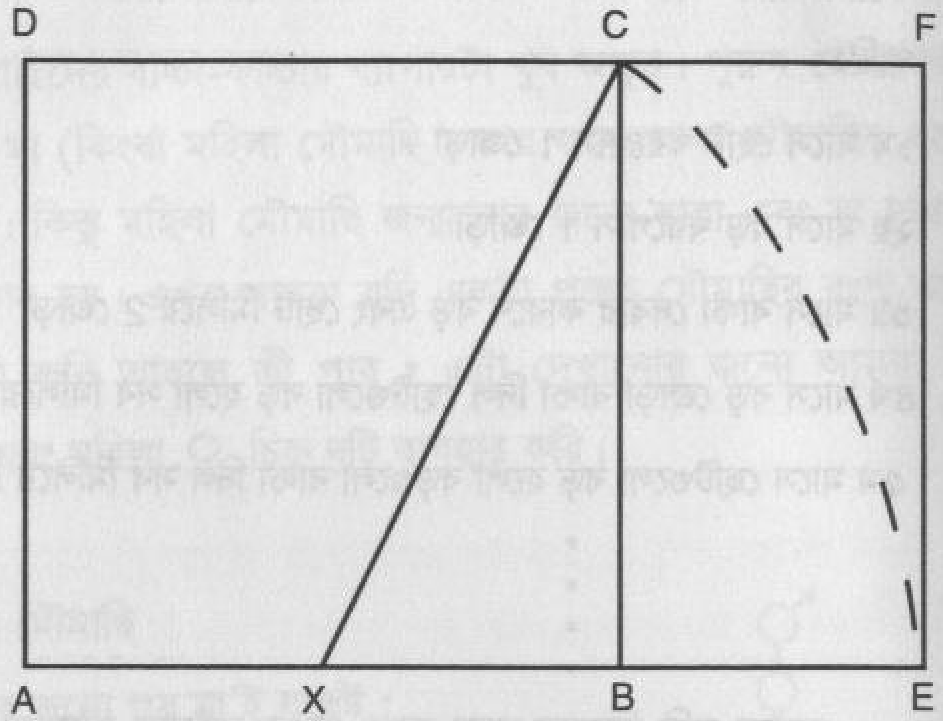
এভাবে যদি হিসেব করা হতে থাকে তাহলে আমরা দেখব প্রতি মাসে খরগোসের জোড়া সংখ্যা হবে—

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

অর্থাৎ আবার ফিবোনাচি ধারা

গাছের পাতায়, আনারসের ফুলে, অসংখ্য জায়গায় আসলে এই ফিবোনাচি ধারা খুঁজে পাওয়া গেছে!

9. সোনালি অনুপাত



(চিত্র 6 : AEFD একটি অসাধারণ আয়াতক্ষেত্র)

ABCD একটা বর্গক্ষেত্র, AB বাহুর মধ্যবিন্দু হচ্ছে X. X-কে কেন্দ্র করে XC-কে ব্যসার্ধ নিয়ে একটা বৃত্তচাপ আঁকা হলো যেটা AB রেখার বাড়তি অংশে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। AE-কে একবাহু হিসেবে ধরে AEFD আয়াতক্ষেত্রটি আঁকা হয়েছে। এই আয়াতক্ষেত্রটা দেখে অন্য দশটা আয়াতক্ষেত্র থেকে ভিন্ন কিছু মনে হবার কথা নয়— কিন্তু এটা একটা অসাধারণ আয়াতক্ষেত্র!

প্রথমে দেখা যাক এর দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত—

অর্থাৎ $\frac{AE}{AD}$ সমান কত?

কিংবা $AE = AX + XE = \frac{1}{2}AB + XC$

$$AE = \frac{1}{2}AD + \sqrt{XB^2 + BC^2}$$

আবার $XB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AD$

এবং $BC = AD$

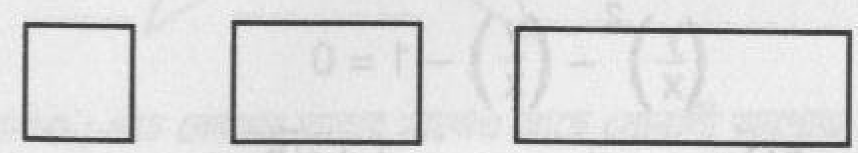
$$\therefore\ AE = \frac{1}{2}AD + \sqrt{\left(\frac{1}{2}AD\right)^2 + AD^2}$$

$$AE = \frac{1}{2}(AD + \sqrt{5}AD)$$

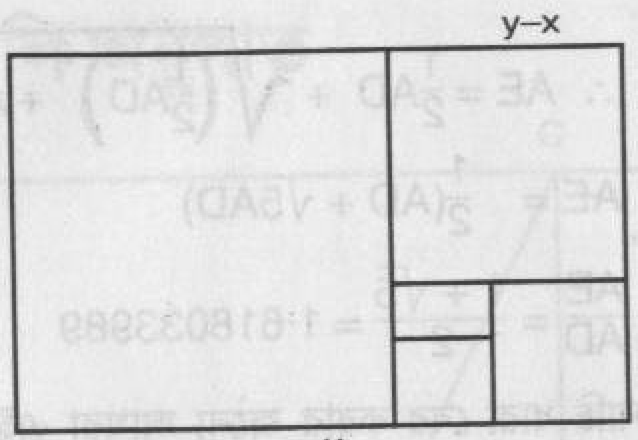
$$\frac{AE}{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{\cdot}618033989$$

ফিবোনাচি ধারা বের করার জন্যে আমরা এই সংখ্যাটি ব্যবহার করেছিলাম। ঘুরেফিরে অনেক জায়গায় এই সংখ্যাটি পাওয়া যায়। এই সংখ্যাটির আরেকটা নাম হচ্ছে গোল্ডেন রেশিও (Golden Ratio) বা সোনালী অনুপাত। একটা সময় ছিল যখন গণিত এবং আধ্যাত্মিকতা এক সাথে মিলিয়ে ফেলা হতো। মনে করা হতো প্রত্যেকটি সংখ্যার একটা দৈব শক্তি আছে! সেই হিসেবে এই সংখ্যাটাকেও একটা দৈব সংখ্যা বা ঐশ্বরিক সংখ্যা হিসেবে মনে করা হতো!

তবে আয়াতক্ষেত্রটির দিকে তাকালে একটা ব্যাপার বোঝা যায় এটা একটা সুষম আয়াতক্ষেত্র। একটা আয়াতক্ষেত্র যদি এই আকারের হয় তাহলে দেখতে ভালো লাগে। 7নং ছবিতে বেশ কয়েকটা আয়াতক্ষেত্র দেয়া হয়েছে— এটা অস্বীকার করার উপায় নেই যে এই বিশেষ আয়াতক্ষেত্রটি দৃষ্টিনন্দন। পৃথিবীর অনেক বড় বড় ভবন, অনেক ছবি শিল্পকলার আকার এই গোল্ডেন রেশিওর সাথে মিলে যায়।



চিত্র-07 : অস্বীকার করার উপায় নেই, মাঝের আয়াতক্ষেত্রটি দেখতে ভালো!



চিত্র-08 : এই আয়তক্ষেত্রটি সোনালী অনুপাতে আঁকা

আমরা ঐশ্বরিক বা দৈব কোনো ব্যাপারে না গিয়ে সরাসরি গাণিতিক ব্যাপারে যাই। প্রথমে একটা "সোনালী অনুপাত" দিয়ে একটা আয়াতক্ষেত্র আঁকি। (8নং ছবি)। তার ভেতর থেকে বর্গক্ষেত্রটা আলাদা করে নিলে যে আয়াতক্ষেত্রটা বাকি থাকে সেটাও সোনালী অনুপাতের। এর ভেতর একটা বর্গক্ষেত্র আলাদা করে নিলে যে আয়াতক্ষেত্রটা বাকি থাকে সেটাও সোনালী অনুপাতের এবং এভাবে অনন্তকাল যাওয়া যাবে! আয়াতক্ষেত্রটার দিকে তাকালেই আমরা বুঝতে পারি এখানে—

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y - x}$$

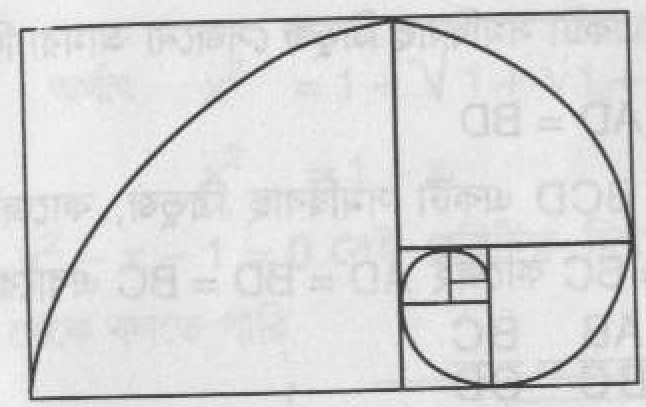
$$y^2 - yx = x^2$$

দুই পাশে x^2 দিয়ে ভাগ দিলে—

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$$

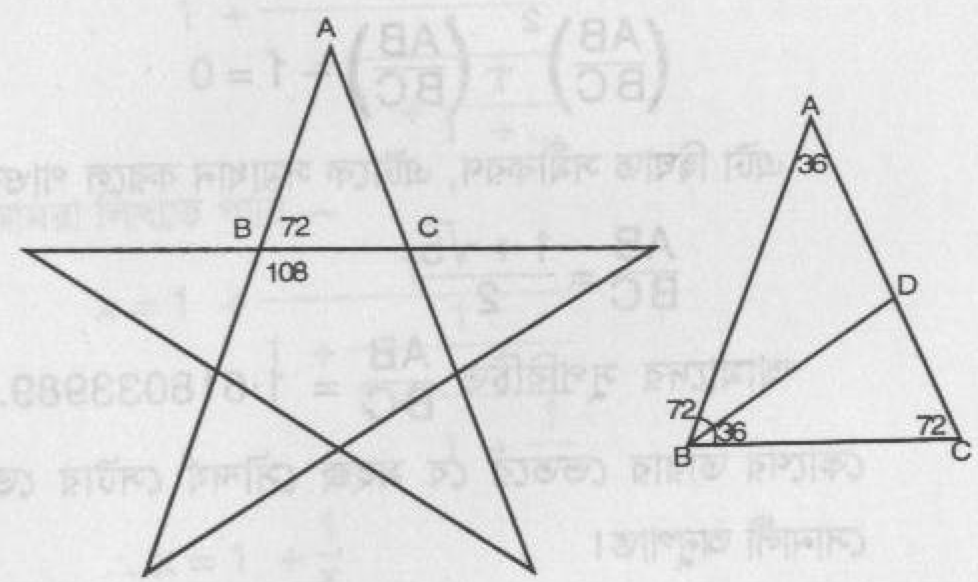
$\left(\frac{y}{x}\right)$-এর সমাধান হচ্ছে : $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{\cdot}6183033...$

এবারে আমরা এই আয়াতক্ষেত্রের প্রত্যেকটা বর্গক্ষেত্রের ভেতরে যদি একটা বৃত্তচাপ আঁকি তাহলে যে নক্সাটি পাই সেটা হচ্ছে শামুকের নক্সা! (9নং ছবি)



চিত্র-09 : শামুকের খোলস কেমন করে তৈরি হয় ?

আমরা দেখতে পাচ্ছি একটা সুষম আয়াতক্ষেত্রের দুই বাহুর অনুপাত থেকে 1·618033989..... সংখ্যাটি চলে আসে। এটি কী আরো কোথাও পাওয়া যায় ? পাঁচ কোণের তারা (10নং ছবি) কে না একেছে! এর ত্রিভুজটা নিয়ে শুরু করি।



চিত্র-10 : পাঁচ কোণের তারার মাঝেও আছে সোনালী অনুপাত।

সম পঞ্চভুজের প্রতিটি কোণ 108° কাজেই ABC ত্রিভুজের কোণগুলো আমরা পেয়ে গেছি, যেটা পাশের ছবিতে দেখানো হয়েছে। B কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত করে রেখাটি AC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন BCD ত্রিভুজটির তিন কোণ ABC বাহুর তিন কোণের সমান। ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

ABD একটা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সেজন্যে আমরা লিখতে পারি—

$$AD = BD$$

আবার BCD একটা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, কাজেই আমরা লিখতে পারি BD = BC কাজেই AD = BD = BC এবারে দেখা যাক—

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC - AD}$

যেহেতু AC = AB এবং AD = BC তাই লেখা যায়—

$$(AB)(AB - BC) = BC^2$$

$$(AB)^2 - (AB)(BC) = BC^2$$

দুই পাশে BC^2 দিয়ে ভাগ দিলে পাই,

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - \left(\frac{AB}{BC}\right) - 1 = 0$$

এটা দ্বিঘাত সমীকরণ, এটাকে সমাধান করলে পাওয়া যাবে,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

আমাদের সুপরিচিত $\frac{AB}{BC} = 1{\cdot}618033989\ldots$ অর্থাৎ পাঁচ কোণের তারার ভেতরে যে সহজ সৌন্দর্য সেটার ভেতরেও রয়েছে সোনালী অনুপাত!

আরও উদাহরণ দরকার? বর্গের ভেতর বর্গ ঢুকিয়ে একটা কঠিন কিছু লেখা যাক,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

ধরা যাক এটা অনন্তকাল পর্যন্ত রয়েছে, এটা সমাধান করলে আমরা কী পাব?

ধরা যাক $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$

অর্থাৎ $x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$

$$x^2 = 1 + x$$

$\therefore$ $x^2 - x - 1 = 0$ সেই পরিচিত দ্বিঘাত সমীকরণ— যার সমাধান থেকে বলতে পারি

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}} = 1{\cdot}61803989\ldots$$

আরও উদাহরণ দরকার? সবাই কখনো না কখনো সিঁড়ি ভাঙ্গা ভগ্নাংশ করেছে— এই ভগ্নাংশটা কেমন?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

আমরা লিখতে পারি—

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

$$\therefore x = 1 + \frac{1}{x}$$

অর্থাৎ $x^2 = x + 1$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$ আবার সেই পরিচিত দ্বিঘাত সমীকরণ!

সমাধান হচ্ছে

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{\cdot}61803989\ldots$$

আমার মনে হয় এই বেলা থামা উচিৎ তবে শেষ একটা উদাহরণ দিয়ে থেমে যাওয়া যাক। উদাহরণটি ফিবোনাচি ধারা দিয়ে। আমরা ধারাটির প্রথম দশটি পদ লিখি—

$F_0 = 1$
$F_1 = 1$
$F_2 = 2$
$F_3 = 3$
$F_4 = 5$
$F_5 = 8$
$F_6 = 13$
$F_7 = 21$
$F_8 = 34$
$F_9 = 55$

এবারে দেখা যাক—

$\frac{F_1}{F_0} = 1$

$\frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2} = 1{\cdot}5$

$\frac{F_4}{F_3} = \frac{5}{3} = 1{\cdot}666...$

$\frac{F_5}{F_4} = \frac{8}{5} = 1{\cdot}6$

$\frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1{\cdot}625$

$\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1{\cdot}61538...$

$\frac{F_8}{F_9} = \frac{34}{21} = 1{\cdot}619047$

$\frac{F_9}{F_8} = \frac{55}{34} = 1{\cdot}6176...$

ব্যাপারটা নিশ্চয়ই সবাই লক্ষ্য করছে, ফিবোনাচি পদগুলো যতই বাড়ছে তাদের অনুপাতটি সোনালী অনুপাতের কাছাকাছি চলে আসছে!

ব্যাপারটা অবশ্যি আগেই আন্দাজ করার কথা, আমরা এর মাঝে বলেছি—

$$F_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n \text{ কাজেই } F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1}$$

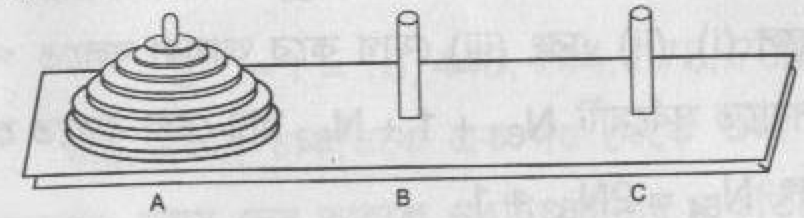
$$\text{যার অর্থ } \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = 1{\cdot}6180033989...$$

10. টাওয়ার অফ হ্যানয়

টাওয়ার অফ হ্যানয় গণিতের একটা খুব বিখ্যাত সমস্যা। হ্যানয় হচ্ছে ভিয়েতনামের রাজধানী, কাজেই সমস্যার নামটা শুনে মনে হতে পারে যে সেটা নিশ্চয়ই হ্যানয় শহরের কোনো বিখ্যাত দালানের ঘটনা। মজার ব্যাপার হচ্ছে সমস্যাটি ভিয়েতনামের কোনো গণিতবিদ দেন নি, এটি দিয়েছেন এডমন্ড লুকাস নামে একজন ফরাসি গণিতবিদ এস ক্লাউস ছদ্মনামে 1833 সালে। শুধু তাই নয় সমস্যার স্থানটি মোটেও হ্যানয়ের কোনো দালান নয়, সমস্যার স্থানটি হচ্ছে বেনারসের একটি মন্দির। সেখানে একটা পিতলের প্লাটফর্মের উপর তিনটা হীরার দণ্ড রয়েছে (হীরার দণ্ড হতে পারে কী না, সেই প্রশ্নের উত্তর আমার জানা নেই!)। সেই হীরার দণ্ডের একটিতে রয়েছে 64টি সোনার চাকতি, চাকতিগুলো বড় থেকে ছোট হয়ে গেছে এবং সবচেয়ে বড়টি সবার নিচে এবং তার উপরে একটু একটু. ছোট হয়ে সবচেয়ে ছোটটি সবার উপরে। ব্রহ্মার নির্দেশে সেই মন্দিরের পুরোহিতেরা চাকতিগুলোকে একটি হীরার দণ্ড থেকে অন্য একটিতে সরানোর কাজে ব্যস্ত আছেন সবগুলো চাকতি একটা দণ্ড থেকে অন্য একটা দণ্ডে সরানো শেষ হওয়া মাত্রই ব্রহ্মার নির্দেশে সমস্ত সৃষ্টি জগৎ ধ্বংস হয়ে যাবে। পুরোহিতেরা এখনো সবগুলো চাকতি একটা দণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে সরানো শেষ করতে পারেন নি। তার কারণ এগুলো সরানোর সম্পর্কে ব্রহ্মা দুটো নিয়ম দিয়ে দিয়েছেন সেই নিয়ম দুটি মানতে গিয়ে একটু সময় লাগছে। নিয়ম দুটি হচ্ছে: 1. একবারে একটা চাকতি সরানো যাবে। 2. চাকতিগুলো সরানোর সময় কখনোই কোনো দণ্ডে ছোট চাকতির উপর তার থেকে বড় একটা চাকতি রাখা যাবে না, সব সময়েই একটা বড় চাকতির উপর ছোট একটা চাকতি রাখতে হবে।

সৃষ্টির শুরুতে ব্রহ্মার নির্দেশে পুরোহিতেরা এই কাজ শুরু করেছেন, এতদিন হয়ে গেল কাজটি এখনো শেষ হচ্ছে না কেন দেখা যাক।

এই সমস্যাটি সমাধান করা হবে ফাঁকিবাজি করে অর্থাৎ কোনো অঙ্ক না করে



চিত্র-11 : টাওয়ার অব হ্যানয়

এই অঙ্কটি সামাধান করা হবে! তার আগে সবাই যেন একটু সময় নিয়ে সমস্যাটার সমাধান কীভাবে করা যায় সেটা নিয়ে একটু চিন্তা করে।

সমস্যার সমাধান এরকম!

ধরা যাক শুরুতে 64টি চাকতি ছিল A দণ্ডে এবং পুরোহিতেরা ব্রহ্মার দেয়া দুটি নিয়ম মেনে 63টি চাকতি B দণ্ডে আনতে পেরেছেন এবং এ জন্যে পুরোহিতদের N_{63} বার চাকতিগুলো এক দণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে নিতে হয়েছে। এখানে N_{63} সমান কত আমরা জানি না। শুধু যে জানি না তা নয়, এই N_{63} বের করার জন্যে কোন চাকতিটা কখন কোন দণ্ড থেকে কোন দণ্ডে রাখা হয়েছিল সেটাও জানি না! শুরুতে বলেছিলাম সমস্যাটার সমাধান করা হবে ফাঁকিবাজি করে— তাই কোন চাকতি কোন দণ্ড থেকে সরিয়ে কোন দণ্ডে কীভাবে রাখা হয়েছিল সেটা নিয়েও আমরা মাথা ঘামাতে রাজি না। আমরা শুধু জানি 63টা চাকতি একদণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে সরাতে N_{63} বার চাকতি সরাতে হয়েছে।

এবারে তাহলে আমরা সবগুলো চাকতি সরাতে কতবার চাকতি নাড়াচাড়া করতে হবে সেটা বের করতে পারি।

(i) N_{63} বারে 63টা চাকতি এসেছে A থেকে B-তে।

(ii) 64 নম্বর চাকতিটা A থেকে C-তে সরানো হলো আরো একটি প্রচেষ্টায়।

(iii) এবারে B দণ্ডের 63টা C দণ্ডের 64 নম্বর চাকতির উপর সরাতে হবে, আমরা জানি তার জন্যে N_{63} বার চেষ্টা করতে হবে।

তাহলে (i), (ii) এবং (iii) যোগ করে আমরা বলতে পারি 64 টা চাকতি সরাতে সর্বমোট $N_{63} + 1 + N_{63}$ বার চেষ্টা করতে হবে।

অর্থাৎ $N_{64} = 2N_{63} + 1$

এখন আমাদের N_{63} বের করতে হবে। আগের যুক্তি দিয়ে বলতে পারি যদি 62টা চাকতি N_{62} বার চেষ্টা করে সরানো হয়ে থাকে তাহলে—

$$N_{63} = 2N_{62} + 1$$

ঠিক সেভাবে

$$N_{62} = 2N_{61} + 1$$

অথবা $N_{61} = 2N_{60} + 1$ ইত্যাদি

মজার ব্যাপার হচ্ছে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে-কোনো একটি সংখ্যা বের করার জন্যে তার আগের সংখ্যাটি জানা প্রয়োজন। সেই আগের সংখ্যাটি বের করার জন্যে তার আগের সংখ্যাটি জানা প্রয়োজন। এভাবে যেতে যেতে আমরা একেবারে প্রথম চাকতিটিতে হাজির হতে পারি সেই চাকতিটি পাশের দণ্ডে সরাতে কতবার চেষ্টা করতে হবে আমরা সেটা জানি, একবারই সেটা করাতে পারব! অর্থাৎ

$$N_1 = 1$$

কাজেই $N_2 = 2N_1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$

$$N_3 = 2N_2 + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$N_4 = 2N_3 + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

$$\vdots$$

$$N_{63} = 2N_{62} + 1 = 2^{63} - 1$$

$$N_{64} = 2N_{63} + 1 = 2^{64} - 1$$

তার অর্থ পুরোহিতদের সর্বমোট $2^{64} - 1$ বার চেষ্টা করে 64টি সোনার চাকতি একটা দণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে নিতে পারবেন।

$$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$$

যদি একটা চাকতিকে এক দণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে সরাতে এক সেকেন্ড সময় নেয় তাহলে 64টি সোনার চাকতিকে এক দণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে সরাতে সব মিলিয়ে 585 বিলিয়ন বৎসর সময় লাগবে!

সবাইকে মনে করিয়ে দেয়ার জন্যে বলা যায় বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের বয়স 14 বিলিয়ন বৎসর! কাজেই ব্রহ্মার নির্দেশে এই বিশ্বব্রহ্মাণ্ড চট করে ধ্বংস হয়ে যাবে সেটা নিয়ে দুশ্চিন্তায় কোনো কারণ নেই।

11. মারজেন প্রাইম ও পারফেক্ট সংখ্যা

মারজেন (Mersenne) ছিলেন একজন ধর্মযাজক, গণিতে তার খুব উৎসাহ ছিল এবং তার নামে এক ধরনের প্রাইম সংখ্যা আছে সেগুলো এরকম—

$$M_p = 2^p - 1$$

যেখানে P হচ্ছে একটা প্রাইম সংখ্যা। P যদি প্রাইম সংখ্যা না হয় তাহলে $2^p - 1$ কখনো প্রাইম সংখ্যা হবে না সেটা খুব সহজেই দেখা যায়। ধরা যাক P = mn তাহলে—

$$2^{mn} - 1 = (2^m - 1)\{2^{m(n-1)} + 2^{m(n-2)} + \ldots.. 2^m + 1)\}$$

কিন্তু P প্রাইম হলেই যে $2^p - 1$ প্রাইম হবে সেটা কিন্তু সত্যি নয়। যেমন-

P = 2 হলে $2^p - 1 = 3$

P = 3 হলে $2^p - 1 = 7$

P = 5 হলে $2^p - 1 = 31$

P = 7 হলে $2^p - 1 = 127$

ওপরের সবগুলো প্রাইম সংখ্যা। কিন্তু

P = 11 হলে $2^p - 1 = 2047 = 23 \times 89$

প্রাইম সংখ্যা নয়। এই মারজেন প্রাইমগুলো হচ্ছে এখন পর্যন্ত খুঁজে পাওয়া সবচেয়ে বড় বড় প্রাইম সংখ্যা। অক্টোবরের 2006 সালে গণিতবিদরা 19, 616, 714 অঙ্কের বিশাল একটি প্রাইম খুঁজে পেয়েছেন, সেটি হচ্ছে এখন পর্যন্ত খুঁজে পাওয়া সবচেয়ে বড় প্রাইম, এবং সেটি হচ্ছে একটি মারজেন প্রাইম—

$$2^{32,582651} - 1$$

যেখানে 32,582651 একটি প্রাইম সংখ্যা।

পৃথিবীর সবচেয়ে বড় প্রাইম সংখ্যাগুলো যে মারজেন প্রাইম তার একটি কারণ রয়েছে, এই ধরনের প্রাইম খুঁজে পাওয়ার পদ্ধতিটা খুব সোজা এই পদ্ধতিটার নাম লুকাস লেহ্‌মার পরীক্ষা। পরীক্ষাটা এরকম—

শুরু করতে হয় এভাবে

$S_0 = 4$

$S_1 = S_0^2 - 2 = 14$

$S_2 = S_2^2 - 2 = 194$

$S_3 = S_3^2 - 2 = 37632$ ইত্যাদি

অর্থাৎ $S_n = S_{n-1}^2 - 2$

লুকাস লেহ্‌মারের পরীক্ষা বলে যে যদি S_{p-2}-কে $2^p - 1$ দিয়ে নিঃশেষে ভাগ দেয়া যায় তাহলে $2^p - 1$ হবে মারজেন প্রাইম।

আমরা কোনো একটা উদাহরণ নেয়ার আগে ভিন্ন একটা বিষয় একটু বলে নিই, সেটা হচ্ছে মডুলার এরিথমেটিক (Modular Arithmatic)। ওপরে S_n বের করার জন্যে প্রতিবারই সংখ্যাটি বর্গকরে 2 বিয়োগ করতে হচ্ছে, একটা সংখ্যাকে কয়েকবার বর্গ করলেই সেটা বিশাল বড় হয়ে যায় তাই লুকাস লেহ্‌মার পরীক্ষাকে যত সহজ দাবি করা হচ্ছে সেটা এত সহজ নাও হতে পারে। সেটা সহজ হবে যদি আমরা সাধারণ ভাগ ব্যবহার না করে মডুলার এরিথমেটিক ব্যবহার করি!

মডুলার এরিথমেটিকের মতন একটা গালভরা শব্দ শুনে কেউ কেউ ঘাবড়ে যেতে পারে, কিন্তু জেনে হোক বা না জেনে হোক আমরা সবাই কিন্তু বহুদিন থেকে মডুলার এরিথমেটিক ব্যবহার করে আসছি। বিষয়টা বোঝার জন্যে আমরা কাউকে জিজ্ঞেস করতে পারি, এখন কয়টা বাজে? বিকেলবেলা জিজ্ঞেস করলে সম্ভাবনা আছে সে উত্তর করবে, এখন বিকেল পাঁচটা বাজে। আমরা যদি মডুলার এরিথমেটিক ব্যবহার না করতাম তাকে সম্ভবত বলতে হতো, এখন বাজে উনত্রিশ কোটি তেত্রিশ লক্ষ সাতানব্বই হাজার ছয়শ তেত্রিশটা! সেটা ঘটতে পারত যদি আমরা

নির্দিষ্ট একটা সময়কে শূন্য ধরে নিয়ে সেখান থেকে গুণতে শুরু করতাম। কিন্তু আমাদের খুব কপাল ভালো সময়ের বেলা আমরা Mod 12 নিই যার অর্থ 12 থেকে বেশি হলে আবার গোড়া থেকে শুরু করি। এটাই হচ্ছে মডুলার এরিথমেটিক। অর্থাৎ

$$7 \text{ Mod } 12 = 7$$

$$12 \text{ Mod } 12 = 0$$

$$15 \text{ Mod } 12 = 3$$

$$24 \text{ Mod } 12 = 0$$

$$100 \text{ Mod } 12 = 4$$

মডুলার এরিথমেটিক খুব মজার বিষয়, এটা দিয়ে অনেক কিছু করা যায় কিন্তু আমরা যেহেতু মারজেন প্রাইম নিয়ে কথা বলছি তাই আপাতত আর কিছু না বলে লুকাস লেহ্‌মার পরীক্ষায় চলে যাই। আমরা বলেছিলাম $S_0 = 4$ এবং $S_n = S_{n-1}^2 - 2$ তার বদলে আমরা বলব $S_0 = 4$ এবং $S_n = (S_{n-1}^2 - 2) \text{ Mod } (2^p - 1)$ যেহেতু প্রতিবারই Mod $(2^p - 1)$ করা হবে তাই S_n মাত্রা ছাড়া বড় হতে পারবে না $2^p - 1$-এর সমান কিংবা ছোট থাকতে হবে!

এবারে একটা পরীক্ষা করা যাক। ধরা যাক আমরা পরীক্ষা করে দেখতে পাই $2^7 - 1 = 127$ একটি প্রাইম সংখ্যা কী না! লুকাস লেহ্‌মার পরীক্ষা অনুযায়ী $S_5 \text{ Mod } 127 = 0$ হতে হবে। তাহলে দেখা যাক—

$$S_0 = 4$$

$$S_1 = (4^2 - 2) \text{ Mod } 127 = 14 \text{ Mod } 127 = 14$$

$$S_2 = (14^2 - 2) \text{ Mod } 127 = 194 \text{ Mod } 127 = 67$$

$$S_3 = (67^2 - 2) \text{ Mod } 127 = 4487 \text{ Mod } 127 = 42$$

$$S_4 = (42^2 - 2) \text{ Mod } 127 = 1762 \text{ Mod } 127 = 111$$

$$S_5 = (111^2 - 2) \text{ Mod } 127 = 12319 \text{ Mod } 127 = 0$$

সত্যি সত্যি $S_5 \text{ Mod } 127 = 0$ যার অর্থ $2^7 - 1$ নিশ্চয়ই প্রাইম সংখ্যা! আমরা যদি এই পুরো প্রক্রিয়াটি $2^{11} - 1 = 2047$-এর জন্যে করতাম তাহলে দেখতাম $S_9 \text{ Mod } 2047$ সমান শূন্য নয়। যার অর্থ $2^{11} - 1$ প্রাইম সংখ্যা নয়।

আমরা যেহেতু ছোট সংখ্যার জন্যে পরীক্ষা করছি তাই কাগজ কলম আর একটা ক্যালকুলেটর নিয়েই এটা করে ফেলা যাচ্ছে। কিন্তু সংখ্যাগুলোতে যদি কয়েক মিলিয়ন অঙ্ক থাকত তাহলে সেটা হতো সম্পূর্ণ অন্য ব্যাপার, তার জন্যে দরকার হতো বিশাল বিশাল সুপার কম্পিউটার। কম্পিউটারে মডুলার এরিথমেটিক করা খুব সোজা, এটা বিশেষ সোজা $2^p - 1$ ধরনের সংখ্যার জন্যে। তার কারণ কম্পিউটার কাজ করে বাইনারী সংখ্যা দিয়ে আর বাইনারীতে $2^p - 1$-এর রূপটা সবচেয়ে সহজ, সেটা হচ্ছে 11111.....111 অর্থাৎ P সংখ্যক 1! তাই গণিতবিদরা কম্পিউটার বিজ্ঞানীদের সাথে মিলে একটা মজার কাজ করেছেন, বিশাল বিশাল সুপার কম্পিউটার ব্যবহার করে মারজেন প্রাইম খুঁজে বের করার বদলে তারা সাধারণ মানুষের সাধারণ কম্পিউটার ব্যবহার করে এই প্রাইম সংখ্যাগুলো খুঁজে বের করা শুরু করেছেন, সেটা করা হয় ইন্টারনেট ব্যবহার করে হাজার হাজার সাধারণ কম্পিউটার দিয়ে, তাই তার নাম দেয়া হয়েছে Great Internet Mersenne Prime Search বা সহজ করে GIMPS। শুধু যে সবচেয়ে বড় প্রাইম সংখ্যাটিই GIMPS খুঁজে বের করেছে তা নয়, গত দশটি সবচেয়ে বড় মারজেন প্রাইমও খুঁজে বের করেছে সারা পৃথিবীতে ছড়িয়ে ছিটিয়ে থাকা সাধারণ গণিতে উৎসাহী অসংখ্য মানুষ। যে সব কাজকর্ম শুধুমাত্র বাঘা বাঘা গণিতবিদ আর বড় বড় সুপার কম্পিউটারের ব্যবহারকারীদের জন্যে নির্দিষ্ট ছিল এখন সেখানে গণমানুষও অংশ নিতে পারছে, এটা কিন্তু কম কথা নয়।

পারফেক্ট মানে নিখুঁত, একটা সংখ্যা আসলেই নিখুঁত হতে পারে কী না সেটা নিয়ে তর্ক বিতর্ক হতে পারে। প্রাচীনকালে গ্রীক গণিতবিদরা গণিতের অনেক উন্নতি করেছেন সত্যি কিন্তু তার সাথে এই কাজগুলোও করেছেন সংখ্যাগুলোর মাঝে নানা ধরনের মানবিক গুণাবলি খুঁজে পেয়েছেন! 2 তাদের কাছে ছিল মহিলা সংখ্যা, 3 পুরুষ সংখ্যা এবং 5 হচ্ছে বিবাহের সংখ্যা ইত্যাদি ইত্যাদি। এতদিন পরেও যে আমরা তার থেকে বের হতে পেয়েছি তা নয়, এখনও 13 হচ্ছে অশুভ সংখ্যা, 666 হচ্ছে শয়তানের সংখ্যা! আমরা সেসবে না গিয়ে পারফেক্ট সংখ্যা নিয়ে দুই চারটি কথা বলি, কেউ যেন ধরে না নেয় মানবিক দৃষ্টিতে এটা পারফেক্ট, এটা হচ্ছে একটা নাম, তার বেশি কিছু নয়!

গণিতের ভাষায় পারফেক্ট বলতে বোঝানো হয় যে সংখ্যায় সবগুলো উৎপাদককে (1-সহ, কিন্তু মূল সংখ্যাটি ছাড়া) যোগ করলে সেই সংখ্যাটি পাওয়া যায়। পারফেক্ট সংখ্যার প্রথম উদাহরণ হচ্ছে 6, কারণ 6-এর উৎপাদক হচ্ছে— 1, 2 এবং 3 এবং 1 + 2 + 3 = 6, দ্বিতীয় উদাহরণ হচ্ছে— 28, কারণ 28-এর উৎপাদক হচ্ছে— 1, 2, 4, 7, 14 এবং 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28। এর পরের একটি বা দুটি পারফেক্ট সংখ্যা যে খুঁজে বের করা যাবে না তা নয় কিন্তু আমরা সরাসরি পারফেক্ট সংখ্যা হবার নিয়মটিই বলে দিই, সেটা হচ্ছে প্রত্যেকটি মারজেন প্রাইমের সাথে একটা করে পারফেক্ট সংখ্যা রয়েছে এবং $(2^p - 1)$ যদি মারজেন প্রাইম হয় তাহলে তার সাথে সংশ্লিষ্ট মারজেন প্রাইমটি হচ্ছে $2^{p-1}(2^p - 1)$. আমরা চট করে এটা একটু পরীক্ষা করেও দেখতে পারি।

P যদি 2 হয় তাহলে $2^1(2^2 - 1) = 6$

P যদি 3 হয় তাহলে $2^2(2^3 - 1) = 28$

P যদি 5 হয় তাহলে $2^4(2^5 - 1) = 446$

P যদি 7 হয় তাহলে $2^6(2^2 - 1) = 8128$ ইত্যাদি।

প্রথম দুটি আমরা এর মাঝে পরীক্ষা করে দেখেছি অন্যগুলো ধৈর্য্য ধরে দেখা যেতে পারে কিন্তু আমরা সেই কষ্টের মাঝে না গিয়ে সরাসরি যুক্তি দিয়ে বের করে ফেলতে পারি।

যেহেতু $2^p - 1$ একটি মারজেন প্রাইম আমরা সেটাকে লিখতে M_p কাজেই পারফেক্ট সংখ্যাটি হচ্ছে $2^{P-1}M_p$ এখন আমরা তার উৎপাদকগুলো লিখে ফেলতে পারি, সেগুলো হচ্ছে অবশ্যই—

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 \ldots\ldots 2^{P-1}$$

এবং এর প্রত্যেকটার সাথে M_pএর গুণফল—

$$M_p, 2M_p, 2^2M_p, 2^3M_p \ldots 2^{P-1}M_p$$

শেষ উৎপাদকটি অবশ্যি মূল সংখ্যাটি, পারফেক্ট সংখ্যার উৎপাদক বের করার সময় এটা থাকার কথা নয়, আমরা সেটা মনে রাখব। এবারে মূল সংখ্যা $2^{P-1}M_p$ ছাড়া অন্য সবগুলো উৎপাদক যোগ দিই। ধরা যাক সেটি N_p, অর্থাৎ

$$N_p=(1+2+2^2+\ldots 2^{P-1}) + M_p(1+2+2^2+\ldots 2^{P-1}) - 2^{P-1}M_p$$

যেহেতু মূল সংখ্যাটি থাকার কথা নয় তাই যোগ দেবার পর মূল সংখ্যা $2^{P-1}M_p$-টি আবার বিয়োগ দিয়ে দিয়েছি, পারফেক্ট সংখ্যার সংজ্ঞাকে অমান্য করা হয় নি। এখন যোগফলটাকে লেখা যায়—

$$N_p = (1 + 2 + 2^2 + \ldots 2^{P-1})(1 + M_p) - 2^{P-1}M_p$$

এখন প্রথম অংশের ধারাটির যোগফল সহজেই বের করা যায়। ধরা যাক,

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots 2^{P-1}$$

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots 2^{P-1} + 2^P$$

$$2S + 1 = 1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots P^{P-1} + 2^P$$

$$2S + 1 = S + 2^P$$

$$\therefore S = 2^P - 1$$

আবার আমরা জানি $M_p = 2^P - 1$ কাজেই $1 + M_p = 2^P$ এবার সবগুলো উৎপাদকের যোগফলকে লিখতে পারি—

$$N_p = (2^P - 1)2^P - 2^{P-1}(2^P - 1)$$

$$N_p = (2^P - 1)(2^P - 2^{P-1})$$

যেহেতু $2^P = 2 \times 2^{P-1}$ কাজেই যোগফল $N_p =$ হচ্ছে $2^{P-1}(2^P - 1)$, আমরা যেটাকে পারফেক্ট সংখ্যা হিসেবে দাবি করেছি! কাজেই যখনই নতুন একটি মারজেন প্রাইম বের হয় তখন নতুন একটি পারফেক্ট সংখ্যাও বের হয়!

পারফেক্ট সংখ্যার আরেকটা বিশেষত্ব বলে শেষ করে দেয়া যাক। দ্বিতীয় পারফেক্ট সংখ্যা থেকে শুরু করে সবগুলো পারফেক্ট সংখ্যা হচ্ছে বেজোড় সংখ্যাগুলোর কিউবের যোগফল। পারফেক্ট সংখ্যাটি যদি হয় $2^{P-1}(2^P - 1)$ তাহলে $2^{(P-1)/2}$ সংখ্যক পদ নিতে হবে। অর্থাৎ P যদি হয় 3 তাহলে পারফেক্ট সংখ্যা 28-এর জন্যে থাকবে $2^{(3-1)/2} = 2$টি পদ। যদি P হয় 7 তাহলে পারফেক্ট সংখ্যা 8128-এর জন্যে থাকবে $2^{(7-1)/2} = 2^3 = 8$টি পদ। আমরা পরীক্ষা করে দেখতে পারি—

$$28 = 1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

ইত্যাদি।

কেউ যদি পারফেক্ট সংখ্যা নিয়ে আরো একটু মজা করতে চায় তাহলে সে এগুলোকে বাইনারীতে লিখার চেষ্টা করে দেখতে পারে, বেশ একটা মজার ব্যাপার দেখবে তখন!

12. সসীম ক্ষেত্রের অসীম পরিসীমা

প্রথমে একটা সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা যাক, এই ত্রিভুজের বাহু $N_0 = 3$, বাহুর দৈর্ঘ্য হচ্ছে $l_0 = 1$, কাজেই মোট পরিসীমা হচ্ছে $N_0 l_0 = 3$; আর এই ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হচ্ছে $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. সমবাহু ত্রিভুজের বেলায় যা হয়।। এবার ত্রিভুজটায় প্রত্যেক বাহুকে তিনভাগ করে মাঝখানের $\frac{1}{3}$ অংশে একটা করে সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা যাক। এখন বাহুর সংখ্যা $N_1 = 3 \times 4$, প্রত্যেকটা বাহুর দৈর্ঘ্য $l_1 = \frac{1}{3}$, কাজেই পরিসীমা হচ্ছে $N_1 l_1 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)$; এই নতুন ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বের করার জন্যে A_0-এর সাথে তিনটা ছোট ছোট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল যোগ করতে হবে। এই ছোট ত্রিভুজগুলোর প্রত্যেকটা ক্ষেত্রফল $\frac{A_0}{9}$, কাজেই মোট ক্ষেত্রফল $A_1 = A_0 + 3\left(\frac{A_0}{9}\right)$।

এভাবে আবার প্রত্যেকটা বাহুকে তিনভাগ করে তার মাঝখানে একটা করে ছোট ত্রিভুজ বসালে মোট বাহুর সংখ্যা হবে $N_2 = 3 \times 4^2$, বাহুর দৈর্ঘ্য হবে

$l_2 = \frac{1}{3^2}$, পরিসীমা হবে $N_2 l_2 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$ এবং ক্ষেত্রফল হবে

$$A_2 = A_0 + 3\left(\frac{A_0}{9}\right) + 12\left(\frac{A_0}{9^2}\right)।$$

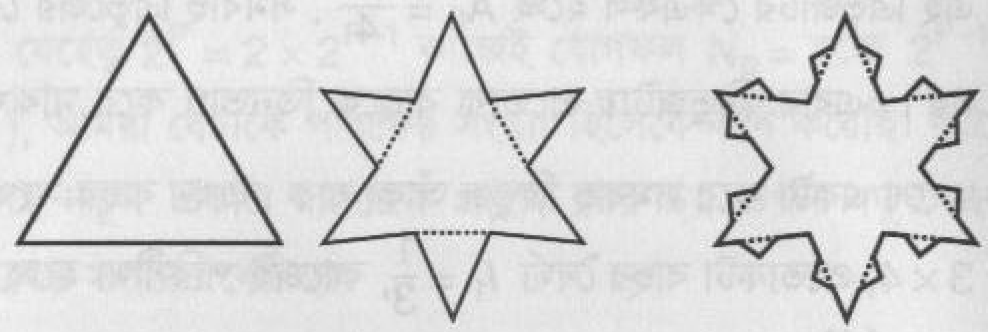
এভাবে যদি করে যাওয়া হয় তাহলে n ধাপ অতিক্রম করার পর আমরা লিখতে পারি—

বাহুর দৈর্ঘ্য : $l_n = \frac{1}{3^n}$

বাহুর সংখ্যা : $N_n = 3 \times 4^n$

পরিসীমা : $N_n l_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$

ক্ষেত্রফল : $A_n = A_0\left[1+\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\dots\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right]$



$N_0 = 3$ $N_1 = 3\times 4$ $N_2 = 3\times 4^2$

$l_0 = 1$ $l_1 = \frac{1}{3}$ $l_2 = \frac{1}{3^2}$

$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $A_1 = A_0+3\left(\frac{A_0}{9}\right)$ $A_2 = A_0+3\left(\frac{A_0}{9}\right)+12\left(\frac{A_0}{9^2}\right)$

চিত্র-12 : সমবাহু ত্রিভুজের প্রতি বাহুতে আরেকটি ছোট ত্রিভুজ আঁকা হয়েছে।

এবারে একটা অত্যন্ত বিস্ময়কর বিষয় দেখা যাক, যদি n বাড়তে বাড়তে যদি অসীম সংখ্যক হয় তাহলে কী হবে? প্রথমে দেখা যাক ক্ষেত্রফল :

$$A = A_0\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট ছোট সংখ্যা। এবারে দেখা যাক n যদি অসীম হয়ে যায় তাহলে পরিসীমার কী অবস্থা হয়। পরিসীমা হচ্ছে $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$ কাজেই n যদি অসীম হয়ে যায় তাহলে পরিসীমাও হবে অসীম।

অর্থাৎ একটা সসীম ক্ষেত্রের পরিসীমা হচ্ছে অসীম। কাউকে যদি বলা হয় কলম দিয়ে পরিসীমাটুকু আঁকতে তাহলে পৃথিবীর সব কলম দিয়েও সেটা আঁকতে পারবে না। কারণ পরিসীমা হচ্ছে অসীম। কিন্তু কাউকে যদি বলা হয় ক্ষেত্রফলটি রঙ করতে তাহলে সেটা খুব সহজেই করা সম্ভব, কারণ ক্ষেত্রফলটি সসীম!

মজার ব্যাপার হচ্ছে কেউ যদি এই ক্ষেত্রটি রঙ করে তাহলে কিন্তু নিজে নিজেই পরিসীমাটি আঁকা হয়ে যায়! ক্ষেত্রটি রঙ করে পরিসীমাটি আঁকা যায়— কিন্তু শুধু পরিসীমাটি আঁকা যায় না, এই রহস্যটি ভেদ করা যায় কীভাবে?

13. বাইনোমিয়ালের সূত্র এবং প্যাস্কেলের ত্রিভুজ

আমরা সবাই জানি,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

এবং অনেকেই জানি,

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

এটাকে (x + y) দিয়ে গুণ করে বের করতে পারি,

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

এভাবে আরো যেতে পারি, যেমন-

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

এখন কথা হচ্ছে এভাবে গুণ করে করে আমরা কত দূর যাব। যদি $(x+y)^{25}$-এর 14 নম্বর পদটি লিখতে হয় তাহলে কী আমরা 25 বার গুণ করে বের করব নাকি সহজ কোনো নিয়ম আছে? অবশ্যই সহজ নিয়ম আছে আর সেটাই হচ্ছে বাইনোমিয়ালের সূত্র। সেটা হচ্ছে—

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\ldots\ldots\binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

এখানে, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

সবাইকে মনে করানোর জন্যে বলে দেয়া যায় ফ্যাক্টরিয়াল n হচ্ছে

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots3\times2\times1$$

কাজেই আমরা যে-কোনো n এবং k-এর জন্যে $\binom{n}{k}$ বের করতে পারি। এখন কেউ যদি জিজ্ঞেস করে $\binom{n}{k}$এর 14 নম্বর পদটি কী আমরা চট করে বলে দিতে পারব সেটা হচ্ছে :

$$\binom{25}{14-1}x^{12}y^{13} = \frac{25!}{13!12!}x^{12}y^{13} = 5{,}200{,}300x^{12}y^{13}$$

আমার মনে হয় এখন $\binom{n}{k}$-এর আসল অর্থটাও বলে দেয়া যায়। এটা হচ্ছে n সংখ্যক জিনিষের ভেতর থেকে k সংখ্যক জিনিস কতভাবে নেয়া যায়। যেমন- আমাদের যদি 1, 2, 3 এই তিনটি জিনিস থাকে তাহলে তাদের ভেতর থেকে দুটি জিনিস নেবার উপায় হচ্ছে (1, 2), (1, 3) এবং (2, 3) আর অন্য কোনোভাবে নেয়া সম্ভব নয়— যদি আমরা ধরে নিই (1, 2) আর (2, 1) আসলে একই ব্যাপার। তাহলে আমরা দেখছি $\binom{3}{2} = 3$ যদি আমরা আমাদের শেখানো নিয়মে হিসেব করি তাহলে দেখব—

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$ ঠিক যেটা পেয়েছি।

যদি 1, 2, 3, 4 এই চারটি জিনিস থেকে আমরা দুটি করে জিনিস বেছে নিই তাহলে পাই—

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) মোট ছয়ভাবে। আমাদের নিয়মে কী আসে দেখা যাক—

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3}{2} = 6$$ ঠিক যেটা ভেবেছিলাম।

একইভাবে আমরা যদি 1, 2, 3 এবং 4 এই চারটি জিনিস থেকে 3টি করে জিনিস বেছে নিই তাহলে পাই (1, 2, 3), (1, 3, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 2) মোট 4টি। আমাদের নিয়মে যদি বের করি—

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$ ঠিক যেটা হওয়া উচিৎ।

যদি আমরা ব্যাপারটা মোটামুটি বুঝে থাকি তাহলে নিজেরাই লক্ষ করেছি $\binom{n}{k}$-এর মাঝে k কখনোই n থেকে বড় হতে পারবে না। সমান হতে সমস্যা নেই! কেমন করে বড় হবে? চারটি জিনিস থেকে কখনোই তো পাঁচটি জিনিস বেছে নেয়া সম্ভব নয়!

এবারে আমরা বিভিন্ন n এবং k-এর জন্যে $\binom{n}{k}$ বের করার চেষ্টা করে দেখি—

প্রথমে $\binom{0}{0} = 1$

আমি জানি কেউ কেউ ভুরু কুঁচকে ফেলেছে কিন্তু বিষয়টা সত্যি ভেবে দেখো! ফ্যাক্টরিয়ালের সংজ্ঞাতেও বলা আছে 0! = 1

এরপরে হবে,

$\binom{1}{0} = 1$ এবং $\binom{1}{1} = 1$

এরপরে হবে

$\binom{2}{0} = 1;$

$\binom{2}{1} = 2;$

$\binom{2}{2} = 3$

এরপরে হবে

$\binom{3}{0} = 1;$

$\binom{3}{1} = 3;$

$\binom{3}{2} = 3$

এবং $\binom{3}{3} = 1$ ইত্যাদি।

একটা চমকপ্রদ ব্যাপার দেখানোর জন্যে এগুলোকে এভাবে লিখি—

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\binom{8}{1}\binom{8}{2}\binom{8}{3}\binom{8}{4}\binom{8}{5}\binom{8}{6}\binom{8}{7}\binom{8}{8}$$

চিত্র-13 : প্যাস্কেলের ত্রিভুজ

এভাবে সাজালে চমকপ্রদ বিষয়টা চট করে চোখে পড়ে না। তাই পদের মানগুলো বসিয়ে আরেকটা প্যাস্কেলের ত্রিভুজ তৈরী করি (চিত্র 14)এবং পদগুলো হচ্ছে—

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 **20** **15** 6 1
1 7 21 35 **35** 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

চিত্র-14 : বাইনোমিয়ালের পদ দিয়ে তৈরী প্যাস্কেলের ত্রিভুজ

বাইনোমিয়ালের পদগুলোকে এভাবে সাজানো হলে সেটাকে বলে প্যাস্কেলের ত্রিভুজ! এই ত্রিভুজটির দিকে তাকালেই একটা চমৎকার বিষয় চোখে পড়বে। এর যে-কোনো পদ তৈরি হয়েছে এর উপরের সারির ডান এবং বাম পদটি যোগ করে! অর্থাৎ

যেমন $\binom{6}{3} = 20; \binom{6}{4} = 15$ এবং $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 35 = \binom{7}{4}$

আমরা সাধারণভাবে লিখতে পারি

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

কেউ যদি প্যাস্কেলের ত্রিভুজ তৈরি করতে চায় তাহলে সবচেয়ে সুবিধে হয় যদি কল্পনা করে নাও প্রত্যেকটা সারিতেই যেখানে থেকে এটা শুরু হয়েছে তার আগের সবগুলো পদ শূন্য এবং যেখানে শেষ হয়েছে তার পরেও রয়েছে শূন্য!

প্যাস্কেলের ত্রিভুজের দিকে তাকিয়ে থেকে আমরা আরো মজার কিছু বিষয় দেখতে পাই। যেমন - প্রত্যেকটা সারির পদগুলো যদি যোগ করি তাহলে পাই (শূন্য দিয়ে শুরু করি)

শূন্যতম সারি $1 = 2^0$

প্রথম সারি $2 = 2^1$

দ্বিতীয় সারি $4 = 2^2$

তৃতীয় সারি $8 = 2^3$

.

.

.

n-তম সারি $= 2^n$

আসলে এটা যে হবে সেটা আমরা ইচ্ছে করলে প্রমাণও করে ফেলতে পারি—

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{k} + \ldots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$= 2^n$ এক লাইনের প্রমাণ।

এই প্রমাণটা দেখে অবশ্যই আমাদের এর পরের বিষয়টা প্রমাণ করার ইচ্ছে করছে—

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots (-1)^k \binom{n}{k} + \ldots \binom{n}{n}$$

$$= 0$$

অর্থাৎ প্যাস্কেল ত্রিভুজের যে-কোনো সারিতে প্রথমটা পজিটিভ পরেরটা নেগেটিভ এর পরেরটা পজেটিভ ধরে সবগুলো যোগ করলে প্রত্যেক সারিতেই আমরা পাব শূন্য! এটাই আমরা একটু অন্যভাবেও বলতে পারি—

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots\ldots$$

প্যাস্কেলের ত্রিভুজের দিকে তাকালেই সেটা স্পষ্ট দেখা যায়!

যাদের কৌতূহল আছে তারা ইচ্ছে করলে প্যাস্কেলের ত্রিভুজ থেকে আরো মজার মজার বিষয় খুঁজে বের করতে পারবে!

14. বর্গমূল কত ?

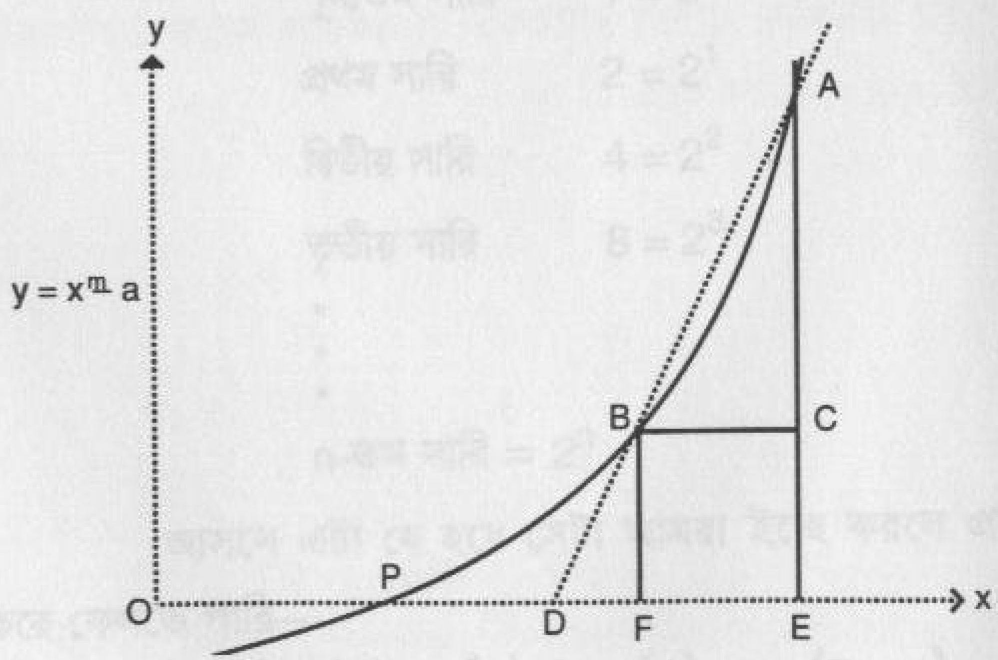
যদি জিজ্ঞেস করা হয় 2-এর বর্গমূল কত তখন সবাই নিশ্চয়ই হাতের কাছে রাখা ক্যালকুলেটর নিয়ে দুটো বোতাম টিপে চট করে বর্গমূলটা দশমিকের পর সাত আট ঘর পর্যন্ত বের করে ফেলতে পারবে। যদি বলা হয় ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে হিসেব করে বের করতে হবে, তখন অনেকেই নিশ্চয়ই মাথা চুলকাবে। 2-এর বর্গমূল না হয়ে যদি সেটা হয় $\sqrt[3]{2}$ কিংবা $\sqrt[7]{5}$ তাহলে কী হবে ? ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে সেটা কী হিসেব করে বের করা সম্ভব ? চেষ্টা করে দেখা যাক।

মনে করি সংখ্যাটি হচ্ছে a এবং এর তৃতীয় পঞ্চম বা m-তম বর্গমূল বের করতে চাই। এই সমস্যার উত্তরটি আমরা জানি না, ধরে নিই উত্তরটা হচ্ছে x, অর্থাৎ $x^m = a$

এখানে x-এর মান কত ? আমরা একটু ঘুরিয়ে লিখতে পারি—

$$y = x^m - a = 0$$

এটি একটি সমীকরণ, x-এর কত মানের জন্যে y বা বামপাশের অংশটি শূন্য হয় সেটা বের করলেই আসলে $\sqrt[m]{a}$ বের হয়ে যাবে। চিত্র-15-তে x-এর বিপরীতে $y=x^m-a$ এঁকে দেখানো হয়েছে, $y=x^n - a$



চিত্র-15 : x-এর যে মানের জন্য y-এর মান শূন্য সেটাই হচ্ছে সমাধান।

p বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করেছে কাজেই যখন x = OP তখন y = 0 অর্থাৎ OP-এর দৈর্ঘ্য হচ্ছে আমাদের সমাধান।

আগেই বলে দিই আমরা একবারে সঠিক সমাধানে যেতে পারব না, তবে যতটুকু পারি চেষ্টা করব। চেষ্টা করার জন্যে কোথাও না কোথাও থেকে শুরু করতে হবে ধরা যাক শুরু করছি E বিন্দু থেকে অর্থাৎ x = OE থেকে। মনে রাখার সুবিধার জন্যে আমরা বলি $OE = x_0$, কাজেই যখন $x = x_0$ তখন $y = x_0^m - a$ এবং ছবিতে আমরা দেখতে পাচ্ছি সেটা হচ্ছে A বিন্দু। অর্থাৎ $EA = x_0^m - a$। এবারে শুরু করা যাক।

প্রথমে A বিন্দুতে থেকে B বিন্দুর ভেতর দিয়ে একটা সরলরেখা আঁকি যেটা x অক্ষকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। আমাদের বের করার কথা P বিন্দু। ধরা যাক একবারে সেটা বের করতে পারব না জেনে D বিন্দু বের করলেই আপাতত খুশি থাকব! আমরা OD দৈর্ঘ্যটাকে বলব x_1 এবারে B বিন্দু থেকে AE-এর উপরে BC, এবং OE-এর উপরে BF লম্ব আঁকা হলো। আমরা ধরে নিই BC-এর দৈর্ঘ্য হচ্ছে Δ।

এবারে ABC আর ADE দুটি ত্রিভুজ সমতুল্য তাদের তুলনা করে লিখতে পারি—

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

কিংবা $$\frac{AE - CE}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

আমরা জানি $$AE = x_0{}^m - a$$

$$CE = BF = (x_0 - \Delta)^m - a$$

$$BC = \Delta$$

$$DE = OE - OD = x_0 - x_1$$

কাজেই $$\frac{(x_0{}^m - a) - (x_0 - \Delta)^m + a}{x_o^m - a} = \frac{\Delta}{x_0 - x_1}$$

অথবা $\frac{x_0^m - (x_0 - \Delta)^m}{x_0^m - a} = \frac{\Delta}{x_0 - x_1}$

অথবা $x_0 - x_1 = \frac{(x_0^m - a)\Delta}{x_0^m - (x_0 - \Delta)^m}$

কিংবা $x_1 = x_0 - \frac{(x_o^m - a)}{[x_0^m - (x_0 - \Delta)^m]/\Delta}$

অর্থাৎ x_0 দিয়ে শুরু করলে x_1-এর মান কত হবে তার মোটামুটি একটা আকার দাঁড়া করিয়েছি; যদিও পুরোটা এখনো শেষ হয় নি, আমাদের এখন বের করতে হবে

$\frac{x_o^m - (x_0 - \Delta)^m}{\Delta}$ সমান কত ? ভাগ্যিস আমরা বাইনোমিয়ালটা পড়ে এসেছি তাই চট করে লিখতে পারি

$$(x_0 - \Delta)^m = x_o^m - \binom{m}{1} x_o^{m-1}\Delta + \binom{m}{2} x_o^{m-2}\Delta^2 - ....$$

$$x_0 - \Delta)^m = x_o^m - m x_o^{m-1}\Delta + \frac{m(m-1)}{2} x_o^{m-2}\Delta^2 - ......$$

কাজেই

$$x_o^m - (x_0 - \Delta)^m = m x_o^{m-1}\Delta - \frac{m(m-1)}{2} x_o^{m-2}\Delta + ...$$

সুতরাং

$$\frac{x_o^m - (x_0 - \Delta)^m}{\Delta} = m x_o^{m-1} - \Delta\left(\frac{m(m-1)}{2} x_o^{m-2}\Delta - ...\right)$$

এখন আমরা একটা ফাঁকিবাজি করব এবং সেটা হবে একটা যুগান্তকারী ফাঁকিবাজি। এই যুগান্তকারী ফাঁকিবাজি দিয়ে নিউটন এবং লিবনিজ ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেছিলেন! ফাঁকিবাজিটা হচ্ছে এরকম— আমরা যেহেতু Δ সমান কত এখনো বলি নি তাই এটাকে খুব ছোট ধরে নিলে কেমন হয় ? এত ছোট যে সেটা প্রায় শূন্যের কাছাকাছি!

আমরা কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে ভাগ দিতে পারি না তাই $\Delta = 0$ বলব না কিন্তু একেবারে শূন্যের কাছাকাছি বলতে কোনো দোষ নেই তাই

$$\frac{x_0^m - (x_0 - \Delta)^m}{\Delta} = m x_0^{m-1}$$

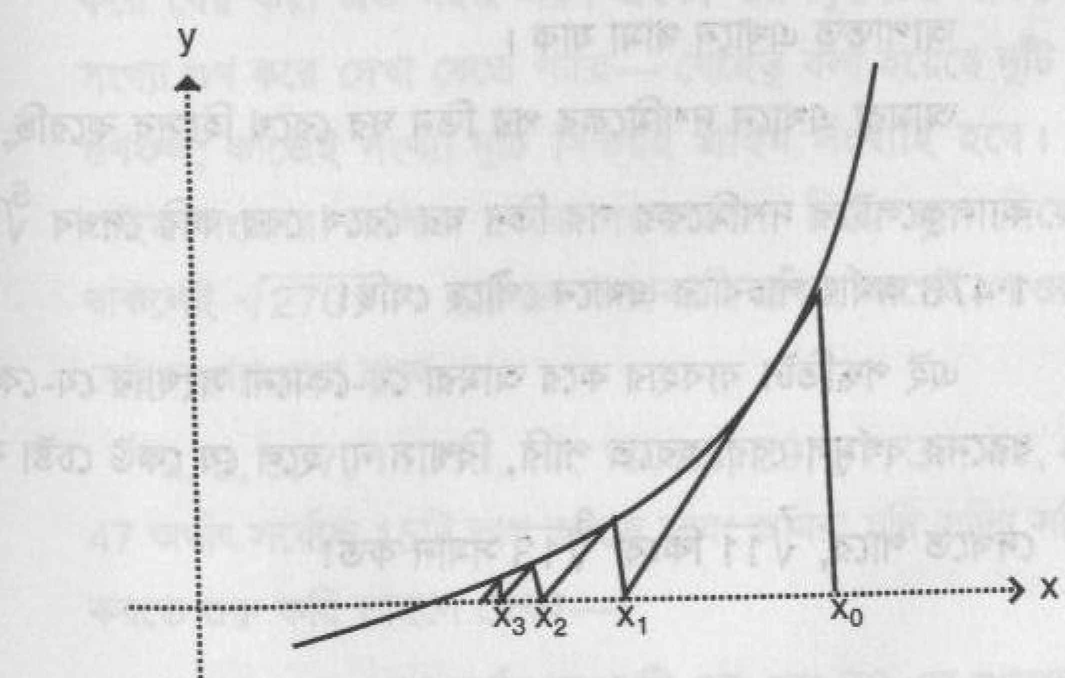
এবারে আমরা লিখতে পারি—

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0^m - a)}{m x_0^{m-1}}$$

অর্থাৎ x_0 থেকে শুরু করলে আমরা পাব x_1 যেটা সঠিক উত্তর নয় কিন্তু সঠিক উত্তরের একটু কাছে। x_1 বের করার পর সেটা দিয়ে শুরু করলে আমরা পাব x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1^m - a)}{m x_1^{m-1}}$$

যেটা হবে সঠিক উত্তরে আরেকটু কাছে! এভাবে আমরা যদি x_3, $x_4 \ldots x_n$ বের করতে থাকি তাহলে ধীরে ধীরে সঠিক উত্তরে যত কাছাকাছি সম্ভব যেতে পারি, ছবিতে যেরকম দেখানো হয়েছে!



আমার মনে হয় এখন একটা উদাহরণ দেবার সময় হয়েছে। ধরা যাক, আমরা $\sqrt[5]{7}$ বের করতে চাই। অর্থাৎ

$x^5 - 7 = 0$ সমীকরণটির সমাধান বের করতে চাই।

আমরা জানি, $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 7}{5_n^4}$

আমাদের শুরু করার জন্যে x_0 ধরে নিতে হবে, সহজ একটা কিছুই ধরে নেই, অর্থাৎ লিখি $x_0 = 1$, কাজেই

$$x_1 = 1 - \frac{1-7}{5} = 2{\cdot}200$$

এবারে x_1-কে ব্যবহার করে x_2 বের করি।

$$x_2 = 2{\cdot}200 - \frac{(2{\cdot}200)^5 - 7}{5(2{\cdot}200)^4} = 1{\cdot}820$$

এভাবে

$$x_3 = 1{\cdot}820 - \frac{(1{\cdot}820)^5 - 7}{5(1{\cdot}820)^4} = 1{\cdot}584$$

$$x_4 = 1{\cdot}584 - \frac{(1{\cdot}584)^5 - 7}{5(1{\cdot}584)^4} = 1{\cdot}490$$

$$x_5 = 1{\cdot}490 - \frac{(1{\cdot}490)^4 - 7}{5(1,490)^4} = 1{\cdot}476$$

আপাতত এখানে থামা যাক।

আমরা এখানে দশমিকের পর তিন ঘর রেখে হিসেব করেছি, যদি ক্যালকুলেটরে দশমিকের পর তিন ঘর রেখে বের করি দেখব $\sqrt[5]{7} = 1{\cdot}476$ অর্থাৎ পাঁচবারে এখানে পৌছে গেছি!

এই পদ্ধতিটা ব্যবহার করে আমরা যে-কোনো সংখ্যার যে-কোনো ধরনের বর্গমূল বের করতে পারি, বিশ্বাস না হলে যে কেউ চেষ্টা করে দেখতে পারে, $\sqrt[7]{11}$ কিংবা $\sqrt[3]{13}$ সমান কত!

15. উৎপাদক কত ?

2701 দুটো সংখ্যার গুণফল, সংখ্যা দুটো কত ? 2701 সংখ্যাটির দিকে তাকিয়ে বলতে পারি—

এটা 2 দিয়ে বিভাজ্য না কারণ সংখ্যাটি বেজোড়।

এটা 3 দিয়ে বিভাজ্য না কারণ 2 + 7 + 0 +1 = 10; 3 দিয়ে বিভাজ্য না।

যেহেতু এটা 2 দিয়ে বিভাজ্য না তাই এটা 4 দিয়ে বিভাজ্য হতে পারে না।

2701-এর শেষ সংখ্যাটি 5 কিংবা 0 নয় কাজেই এটা 5 দিয়ে বিভাজ্য না।

যেহেতু এটা 2 কিংবা 3 দিয়ে বিভাজ্য নয় তাই এটা 6 দিয়ে বিভাজ্য হতে পারবে না ইত্যাদি ইত্যাদি।

কিন্তু সংখ্যাটি আসলে কোন দুটো সংখ্যার গুণফল সেটা কিন্তু চট করে বের করা এত সহজ নয়। একটা ক্যালকুলেটর থাকলে বিভিন্ন সংখ্যা গুণ করে দেখা যেতে পারে— যেহেতু বলা হয়েছে দুটি সংখ্যার গুণফল, কাজেই সংখ্যা দুটি নিশ্চয়ই প্রাইম সংখ্যাই হবে। কাজেই প্রাইম সংখ্যার তালিকা থেকে সংখ্যাগুলো দিয়ে ভাগ দিয়ে যেতে থাকলেই $\sqrt{2701}$ = 52-এর কাছাকাছি যাবার আগেই পাওয়া যাবে! সেই সংখ্যাগুলো হচ্ছে—

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 এবং 47 অর্থাৎ সর্বোচ্চ 15টি ভাগ করতে হবে! আমরা যদি সত্যি সত্যি ভাগ করতে শুরু করি তাহলে দেখব—

2701÷37 = 73 অর্থাৎ সংখ্যাটি 37 এবং 73-এর গুণফল।

প্রশ্ন হচ্ছে এর থেকে সহজ কী কোনো নিয়ম আছে ? সংখ্যাটি যদি 2701 না হয়ে 6497 হতো তাহলে $\sqrt{6497} \simeq 81$-এর নিচের সবগুলো প্রাইম সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে হতো! কাজটি কী সহজ ?

শখের গণিতবিদ ফার্মা উৎপাদকগুলো বের করার একটা সহজ নিয়ম ব্যবহার করতেন। নিয়মটা জানা থাকলে চট করে একটা সংখ্যার উৎপাদক বের করে ফেলা যায়, উৎপাদক দুটো যদি কাছাকাছি হয় তাহলে তো কথাই নেই, রীতিমতো চোখের পলকে বের হয়ে যাবে, কাছাকাছি না হলে একটু বেশি সময় নেবে এই পার্থক্য।

ধরা যাক, m এবং n দুটো প্রাইম সংখ্যার গুণফল হচ্ছে N, অর্থাৎ

$$N = mn$$

আমরা লিখতে পারি $p = (m + n)/2$ এবং $q = (m - n)/2$

কাজেই $m = p + q$

$$n = p - q$$

কাজেই $N = p^2 - q^2$

কাজেই $p^2 - N = q^2$

অর্থাৎ যদি কোনো সংখ্যার বর্গ (p^2) থেকে N বিয়োগ করলে আরেকটি সংখ্যার বর্গ (q^2) পাওয়া যায় তাহলেই আমাদের কাজ শেষ!

এবারে আমরা আমাদের উদাহরণটি নেই, সংখ্যাটি ছিল 2701; আমাদের একটা সংখ্যা থেকে শুরু করতে হবে, সেটা কত দিয়ে শুরু করব? অবশ্যই সবচেয়ে বুদ্ধিমানের কাজ হবে $\sqrt{2790}$-এর কাছাকাছি সংখ্যা দিয়ে অর্থাৎ 52 দিয়ে। আমরা একটা ক্যালকুলেটর নিয়ে শুরু করতে পারি—

$52^2 - 2701 = 3$ বর্গ নয়, কাজেই পরেরটি

$53^2 - 2701 = 108$ বর্গ নয়, কাজেই পরেরটি

$54^2 - 2701 = 215$ বর্গ নয়, কাজেই পরেরটি

$55^2 - 2701 = 324 = 18^2$ পেয়ে গেছি

প্রথম তিনটির জন্যে বিয়োগফল কোনো পূর্ণ সংখ্যার বর্গ ছিল না, চতুর্থটির জন্যে এটি 18-এর বর্গ। কাজেই সংখ্যা দুটো হচ্ছে—

$$55 + 18 = 73 \text{ এবং } 55 - 18 = 37$$

দ্বিতীয় উদাহরণ 6497 দিয়ে পরীক্ষা করতে পারি। যেহেতু $\sqrt{6497}$-এর কাছাকাছি সংখ্যা 81 তাই লিখতে পারি,

$$81^2 - 6497 = 64$$

64 হচ্ছে 8-এর বর্গ— একেবারে প্রথমবারেই উত্তরটা পেয়ে গেছি! সংখ্যা দুটো $81 + 8 = 89$ এবং $81 - 8 = 73$; হাতের কাছে একটা ক্যালকুলেটর থাকলে যে কেউ নিচের সংখ্যাগুলোর উৎপাদক দুটো বের করার চেষ্টা করতে পার :

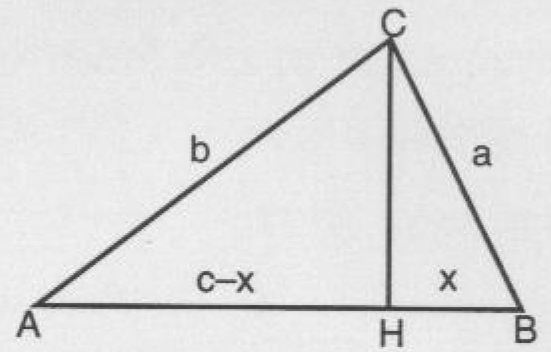
8989, 6497, 5767

দ্বিতীয় পর্ব

একশ মজার গাণিতিক সমস্যা

1. পিথাগোরাসের থিওরেম সবাই জানে। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ হচ্ছে অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান। অর্থাৎ নিচের ABC ত্রিভুজটির $\angle ACB$ কোণটি এক সমকোণ হলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$. পিথাগোরাসের থিওরেমের একটি খুব সহজ প্রমাণ আছে, সেটা দেখানোর জন্যে C বিন্দু থেকে AB-এর উপরে CH লম্ব টানা হয়েছে। ধরে নেয়া যাক, $BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$ আমরা $BH = x$ লিখে বলতে পারি $AH = c - x$

যেহেতু ABC, AHC এবং CHB সর্বসম ত্রিভুজ এখন দুই লাইনে পিথাগোরাসের ত্রিভুজটি প্রমাণ করা যেতে পারে। কে করবে ?



2. আমরা জানি $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

এখানে y-কে –y দিয়ে পাল্টে দিলে হয়

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

একইভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

কিংবা $x^7+y^7 = (x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$

এভাবে আমরা $x^9 + y^9$ বা $x^{11} + y^{11}$ বা $x^n + y^n$ (যখন n বেজোড় সংখ্যা) এর উৎপাদক লিখতে পারি।

এই তথ্যগুলো ব্যবহার করে—

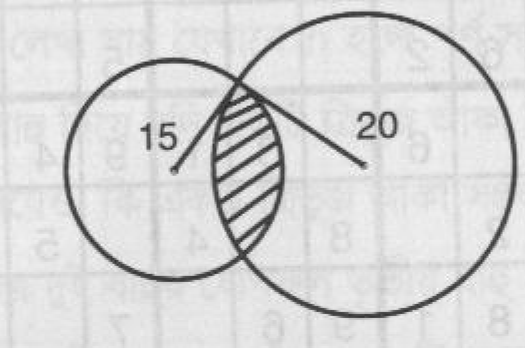
$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

3. $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ সমীকরণটিতে কতগুলো সমাধান আছে যেখানে x নেগেটিভ ?

4. $\sqrt{-1}$ কে লেখা হয় i এবং যে সংখ্যায় i থাকে তাকে বলে কমপ্লেক্স সংখ্যা। নিচের কমপ্লেক্স সংখ্যাটিকে সহজ করে লিখ—

$$\frac{27 + 8i}{3 + 2i^3}$$

5. দুটি বৃত্ত যাদের ব্যসার্ধ যথাক্রমে 15 এবং 20 পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করেছে। বৃত্তের যে অংশটুকু পরস্পরকে ছেদ করে নি (দাগবিহীন অংশ) তাদের পার্থক্য কত ?



ধরে নাও পরস্পর ছেদ করা অংশ x

6. n সংখ্যক খেলোয়াড় দাবা খেলবে, খেলায় হারলেই সে প্রতিযোগিতা থেকে বাদ পড়ে যাবে। চ্যাম্পিয়ান নির্ধারণ করার জন্যে মোট কতগুলো খেলা হতে হবে ?

7. ফ্যাক্টরিয়াল n বা n! হচ্ছে $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots (n - 1) \times n$ এখন এই ধারাটির যোগফল s বের কর :

$$s = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + \ldots n(n!)$$

সাহায্য : ধারাটির সাথে $1! + 2! + 3! + 4! \ldots\ldots 3!$ যোগ কর।

8. দেখাও যে, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ সমীকরণটির a, b, c, d এবং e-এর জন্যে যদি 1, – 2, 3, 4 এবং – 6 এই সংখ্যাগুলো থেকে যেভাবে খুশি বেছে নেয়া হয় তাহলে সবসময়েই একটা rational root পাওয়া যাবে।

সাহায্য : x-এর জন্যে একটা rational root ধরে নিলে কেমন হয় ?

9. 0 থেকে 9 পর্যন্ত দশটি অঙ্ক ব্যবহার করে এই যোগ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

$$\begin{array}{r} 3\,x\,x \\ x\,x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x \end{array}$$

10. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচে 9টি সারিতে এবং 3×3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

			9	5			9	
7			6				1	4
8	6	2				5		
		6		3	1	9	4	
	2		8		4		5	
	8	1	9	6		7		
		5				3	2	9
3	4				2			7
	9			1	6			

11. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, তাহলে নিশ্চয়ই

$f(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$

এখন $f(x^5)$-কে $f(x)$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সাহায্য : $(x - 1)f(x) = x^5 - 1$

12. যদি a, b, c একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু হয় এবং $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ হয় তাহলে দেখাও ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

13. $\left(\dfrac{1\cdot2\cdot4 + 2\cdot4\cdot8 + 3\cdot6\cdot12 + 4\cdot8\cdot16 + \ldots}{1\cdot3\cdot9 + 2\cdot6\cdot18 + 3\cdot9\cdot27 + 4\cdot12.36 + \ldots}\right)^{\frac{1}{3}}$ সমান কত?

14. যদি $\dfrac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots(2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots(2n)^3} = \dfrac{199}{242}$ হয় তাহলে n সমাস কত?

সাহায্য : যদি $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ হয় তাহলে $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$

এবং $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

15. প্রমাণ কর একটি ত্রিভুজের কোনো কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে সেটি বিপরীত বাহুকে তার দুই বাহুর অনুপাতে দ্বিখণ্ডিত করে।

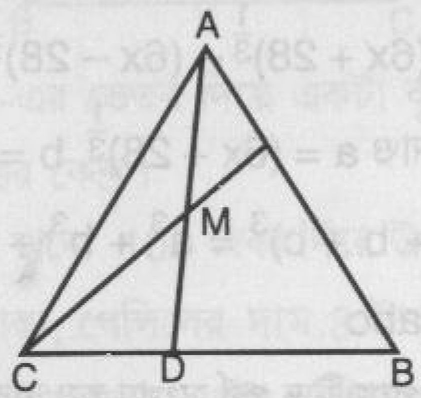
16. প্রমাণ কর : $x^2 - xy^2 = 17$-এর কোনো পূর্ণ সংখ্যা সমাধান নেই।

সাহায্য : যে-কোনো পূর্ণ সংখ্যাকে ইচ্ছে করলে 3n, 3n + 1 কিংবা 3n – 1 হিসেবে লেখা যায় যেখানে n হচ্ছে পূর্ণ সংখ্যা

17. a, b, c তিনটি বাহু দিয়ে যদি একটি ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হয় তাহলে $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{c}$ দিয়েও কি একটি ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হবে?

সাহায্য : ত্রিভুজের দুই বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু থেকে বেশি।

18. ABC ত্রিভুজের C বিন্দু থেকে আঁকা একটি রেখা যদি A বিন্দু থেকে আঁকা মধ্যমা AD-কে M বিন্দুতে সমান দুইভাগে ভাগ করে তাহলে সেটি AB রেখাকে 1:2 অনুপাতে ভাগ করবে।



সাহায্য : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি পরস্পরকে 1:2 অনুপাতে ভাগ করে।

19. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটি অঙ্ক ব্যবহার করে এই যোগ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

$$\begin{array}{r} x\,3\,x \\ x\,x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x \end{array}$$

20. এই ছকটির বাম থেকে ডানে 9টি এবং উপর থেকে নিচে 9টি সারিতে এবং 3×3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

3			1		6			
8			4	9	5			
1				2		5	6	8
		8	2		3		4	
6						2		7
	3		6		9	8		
4	7	5		3				1
			5	1	8			4
			7		4			2

21. $\frac{1}{49}$ = এর বারবার ঘুরে আসা দশমিকের অংশগুলো কী ?

সাহায্য : আগে $\frac{1}{7}$-এর ঘুরে আসা অংশটুকু বের কর।

22. সমাধান কর : $(6x+28)^{\frac{1}{3}} - (6x-28)^{\frac{1}{3}} = 2$

সাহায্য : ধরে নাও $a = (6x+28)^{\frac{1}{3}}$, $b = -(6x-28)^{\frac{1}{3}}$ এবং $c = -(2)^{\frac{1}{3}}$ এবং $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab + bc + ca) - 3abc$

23. m এবং n যদি পজেটিভ পূর্ণ সংখ্যা হয় এবং $n>2$ তাহলে দেখাও $2^m + 1$ কে কখনোই $2^n - 1$ দিয়ে ভাগ করা যাবে না।

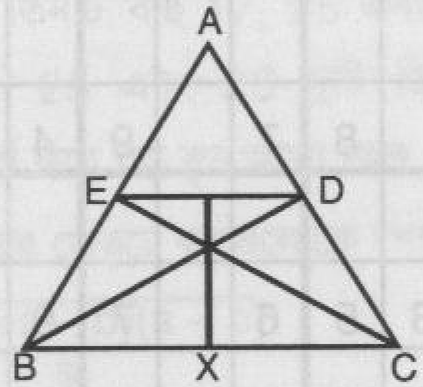
সাহায্য : সংখ্যাগুলোকে বাইনারীতে প্রকাশ করে চেষ্টা কর।

24. এই সমীকরণগুলো সমাধান করে x, y, z, u এবং v-এর মান বের কর :

$$x + y + z + u = 5$$
$$y + z + u + v = 1$$
$$z + u + v + x = 2$$
$$u + v + x + y = 0$$
$$v + x + y + z = 4$$

সাহায্য : প্রত্যেকটি variable একটি সমীকরণে অনুপস্থিত।

25. ABC একটি ত্রিভুজ BD এবং CE ত্রিভুজের B এবং C বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর ওপর আঁকা লম্ব। প্রমাণ কর DE-এর মধ্যবিন্দু দিয়ে আঁকা লম্ব দ্বিখণ্ডক BC বাহুকে x বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



সাহায্য : BEDC-এর ভেতর দিয়ে একটা বৃত্ত আঁকা সম্ভব। BC-এর মধ্যবিন্দু সেই বৃত্তের কেন্দ্র।

26. 100 জন মানুষের জন্যে 100 টাকা দিয়ে উপহার কিনতে হবে, একটা খাতার দাম 10 টাকা, পেন্সিলের দাম 3 টাকা এবং লজেন্সের দাম $\frac{1}{2}$ টাকা, কমপক্ষে একটা খাতা, একটা পেন্সিল আর একটা লজেন্স কিনতে হলে কোনটা কতগুলো কিনতে হবে ?

27. পরপর চারটি বেজোড় সংখ্যার গুণফল যদি একটি বর্গ সংখ্যা হয় তাহলে বেজোড় সংখ্যাগুলো কী কী ?

28. প্রমাণ কর $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)$

সাহায্য : arithmetic গড় geometric গড় থেকে বড় হয়।

29. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটি অঙ্ক ব্যবহার করে এই যোগ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

$$\begin{array}{r} x\,x\,x \\ x\,x\,x \\ \hline x\,3\,x\,x \end{array}$$

30. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচ 9টি সারিতে এবং 3×3 মোটা 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

		9	5	1	4	7		
	7	4	3		6	1	9	
7		2	4		3	8		1
4								9
5		8	7		9	4		6
	8	5	6		7	9	2	
		7	1	4	5	6		

31. এই অসীম সংখ্যক পদের গুণফল বের কর ?

$3^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{9}}, 27^{\frac{1}{27}} \ldots (3^n)^{3^{1/n}}$

সাহায্য : প্রত্যেকটা পদকে 3-এর পাওয়ায় হিসেবে লেখা।

32. যদি $x+y = 1$, $kx + y = 2$, $x + ky = 4$ হয় তাহলে k সমান কত ?

33. যদি $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ এবং $a^2 = 2(b + c)$ হয় তাহলে a, b এবং c-এর মান পূর্ণ সংখ্যায় বের কর ?

সাহায্য : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

34. $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ সমান কত ?

সাহায্য : উপরে নিচে $2^{\frac{3}{2}}$ দিয়ে গুণ কর।

35. প্রমাণ কর যে-কোনো মূলদ (rational) সংখ্যাকে হারমোনিক সিরিজের $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right)$ আলাদা আলাদা পদের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়।

সাহায্য : $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

36. কোনটি বড় ? $x^2 - y^2 : x - y$ নাকি $x^2 + y^2 : x + y$?

37. যদি $x<1$ হয় তাহলে $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots$ সমান কত ?

38. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু 17, 25 এবং 26 অন্য একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু17, 25 এবং 28 দুটি ত্রিভুজের কোনটির ভেতরে বাহুগুলোকে স্পর্শ করে বড় বৃত্ত আঁকা সম্ভব ?

সাহায্য : ত্রিভুজের ভেতরে বাহুগুলোকে স্পর্শ করে আঁকা বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

যেখানে $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

39. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই যোগ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

$$\begin{array}{r} x\,x\,x \\ x\,x\,x \\ \hline x\,x\,3\,x \end{array}$$

40. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচ 9টি এবং 3×3 মোট 9টি ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

		9	6					
								7
			7	1			2	8
		5			9	7	4	
8				7				1
	2	7	4			3		
2	7			8	6			
3								
					5	4		

41. যদি বেজোড় সংখ্যাগুলোকে 1, (3, 5), (3, 5, 7), (9, 11, 13, 15)... এভাবে সাজানো হয় তাহলে nতম ধাপের পদগুলোর যোগফল কত হবে ?

সাহায্য : $1 + 3 + 5 + 7 + ...(2n + 1) = n^2$

42. সমাধান কর :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xy + yz + zx &= 11 \\ xyz &= 6 \end{aligned}$$

43. একজন শিক্ষক তার ছাত্রদের জন্যে 216 টাকা দিয়ে বেশ কিছু কলম কিনেছেন। যদি কলমের দাম এক টাকা করে কম হতো তাহলে আরো তিনটি বেশি কলম কিনতে পারতেন। শিক্ষক কতগুলো কলম কিনেছিলেন ?

44. একজন শিক্ষক তার ছাত্রদের বেশ কয়েকটি পরীক্ষা নিয়ে পরীক্ষার নম্বরগুলো গড় করে ফল প্রকাশ করেন। একজন ছাত্র আবিষ্কার করল শেষ পরীক্ষাটিতে 97 পেলে তার গড় হবে 90 এবং যদি 73 পায় তাহলে তার গড় হবে 87, শিক্ষক কতগুলো পরীক্ষা নিয়েছিলেন ?

45. 1108, 1453, 1844 এবং 2281-কে কোন সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিলে একই ভাগশেষ পাওয়া যায় ?

46. $x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{9}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{9}}$ সমাধান কর ?

47. কোনটি বড় : $\sqrt[8]{8!}$ নাকি $\sqrt[9]{9!}$?

সাহায্য : $(n + 1)^n > n!$

48. $\sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{14 + 10\sqrt[3]{17 + 18\sqrt[3]{\ldots}}}}$ সমান কত ?

49. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই যোগ অঙ্কটি সম্পুর্ণ কর।

$$\begin{array}{r} 6\,x\,x \\ x\,x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x \end{array}$$

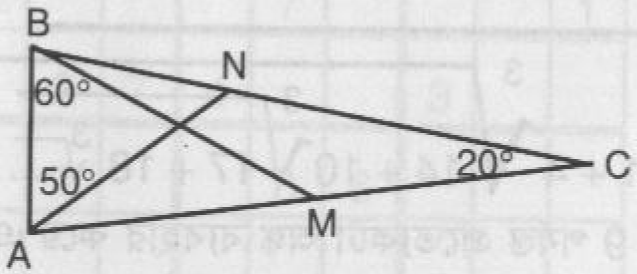
50. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচে 9টি সারিতে এবং 3×3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

		5	4		7	1		
	9						4	
4			2		8			3
	1		8	4	9		6	
7								2
	8		7	2	6		1	
9			6		4			8
	5						3	
		2	5		1	6		

51. সমাধান কর :

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$$

52. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যেখানে AC = BC এবং C কোণটি 20° M এবং N বিন্দু দুটি এমনভাবে নেয়া হয়েছে যেন $\angle ABM = 60°$ এবং $\angle BAN = 50°$ দেখাও যে $\angle BMN = 30°$ ।



সাহায্য : AB-এর সমান্তরাল MR রেখা আঁক যেটি BC বাহুকে R বিন্দুতে ছেদ করে। AR যোগ কর যেটা BM রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করবে। DN যোগ কর।

53. সমাধান কর : $x^3 + 1 = y^2$ যেখানে x এবং y পূর্ণ সংখ্যা।

54. $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$-কে একটি ধারায় প্রকাশ কর।

সাহায্য : $(1-x^{16}) = (1-x^8)(1+x^8)$

$= (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)$

$= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

এবং : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

55. 316-কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন এক অংশ 2 দিয়ে অন্য অংশ 13 দিয়ে ভাগ করা যায়।

56. একজন পোস্ট অফিসে গিয়েছে 100 টাকার স্ট্যাম্প কিনতে। সে যতগুলো 2 টাকার স্ট্যাম্প কিনেছে তার দশগুণ একটাকার স্ট্যাম্প কিনেছে, বাকি টাকা দিয়ে পাঁচ টাকার স্ট্যাম্প কিনেছে। সে কোন স্ট্যাম্প কতগুলো কিনেছে ?

57. এক ধরনের খেলায় একজন মনে মনে একটি সংখ্যা ধরে নেয় অন্যজন 20টি প্রশ্ন করে সংখ্যাটি বের করার চেষ্টা করে। প্রশ্নটি এমনভাবে করতে হবে যেন তার উত্তরটি "হ্যাঁ' বা "না" দিয়ে করা সম্ভব। এই খেলায় 20 প্রশ্নে সংখ্যাটি বের করতে হলে সবচেয়ে বড় সংখ্যা কত ধরা যেতে পারে।

58. $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots 2^n$ সমান কত ?

সাহায্য : 2^n-কে বাইনারী সংখ্যা হিসেবে প্রকাশ কর।

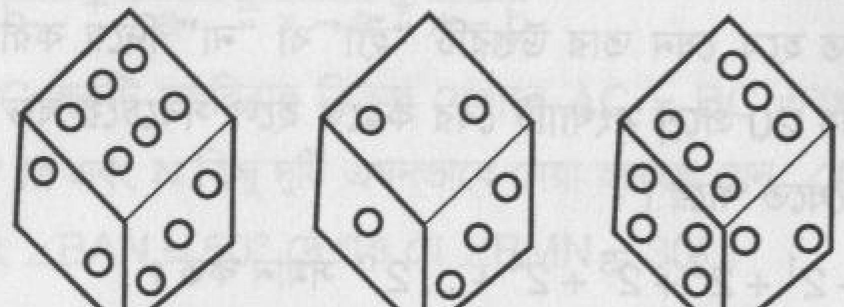
59. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই গুণ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

```
   x x 2
     x x
 x x x x x
```

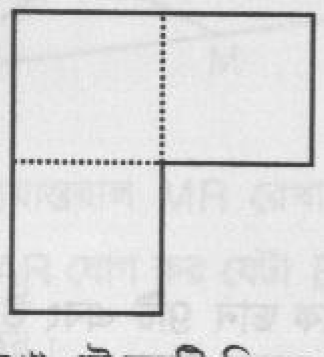
60. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচে 9টি সারিতে এবং 3 × 3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

		9	1					
			8			7		5
	2	5		4			8	
		3	5			6		9
6								7
9		1			4	8		
	6			5		2	9	
3		4			6			
					8	3		

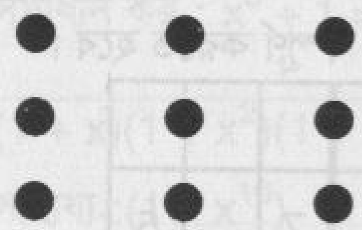
61. একটা ছক্কা তিনটি ভিন্ন ভিন্নভাবে দেখা যাচ্ছে, 1-এর উল্টোপাশে কী রয়েছে?



62. ছবিতে দেখানো একটি ক্ষেত্রকে এমনভাবে সমান চারভাগে ভাগ করতে হবে যেন প্রত্যেকটি অংশ সমান এবং একটি আকৃতির হয়।



63. চারটি পর পর সরলরেখা এই নয়টি বিন্দুর ওপর দিয়ে আঁকতে হবে।

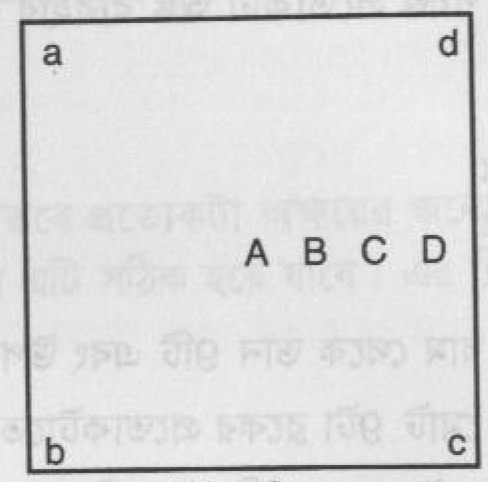


64. নিচের যোগগুলোর যোগফল ভিন্ন। যে-কোনো একটি সংখ্যা একটি যোগ থেকে সরিয়ে অন্য কোথাও নিয়ে তিনটি যোগফল সমান করতে হবে।

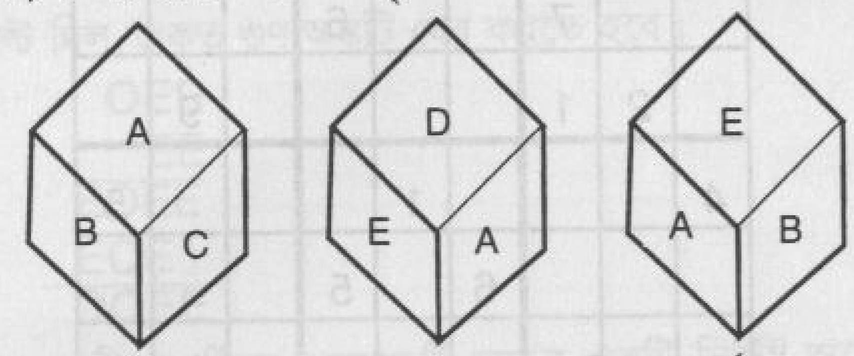
1	4	7
2	5	8
3	6	9
6	15	24

65. A, B, C এবং D চারটি বাসা এবং a, b, c এবং d চারটি কূয়া একটা বর্গাকৃতি জমির মাঝে তৈরি করা হয়েছে। এই জমিটি চার ভাইয়ের মাঝে এমনভাবে ভাগ করে দিতে হবে যেন ভাইয়েরা A, B, C এবং D

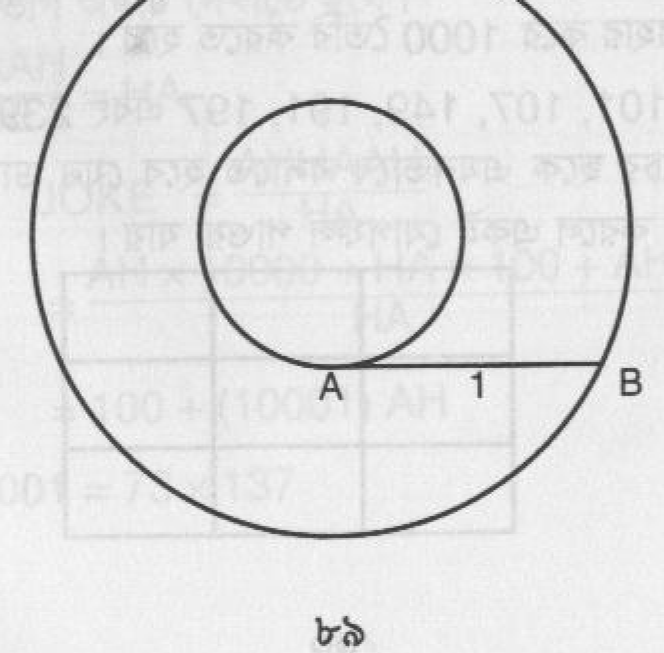
বাসার সাথে সাথে যথাক্রমে a, b, c এবং d কূয়াটি পায়, তাদের জমির আকৃতিও হতে হবে সমান এবং একরকম।



66. একটি কিউবের পৃষ্ঠদেশগুলো ভিন্ন ভিন্ন রং (A, B, C, D এবং E) দেয়া হয়েছে। কিউবটি তিনটি ভিন্ন ভিন্ন দিক থেকে এরকম দেখা গেলে, 1 নং ছবিতে নিচের পৃষ্ঠের রং কী?



67. AB রেখাটি A বিন্দুতে ভেতরের বৃত্তটির স্পর্শক (tanget) এবং বাইরের বৃত্তটিকে B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। দুটি বৃত্তই 'একই কেন্দ্র ব্যবহার করে আঁকা'। যদি AB রেখার দৈর্ঘ্য 1 হয় তাহলে দুটি বৃত্তের মাঝখানের অংশটির ক্ষেত্রফল কত?



68. 7টি 4 ব্যবহার করে 100 তৈরি করতে হবে।

69. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই গুণ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

```
   x x x
     x x
3 x x x x
```

70. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচে 9টি সারিতে এবং 3×3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 8 পযন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

	8			3				7
		7			6			
	2	1					9	
4				1				5
			6		5			
9				7				2
	3					2	1	
			5					
7				9			8	

71. 8টি 8 ব্যবহার করে 1000 তৈরি করতে হবে।

72. 17, 59, 101, 107, 149, 191, 197 এবং 239 এই নয়টি প্রাইম সংখ্যা নিচের ছকে এমনভাবে বসাতে হবে যেন ডানে-বামে, উপরে-নিচে যোগ করলে একই যোগফল পাওয়া যায়।

73. নিচের যোগ অংশটি সঠিক তবে প্রত্যেকটি অক্ষরের জন্যে আলাদা আলাদা একটি অঙ্ক এমনভাবে বসাও যেন যোগটি সঠিক থাকে।

```
  ONE
 FOUR
 FIVE
```

74. নিচের যোগটি ভুল তবে প্রত্যেকটা অক্ষরের জন্যে একটা নির্দিষ্ট অঙ্ক বসানো যায় তাহলে এটি সঠিক হয়ে যাবে। এর তিনটি সমাধান হতে পারে—

```
 SEVEN
 EIGHT
TWELVE
```

75. একজন একটা গুণ অঙ্ক শেষ করে প্রত্যেকটা জোড় অঙ্ককে E(EVEN-এর আদ্যক্ষর) এবং বেজোড় অঙ্ককে O(ODD-এর আদ্যক্ষর) দিয়ে পাল্টে দিল, প্রকৃত গুণ অঙ্কটি বের করতে হবে।

```
  OEE
   EE
 EOEE
 EOE
 OOEE
```

76. নিচের সমীকরণটিতে প্রত্যেকটি অক্ষর একটি নির্দিষ্ট অঙ্কের পরিবর্তে লেখা হয়েছে। অঙ্কগুলো বের করতে হবে।

7(FRYHAM) = 6 (HAMFRY)

সাহায্য : লিখ FRY = x এবং HAM = y

77. নিচের কথাটিকে প্রত্যেকটা অক্ষর একটি সুনির্দিষ্ট অঙ্ক, অঙ্কগুলো বের করে এই ভাগ অঙ্কটি দেখাতে হবে।

$$\frac{AHHAAH}{JOKE} = HA$$

সাহায্য : $JOKE = \frac{AHHAAH}{HA}$

$$= \frac{AH \times 10000 + HA \times 100 + AH}{HA}$$

$$= 100 + (10001)\ AH$$

এবং $10001 = 73 \times 137$

78. নিচের a থেকে i পর্যন্ত অক্ষরগুলো একটি করে 1 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কের জন্যে নির্দিষ্ট করা আছে, অঙ্কগুলো বের করে সমাধান করতে হবে। এর একাধিক সমাধান আছে।

$$\begin{array}{r} abc \\ +\,def \\ \hline ghi \end{array} \qquad \begin{array}{r} adg \\ +\,beh \\ \hline cfi \end{array}$$

79. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই গুণ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

$$\begin{array}{r} x\,x\,x \\ \times\,4 \\ \hline x\,x\,x\,x\,x \end{array}$$

80. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচে 9টি সারিতে এবং 3×3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

					2		4	
7							1	
		5		1				
	2						3	
9				8				7
	4						6	
				9	8			
	3							1
	6		4					

81. একটি সমবাহু ত্রিভুজ আর একটি সম-ষড়ভুজের পরিসীমা সমান, দুটোর ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

82. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ সমান কত?

সাহায্য : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = b$ এবং $x = a + b$ লিখে শুরু করো।

83. $a^{15} + 1$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

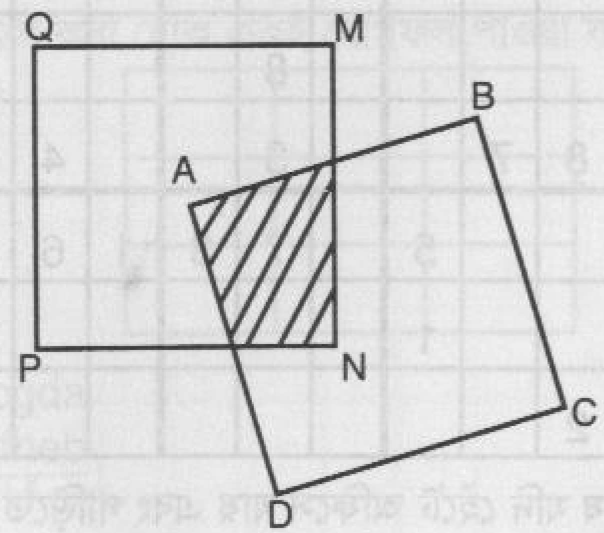
সাহায্য : $(a^{2n+1} + 1) = (a + 1)(2^{2n} - a^{2n-1} + a_{2n} - 2 ... - a + 1)$

84. যদি 20-এর $\frac{1}{4}$ হয় 6 তাহলে 10-এর $\frac{1}{5}$ কত?

সাহায্য : এটি নিশ্চয়ই দশমিক সংখ্যা নয়!

85. যদি $f(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ হয় তাহলে দেখাও $f(2i)$-কে 9 দিয়ে ভাগ করা যায়।

86. ABCD বর্গের একটি কোণ QMNP বর্গের কেন্দ্রে এমনভাবে বসানো হয়েছে যেন AB বাহু MN বাহুকে এক-তৃতীয়াংশে ভাগ করে। AB = MN হলে দুটি বর্গক্ষেত্রের মাঝখানের অংশটুকু (দাগ দেয়া) কত?



87. সমাধান কর : $a^3 + b^4 = c^5$

88. বাবার বয়স একটি বর্গ সংখ্যা, এই সংখ্যার অঙ্কগুলো গুণ করলে মায়ের বয়স এবং যোগ করলে তার মেয়ের বয়স পাওয়া যায়। মায়ের বয়সের অঙ্কগুলো যোগ করলে ছেলের বয়স পাওয়া যায়। কার বয়স কত ?

সাহায্য : দেশের আইন মেনে বাবা মা বিয়ে করেছিল।

89. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই গুণ অঙ্কটি সম্পূর্ণ কর।

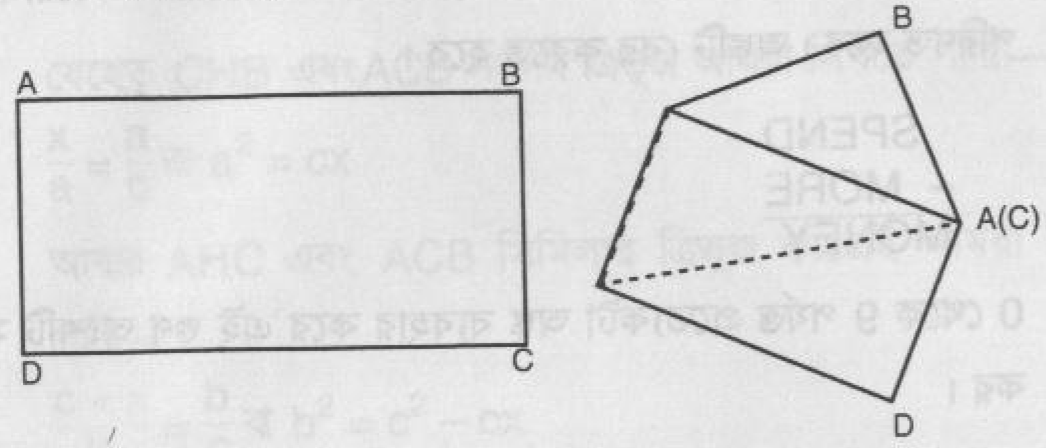
$$\begin{array}{r} 5\,x\,x \\ x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x\,x \end{array}$$

90. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচ 9টি সারিতে এবং 3 × 3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পযন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

								4
1						2		
	6	4	9	1		7		
	1			6			5	7
				8				
8	7			3			4	
		5		7	3	1	6	
		1						9
2								

91. একজন মানুষ যদি হেঁটে অফিসে যায় এবং গাড়িতে ফিরে আসে তাহলে তার সময় লাগে দেড়ঘণ্টা। যদি গাড়িতে যায় এবং গাড়িতে ফিরে আসে তাহলে সময় লাগে আধাঘণ্টা। যদি হেঁটে অফিসে যায় এবং হেঁটে ফিরে আসে তাহলে তার কত সময় লাগবে ?

92. ABCD একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজ, A বিন্দু C বিন্দুর উপরে এনে ভাঁজ করা হলো, ভাঁজটির দৈর্ঘ্য কত ?



93. যদি P_1 এবং P_2 পরপর প্রাইম সংখ্যা হয় তাহলে দেখাও q একটি যৌগিক সংখ্যা যেখানে $P_1 + P_2 = 2q$

94. দেখাও $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^{2n}}{2n!} = 0$-এর কোনো real root নেই।

সাহায্য : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

95. 16টি 4 ব্যবহার করে 1000 তৈরি করতে হবে।

96. 1, 2, 3, 10, 11, 12, 19, 20 এবং 21; এই 9টি সংখ্যা নিজের ছকে এমনভাবে বসাতে হবে যেন উপরে-নিচে, ডানে-বামে বা কোণাকোণি যেভাবেই যোগ করা হোক একই যোগফল পাওয়া যায়।

97.

$$\begin{array}{r} abcgda \\ +\ defheb \\ \hline g\,h\,i\,i\,f\,c \end{array}$$

এখানে a থেকে i পর্যন্ত অক্ষরগুলোর জন্যে 1 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলো নির্দিষ্ট করা আছে, অঙ্কগুলো বের করতে হবে।

98. এই বাক্যটি আসলে একটি বিয়োগ অঙ্ক। প্রত্যেকটা অক্ষরের জন্যে একটা নির্দিষ্ট সংখ্যা ব্যবহার করা হলে এটি একটি সঠিক বিয়োগ অঙ্কে পরিণত হবে। অঙ্কটি বের করতে হবে।

```
  SPEND
– MORE
 MONEY
```

99. 0 থেকে 9 পর্যন্ত প্রত্যেকটা অঙ্ক ব্যবহার করে এই গুণ অংশটি সম্পূর্ণ কর।

```
  x x 6
    x x
x x x x x
```

100. এই ছকটির বাম থেকে ডান 9টি এবং উপর থেকে নিচ 9টি সারিতে এবং 3×3 মোট 9টা ব্লকের প্রত্যেকটাতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত আলাদা আলাদা প্রত্যেকটা সংখ্যা বসিয়ে ছকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

		3		8				
8	4			6		7		
			7		3			9
							7	2
3		7				4		6
5	8							
6			2		1			
		8		3			1	4
				5		3		

সমাধান

1. যেহেতু CHB এবংACB সর্বসম ত্রিভুজ আমরা লিখতে পারি—

$\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$ বা $a^2 = cx$

আবার AHC এবং ACB সিমিলার ত্রিভুজ কাজেই আমরা লিখতে পারি—

$\frac{c-x}{b} = \frac{b}{c}$ বা $b^2 = c^2 - cx$

এখন দুটি যোগ করলেই পাই $a^2 + b^2 = c^2$

2. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

এখানে x-কে x^3 এবং y-কে y^3 দিয়ে পাল্টে দিলে হয়,

$x^9 + y^9 = (x^3 + y^3)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

অথবা, $x^9 + y^9 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

আবার আমরা লিখতে পরি,

$x^9 + y^9 = (x + y)(x^3 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - y^7)$

কাজেই ওপরের দুটো তুলনা করলেই পাওয়া যাবে উৎপাদক দুটো হচ্ছে—

$(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

3. সমীকরণটিকে এভাবে লেখা যায় :

$(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x$

x যদি নেগেটিভ হয় তাহলে বাম অংশ হবে পজেটিভ এবং ডান অংশ হবে নেগেটিভ, যেটা সম্ভব নয়। কাজেই একটাও সমাধান নেই যেখানে x নেগেটিভ হওয়া সম্ভব।

4. যেহেতু $i^2 = -1$ কাজেই $i^3 = -i$

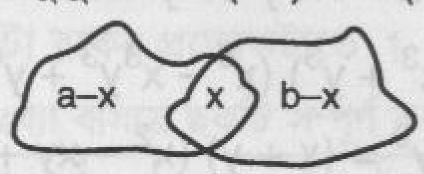
অর্থাৎ $\frac{27+8i}{3-2i^3} = \frac{27+8i}{3-2i}$

ওপরের নিচে $3 + 2i$ দিয়ে গুণ করলে পাই,

$$\frac{27+8i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(27+8i)(3+2i)}{9+4} = \frac{65+678i}{13} = 5 + 6i$$

5. দুটি যে-কোনো ধরনের ক্ষেত্র যাদের ক্ষেত্রফল a এবং b, (বৃত্ত হতে হবে না, যা কিছু হতে পারে) যদি পরস্পরকে ছেদ করে যার পরিমাণ x তাহলে তাদের যে অংশটুকু ছেদ করে যা পরিমাণ x তাহলে তাদের যে অংশটুকু ছেদ করে নি তার পরিমাণ হবে $a - x$ এবং $b - x$. কাজেই তাদের পার্থক্য হচ্ছে $(a - x) - (b - x) = a - b$.

কাজেই এক্ষেত্রে পার্থক্যটুকু হচ্ছে $\pi(20)^2 - \pi(15)^2 = 175\pi$



6. একজন চ্যাম্পিয়ান খুঁজে বের করার জন্য $n - 1$ খেলোয়ারকে হেরে প্রতিযোগিতা থেকে বাদ পড়তে হবে। হেরে যাওয়ার জন্যে খেলতে হয় মাত্র একবার, কাজেই মোট খেলার সংখ্যা $n - 1$.

7. $s = 1(1!) + 2(2i) + 3(3i) + 4(4i) + \dots n(ni)$

$s + (1! + 2! + 3! + 4! + \dots ni) = 2(1i) + 3(2i) + 4(3!) + \dots (n + 1)(n!)$

$s + (1! + 2! + 3! + 4! \dots n!) = 2! + 3! + 4! + 5! + \dots n! + (n + 1)!$

$s + 1! = (n + 1)!$

কাজেই $s = (n + 1)! - 1$

8. $x = 1$ ধরে নিলে আমরা পাই,

$a + b + c + d + e = 0$

এখানে এই Coefficent-গুলো দেয়া সংখ্যাগুলো থেকে বেছে নিলে সবসময়েরই এটা শূন্য হবে। অর্থাৎ Coefficient-গুলো যেভাবেই বেছে নেয়া হোক $(x-1)$ হবে একটি উৎপাদক এবং $x = 1$ একটি rational root.

9.
$$\begin{array}{r} 347 \\ 859 \\ \hline 1206 \end{array}$$

10.

1	3	4	7	5	3	2	9	6
7	5	9	6	2	3	8	1	4
8	6	2	1	4	9	5	7	3
5	7	6	2	3	1	9	4	8
9	2	3	8	7	4	6	5	1
4	8	1	9	6	5	7	3	2
6	1	5	4	8	7	3	2	9
3	4	8	5	9	2	1	6	7
2	9	7	3	1	6	4	8	5

11. $f(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$

$f(x^5) = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5$

যেহেতু $x^5 - 1 = (x - 1)f(x)$

কাজেই $(x^{20} - 1)$, $(x^{15} - 1)$, $(x^{10} - 1)$, $(x^5 - 1)$ প্রত্যেকটিই $f(x)$ দিয়ে বিভাজ্য। কাজেই ভাগশেষ হচ্ছে 5.

12. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

অর্থাৎ $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$

অর্থাৎ $a = b = c$

13. $\left[\dfrac{1\cdot2\cdot4(1 + 2\cdot2\cdot2 + 3\cdot3\cdot3 + 4\cdot4\cdot4...)}{1\cdot3\cdot9\,(1 + 2\cdot2\cdot2 + 3\cdot3\cdot3 + 4\cdot4\cdot4...)}\right]^{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3}$

14. \f([$1^3+3^3+5^3$ +...$(2n-1)^3$] + [$2^3 + 4^3 + 6^3$ +...$(2n)^3$],2^3(1^3 + $2^3 + 3^3$ + ...n^3)) = $\dfrac{199 + 242}{242}$

অথবা, $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ...(2n)^3}{8(1^3 + 2^3 + 3^3 + ...n^3)} = \dfrac{441}{242}$

অথবা, $\dfrac{(2n)^2(2n+1)^2/4}{8n^2(n+1)^2/4} = \dfrac{(21)^2}{2(11)^2}$

অর্থাৎ $\dfrac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} = \dfrac{(21)^2}{(11)^2}$ অর্থাৎ $n = 10$

15. [redacted]

ABC ত্রিভুজের C কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে আঁকা রেখাটি D বিন্দুতে ছেদ করে AB রেখাটিকে m এবং n অংশে দ্বিখণ্ডিত করেছে। ত্রিভুজ BDC এবং ADC-এর উচ্চতা সমান কাজেই \f(ΔBDC,ΔADC) = \f(m,n)

আবার D বিন্দু থেকে AC ও BC বাহুতে DE এবং DF লম্ব আঁকা হয়েছে। DEC এবং DFC ত্রিভুজ দুটি তুলনা করে দেখা যায় DE = DF,

কাজেই \f(ΔBDC,ΔADC) = \f(a,b) অর্থাৎ \f(m,n) = \f(a,b)

16. ধরা যাক $x = 3n$ তাহলে সমীকরণটি $3(3n^2 - y^2) = 17$

যদি $x = 3n + 1$ হয় তাহলে সমীকরণটি $3(3n^2 + 2n - y^2) = 16$

যদি $x = 3n - 1$ হয় তাহলে সমীকরণটি $3(3n^3 - 2n - y^2) = 16$

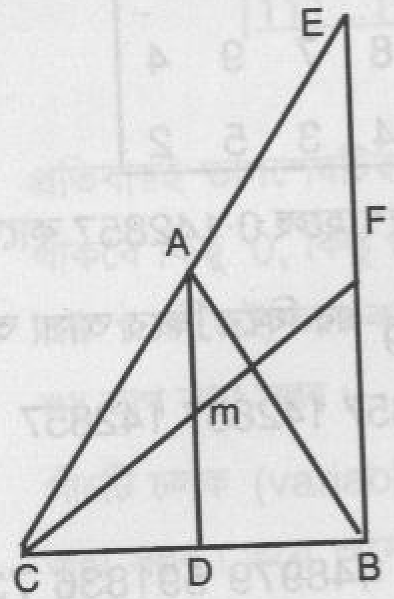
কোনো ক্ষেত্রেই ডানপাশের 17 বা 16-কে 3 দিয়ে ভাগ করা যায় না কাজেই এর সমাধান পূর্ণ সংখ্যায় হতে পারবে না।

17. $(b+c+2\sqrt{bc}) > (b+c) > a > |b-c| = |(\sqrt{b} - \sqrt{c})|(\sqrt{b} + \sqrt{c})$

অথবা $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 > (\sqrt{a})^2 > |(\sqrt{b} - \sqrt{c})|(\sqrt{b} + \sqrt{c})$

কাজেই $\sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a} > \sqrt{b} - \sqrt{c}$

18.



AD-এর সমান্তরাল করে B বিন্দু থেকে DE রেখা আঁকা হলো যেটি CA-এর বর্ধিত অংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। CBE ত্রিভুজে BA এবং CF হচ্ছে দুটি মাধ্যমা কারণ A হচ্ছে CE-এর মধ্যবিন্দু এবং F হচ্ছে BE-এর মধ্যবিন্দু। কাজেই CF রেখা AB রেখাকে 1:2 অনুপাতে ভাগ করেছে।

19. 437
589
1026

20.

3	5	7	1	8	6	4	2	9
8	2	6	4	9	5	1	7	3
1	9	4	3	2	7	5	6	8
5	1	8	2	7	3	9	4	6
6	4	9	8	5	1	2	3	7
7	3	2	6	4	9	8	1	5
4	7	5	9	3	2	6	8	1
2	6	3	5	1	8	7	9	4
9	8	1	7	6	4	3	5	2

21. $\frac{1}{7}$-এর দশমিকে ফিরে ফিরে আসা অংশ হচ্ছে 0·142857 কাজেই এটাকে 7 দিয়ে ভাগ করলে আমরা $\frac{1}{49}$-এর ফিরে ফিরে আসা অংশটুকু পেয়ে যাব। অর্থাৎ 0·142857 142857 142857 142857 142857 142857 142857 ÷ 7

= 0·020408 163265 306122 448979 591836 734693 877551

22. $a = (6x + 18)^{\frac{1}{3}}$

$b = -(6x - 28)^{\frac{1}{3}}$

$c = -(8)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a + b + c = 0$

কাজেই $a^3 + 6^3 + c^3 = 3abc$

$(6x+28) - (6x-28) - 8 = 3(6x - 28)^{\frac{1}{3}}(-(6x - 28)^{\frac{1}{3}})(-2)$

$56 - 8 = 2(36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}}$

$(36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}} = 8$

$\therefore 36x^2 - 784 = 512$

$\therefore x = \pm 6$

23. $2^m + 1 = 1000...001$ $m - 1$ সংখ্যক অঙ্ক

$2^n - 1 = 1111.......111$ n সংখ্যক অঙ্ক

এখন ভাগ করার চেষ্টা করা যেতে পারে

```
111.....111 | 1000.....001 | 1
            | 111...111    |
            ---------------
                 100...001
```

প্রতিবারই ভাগশেষটির প্রথম এবং শেষ অঙ্ক হবে 1 এবং মাঝখানে থাকবে কিছু 0, কিন্তু যে অঙ্ক দিয়ে ভাগ করা হচ্ছে সেখানে সবগুলো অঙ্ক 1 কাজেই ভাগ কখনোই মিলবে না। n = 2 বা তার কম হলেই শুধু ভাগ করা সম্ভব।

24. পাঁচটি চলক (variable) এবং পাঁচটি সমীকরণ সব সময়েই সমাধান করা সম্ভব। তবে অনেক সময় ধরে এলজেবরা করার প্রয়োজন হতে পারে। এই সমস্যাটার একটা শর্টকাট আছে, সবগুলো সমীকরণ যোগ করলে পাওয়া যায়—

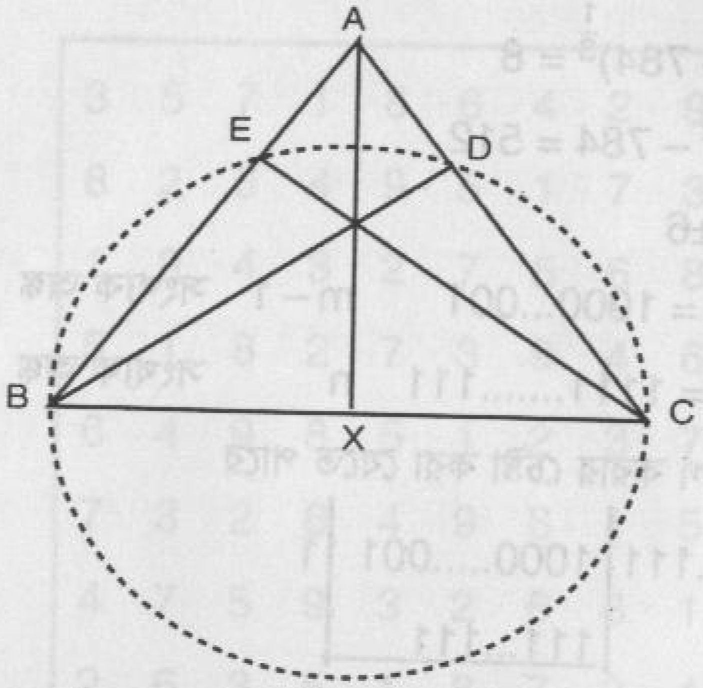
$4(x + y + z + u + \upsilon) = 12$

$\therefore\ x + y + z + u + \upsilon = 3$

এবারে এই সমীকরণ থেকে মূল সমীকরণ বিয়োগ করলেই পাওয়া যাবে—

$v = -2, x = 2, y = 1, z = 3$ এবং $u = -1$

25. BEDC একটা বৃত্তের পরিসীমার চারটি বিন্দু, BC তার ব্যাস এবং x বৃত্তের কেন্দ্র। ED একটি জ্যা (Chord) এই জ্যা-এর লম্বদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র বা BC-এর মধ্যবিন্দুকে ছেদ করবে।



26. ধরা যাক x সংখ্যক খাতা y সংখ্যক পেন্সিল এবং z সংখ্যক লজেন্স কেনা হলো অর্থাৎ—

$10x + 3y + \frac{z}{2} = 100$

এবং $x + y + z = 100$

দুটি সমীকরণ থেকে z সরিয়ে নিলে

$19x + 5x = 100$

$x = \frac{100 - 5y}{19}$

x-কে পূর্ণ সংখ্যা হতে হবে এবং সেটা সম্ভব শুধুমাত্র y = 1-এর জন্যে।

কাজেই $y = 1$, $x = 5$ এবং $z = 94$

27. ধরা যাক সংখ্যাগুলো $(x - 3)$, $(x - 1)$, $(x + 1)$ এবং $(x + 3)$

তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$(x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3) = m^2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = m^2$

$(x^2 - 5)^2 - 16 = m^2$

$(x^2 - 5)^2 = m^2 + 16$

$m^2 = 0, 9$ হলে ডান পাশে একটা পূর্ণ বর্গ হতে পারে।

$m^2 = 0$ গুরুত্বপূর্ণ নয় তাই m^2 নিশ্চয়ই 9 অর্থাৎ

$x^2 - 5 = \pm 5$

অর্থাৎ $x^2 = 0$ কিংবা 10

যেহেতু x-কে পূর্ণসংখ্যা হতে হবে তাই $x = 0$

অর্থাৎ বেজোড় সংখ্যাগুলো হচ্ছে -3, -1, 1 এবং 3

28. 1, 3, 5, 7,...(2n – 1) এই পদগুলোর

arithmetic গড় $\frac{1 + 3 + 5 + 7 + ...(2n - 1)}{n} = \frac{n^2}{n} = n$

geometric গড় $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 ... (2n - 1))^{\frac{1}{n}}$

$\therefore n > (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 ... (2n - 1))^{\frac{1}{n}}$

$n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 ... (2n - 1)$

29.

$$\begin{array}{r} 426 \\ 879 \\ \hline 1305 \end{array}$$

30.

8	3	9	5	1	4	7	6	2
2	7	4	3	8	6	1	9	5
6	5	1	9	7	2	3	4	8
7	9	2	4	6	3	8	5	1
4	6	3	8	5	1	2	7	9
5	1	8	7	2	9	4	3	6
3	4	6	2	9	8	5	1	7
1	8	5	6	3	7	9	2	4
9	2	7	1	4	5	6	8	3

31. $3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{2}{3^2}}, 3^{\frac{1}{3^3}}, \ldots\ldots 3^{\frac{n}{3^n}} \ldots\ldots$

$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots\ldots\frac{n}{3^n}}$

$= 3^M$

$M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots$

$\frac{1}{3}M = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \ldots$

$M - \frac{1}{3}M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$

$\frac{2}{3}M = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right)$

$M = \frac{3}{2 \times 3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{4}$

$\therefore$ অসীম সংখ্যক পদগুলোর গুণফল $3^{3/4} = \sqrt[4]{27}$

32. সমীকরণগুলো যোগ করে পাই,

$(2 + k)x + (2 + k)y = 6$

অর্থাৎ $x + y = \frac{6}{2 + k}$

প্রথম সমীকরণ : $x + y = 1$

দুটো থেকে $\frac{6}{2 + k} = 1$

অর্থাৎ $k = 4$

33. প্রথম সমীকরণটি লেখা যায় :

$(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca) = 0$

$(a - b - c) \{a^2 + (b - c)^2 + ab + bc + ca = 0$

a, b, c পজেটিভ পূর্ণসংখ্যা হলে দ্বিতীয় উৎপাদকটি শূন্য হতে পারবে না। কাজেই $a - b - c = 0$

অর্থাৎ $b + c = a$

সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে $a^2 = 2a$

বা, $a = 2$

সুতরাং $b = c = 1$

34. উপরে নিচে $2^{\frac{3}{2}}$ দিয়ে গুণ করলে আমরা পাই,

$$\frac{(8 + 2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (8 - 2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(12 + 2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}} + (12 - 2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$$

এখন সংখ্যাগুলোকে বর্গ হিসেবে সাজানো সম্ভব। তাই

$$\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^3}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^3 - (\sqrt{7} - \sqrt{5})^3}$$

যেহেতু $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$

এবং $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(b^2 + 3a^2)$

কাজেই লেখা যায় $\frac{2\sqrt{5}(5 + 9)}{2\sqrt{5}(5 + 21)} = \frac{7}{13}$

35. ধরা যাক $\frac{m}{n}$ একটা পজেটিভ rational নম্বর। তাহলে এটাকে লেখা যায়

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ldots$ (m সংখ্যক)

প্রথমটা রেখে অন্যগুলোকে $\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}$ এভাবে ভাগ করে নেয়া যায়। যেমন-

$\frac{3}{7}$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{(7+1)} + \frac{1}{7(7+1)}\right) + \left(\frac{1}{7+1} + \frac{1}{7(7+1)}\right)$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \left[\frac{1}{8+1} + \frac{1}{8(8+1)} + \frac{1}{(56+1)} + \frac{1}{56(56+1)}\right]$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{56} + \frac{1}{57} + \frac{1}{72} + \frac{1}{3192}$

36. $\frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y > x+y-\frac{2xy}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{x+y}$

37. $S \;= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \quad (i)$

$Sx = \quad x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... \quad (ii)$

(i)–(ii) করে পাই

$S - Sx = 1 + x + x^2 + x^3 + ...)$

$S(1-x) = \frac{1}{1-x} \therefore \; s = \frac{1}{(1-x)^2}$

38. $a_1 = 17, b_1 = 25, c_1 = 26$ এবং $s_1 = 34$

কাজেই $r_1 = \sqrt{\frac{(34-17)(34-25)(34-26)}{34}} = 6$

$a_2 = 17, b_2 = 25, c_2 = 28$ এবং $s_2 = 35$

কাজেই $r_2 = \sqrt{\frac{(35-17)(35-25)(35-28)}{35}} = 6$

কাজেই দুটো বৃত্তই সমান

39.
```
 246
 789
1035
```

40.

7	8	9	6	5	2	1	3	4
4	1	2	3	9	8	6	5	7
5	6	3	7	1	4	9	2	8
1	3	5	8	2	9	7	4	6
8	4	6	5	7	3	2	9	1
9	2	7	4	6	1	3	8	5
2	7	4	9	8	6	5	1	3
3	5	1	2	4	7	8	6	9
6	9	8	1	3	5	4	7	2

41. বেজোড় সংখ্যাগুলোকে এভাবে সাজানো হলে :

1

3, 5

7, 9, 11

13, 15, 17, 19

বলা যায় n ধাপের পদসংখ্যা n এবং n ধাপের শুরুসংখ্যা $n(n-1)+1$ কাজেই সবগুলো পদের যোগফল :

$n(n-1)+1, n(n-1)+3, n(n-1)+5 + ... n(n-1)+(2n+1)$

$= n[n(n-1)] + (1+3+5+7+...2n+1)$

$= n^3 - n^2 + n^2 = n^3$

42. তিনটি সমীকরণ থেকে y আর z-কে অপসারণ করলে এটি x-এর সমীকরণ হিসেবে হয় :

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

যেটাকে লেখা যায় $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

সুতরাং x = 1, 2 কিংবা 3 যেহেতু সমীকরণগুলো x, y এবং z-এ সিমেট্রিক সমাধান যে কোনোটা হতে পারে। অর্থাৎ, x, y, z হচ্ছে (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) কিংবা (3, 2, 1).

43. $261 = 2^3.3^3 = 8 \times 27 = 9 \times 24$

কাজেই 9 টাকা করে 24টি কলম কিনেছিল।

44. শেষ পরীক্ষার নম্বরের পার্থক্য $97 - 73 = 24$

এর জন্যে গড় নম্বরের পরিবর্তন হয় $90 - 87 = 3$

কাজেই নিশ্চয়ই 24/3 = 8টি পরীক্ষা নেয়া হয়েছিল।

45. যে সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হচ্ছে যদি সেই সংখ্যাটি হয় d এবং ভাগশেষ হয় r তাহলে 1108, 1453, 1844 কিংবা 2281-কে লেখা যায়

(Nd+r)

$\therefore 1453 - 1108 = 345$

$1844 - 1453 = 391$

$2291 - 1844 = 437$

এবং $437 - 391 = 391 - 345 = 46 = 2 \times 23$

কাজেই 23 দিয়ে ভাগ দেয়া হচ্ছে এবং ভাগশেষ হচ্ছে 4.

46. $b = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$a = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ তাহলে সমীকরণটি $x = a + b$

$b - a = \frac{b^2 - a^2}{b + a} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

$(b - a) + (a + b) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) + x$

$2b = b^2 + 1$

$\therefore (b - 1)^2 = 1$

অর্থাৎ $b = 1$

$\therefore x - \frac{1}{x} = 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

যার সমাধান : $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

শুধু একটি মূল সমীকরণের সমাধান : $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

47. দুই পাশেই 72 পাওয়ার করার পর

$(8!)^9 = (8!)(8!)^8$ এবং $(9!)^8 = 9^8(8!)^8$

যেহেতু $9^8 > 8!$ কাজেই $\sqrt[9]{9!} > \sqrt[8]{8!}$

48. n-তম কিউব রুটের ভেতরের অংশটুকু এভাবে লেখা যায় :

$(8 + 3n) + (n^2 + 3n)\sqrt[3]{(n + 3)^3}$

$= (8 + 3n) + (n^2 + 3n)(n + 3)$

$= (n + 2)^3$

যেহেতু প্রথম কিউব রুটের বেলায় $n = 1$ সুতরাং expressionটি হচ্ছে 3.

49.
$$\begin{array}{r} 624 \\ 879 \\ \hline 1503 \end{array}$$

50.

3	2	5	4	9	7	1	8	6
1	9	8	3	6	5	2	4	7
4	7	6	2	1	8	9	5	3
2	1	3	8	4	9	7	6	5
7	6	4	1	5	3	8	9	2
5	8	9	7	2	6	3	1	4
9	3	1	6	7	4	5	2	8
6	5	7	9	8	2	4	3	1
8	4	2	5	3	1	6	7	9

51. সমীকরণটির দিকে তাকিয়ে বলা যায় যে, এর দুটো সমাধান হচ্ছে $x = o$ এবং $x = a + b$

তৃতীয় সমাধানটির জন্যে আমরা লিখতে পারি—

যেহেতু $m + n = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

$(m + n) = \frac{m + n}{mn}$

$(m + n)(mn - 1) = o$

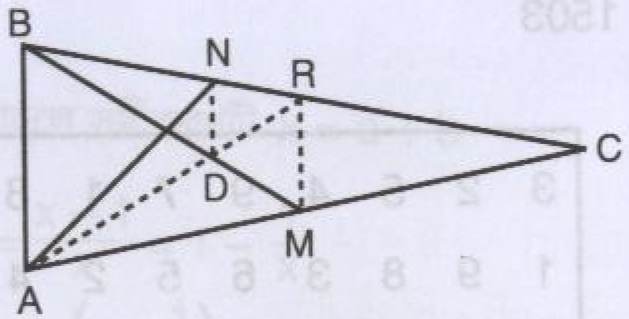
কাজেই হয় $m + n = 0$, না হয় $mn = 1$

কাজেই $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=0$

অথবা $(a+b)x=a^2+b^2$ সুতরাং $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$

দ্বিতীয় সমাধানটি $(x-a)(x-b)=0$ সত্যি হতে হলে $x=a$ কিংবা $x=b$ হতে হবে যেটা সত্যি হতে পারবে না, সমীকরণের ডানপাশের অংশ তাহলে অনির্ণেয় হয়ে যাবে।

52.



কোণ $\angle ABC=\angle BAC=\frac{180-20}{2}=80^\circ$

$\angle CBM=20^\circ$ এবং $\angle BAN=50^\circ=\angle BNA$ কাজেই $BN=AB$

সিমেট্রি থেকে ABD এবং DRM সমদ্বিবাহু।

$BD=AB=BN$ কাজেই $\angle BND=BDN=80^\circ$ এবং $\angle NDR=40^\circ$

এখন $\angle MRC=80^\circ$ কাজেই $\angle NRD=40^\circ=\angle NDR$

এবং $ND=NR$ যেহেতু $DM=MR$, NM DR-কে লম্বদ্বিখণ্ডিত করেছে কাজেই $\angle BMN=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$

53. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)^2\left(\frac{x-x+1}{x+1}\right)=y^2$

অথবা $(x+1)^2\left(x-2+\frac{3}{x+1}\right)=y^3$

$\frac{3}{x+1}$ একটি পূর্ণসংখ্যা হতে পারে যদি $x=0$ কিংবা 2 হয়। কাজেই সম্ভাব্য সমাধান $(-1,0),(0,\pm1),(2\pm3)$

54. বিস্তৃতিটি আমরা লিখতে পারি—

$\frac{1-x}{1-x^{16}}=(1-x)(1+x^{16}+x^{32}+x^{48}\ldots\ldots)$

$=1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{31}+\ldots$

55. 316-কে 11 দিয়ে ভাগ করলে আমরা ভাগফল পাই 28 এবং ভাগশেষ পাই 8; 13 যেহেতু 11 থেকে দুই বেশি তাই এই ভাগশেষটিকে 2 করে 4 ভাগ করা যায়, কাজেই 13 রয়েছে 4টি।

সুতরাং সংখ্যা দুটি 52 এবং $316-52=264$

56. ধরা যাক x সংখ্যক 2 টাকার স্ট্যাম্প, কাজেই 10x সংখ্যক 1 টাকার স্ট্যাম্প এবং y সংখ্যক 5 টাকার স্ট্যাম্প কিনেছে। কাজেই

$2x+10x+5y=100$

or, $12x=100-5y$

যেহেতু x এবং y পূর্ণ সংখ্যা, তাই $y=8$ হলে $x=5$ হবে।

কাজেই 5টি 2 টাকার, 50টি 1 টাকার এবং 8টি 5 টাকার স্ট্যাম্প কিনেছে।

57. প্রশ্নের উত্তর হ্যাঁ কিংবা না, এটাকে বাইনারী 1 এবং 0 বিবেচনা করা যায়। কাজেই সবচেয়ে বড় সংখ্যা বিশ অঙ্কের বাইনারী সংখ্যা বা 2^{20}.

58. 2^n বাইনারীতে 1-এর পরে n সংখ্যক শূন্য। কাজেই বাইনারীতে এটি 111...11

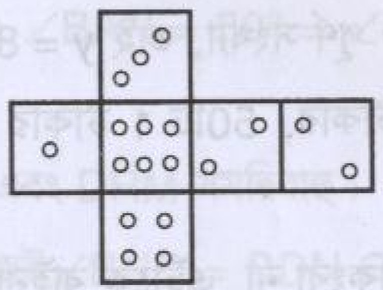
n সংখ্যক 2 যেটি হচ্ছে $2^{n+1}-1$

59.
$$\begin{array}{r} 402 \\ \underline{39} \\ 15678 \\ \underline{27} \\ 16038 \end{array}$$

60.

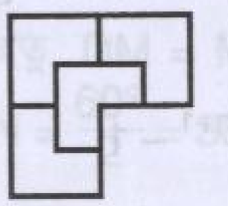
7	8	9	1	3	5	4	2	6
4	3	6	8	9	2	7	1	5
1	2	5	6	4	7	9	8	3
2	7	3	5	1	8	6	4	9
6	4	8	9	2	3	1	5	7
9	5	1	7	6	4	8	3	2
8	6	7	3	5	1	2	9	4
3	9	4	2	8	6	5	7	1
5	1	2	4	7	9	3	6	8

61. ছক্কাটিকে খুলে নিলে এরকম দেখাবে :

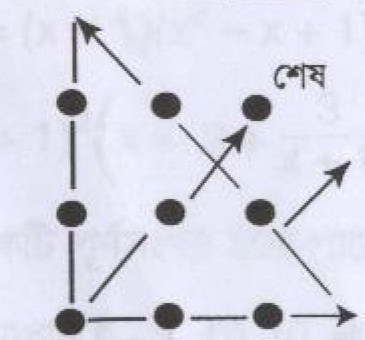


কাজে 1-এর উল্টোপাশে রয়েছে 2, দেখাই যাচ্ছে এই ছক্কাটি ভুলভাবে তৈরি করা হয়েছে।

62.



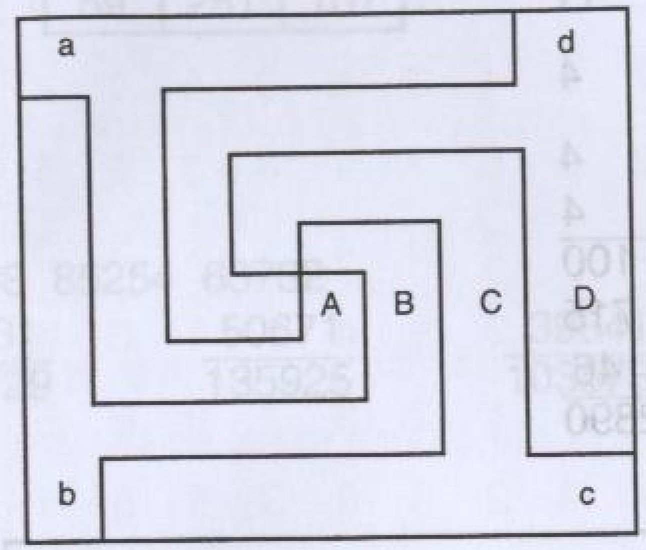
63.



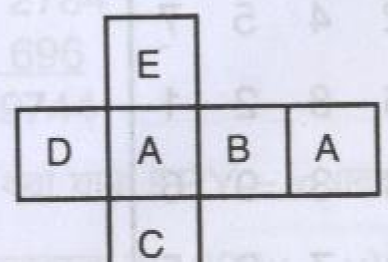
64.

1, 2, 3, $\underline{9}$, 15
4, 5, $\underline{6}$, 15
7, $\underline{8}$, 15

65.

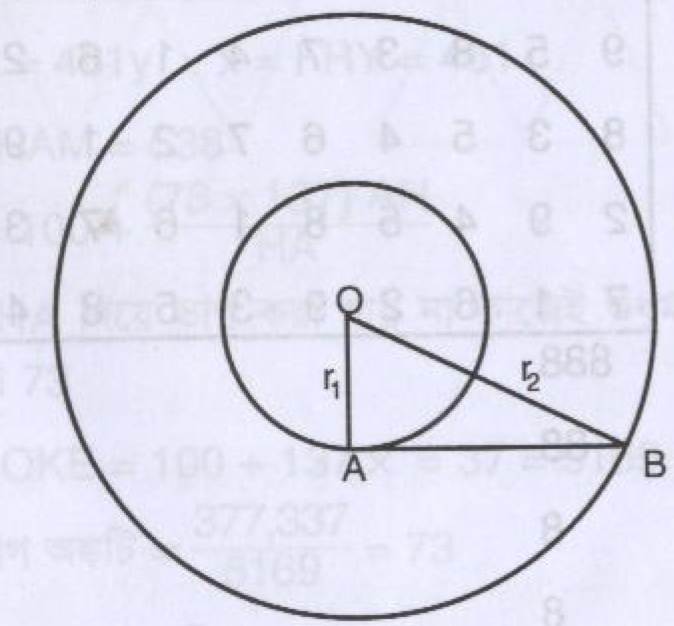


66.



কাজেই অপর পৃষ্ঠার রং A

67.



যেহেতু OAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ $r_2^2 = r_1^2 + AB^2$

সুতরাং $r_2^2 - r_1^2 = AB^2 = 1$

দুটি বৃত্তের মাঝখানের অংশটুকুর ক্ষেত্রফল—

$\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi$

68.
$$\begin{array}{r} 44 \\ 44 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 100 \end{array}$$

69.
$$\begin{array}{r} 715 \\ 46 \\ \hline 32890 \end{array}$$

70.

6	8	7	1	3	2	4	5	7
3	4	7	9	5	6	8	2	1
5	2	1	7	4	8	3	9	6
4	6	2	8	1	9	7	3	5
1	7	3	6	2	5	9	4	8
9	5	8	3	7	4	1	6	2
8	3	5	4	6	7	2	1	9
2	9	4	5	8	1	6	7	3
7	1	6	2	9	3	5	8	4

71.
$$\begin{array}{r} 888 \\ 88 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ \hline 1000 \end{array}$$

72.

191	17	239
197	149	101
59	281	107

73.
$$\begin{array}{r} 286 \\ 3210 \\ \hline 3496 \end{array}$$

74.
$$\begin{array}{r} 69298 \\ 90431 \\ \hline 159729 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85254 \\ 50671 \\ \hline 135925 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63732 \\ 39841 \\ \hline 103573 \end{array}$$

75.
$$\begin{array}{r} 348 \\ 28 \\ \hline 2784 \\ 696 \\ \hline 9744 \end{array}$$

76. ধরা যাক FRY = x এবং HAM = y

তাহলে $7(1000x + y) = 6(1000y + x)$

$6994x = 5993y$

$538x = 461y \therefore x = FRY = 461$

$y = HAM = 538$

77. $JOKE = 100 + \dfrac{(73 \times 137)\ AH}{HA}$

AH-কে HA দিয়ে ভাগ করা যায় না কাজেই শুধুমাত্র সম্ভাব্য সংখ্যা হতে পারে 73

কাজেই JOKE = 100 + 137 × = 37 = 5169

সতরাং ভাগ অঙ্কটি $= \dfrac{377,337}{5169} = 73$

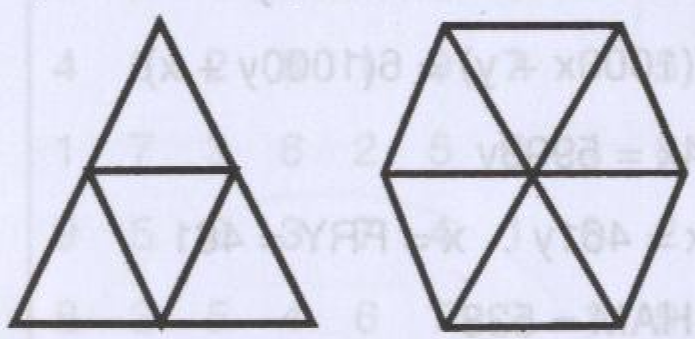
78.
$$\begin{array}{r} 146 \\ 583 \\ \hline 729 \end{array} \quad \begin{array}{r} 157 \\ 482 \\ \hline 639 \end{array}$$ কিংবা $$\begin{array}{r} 718 \\ 236 \\ \hline 954 \end{array} \quad \begin{array}{r} 729 \\ 135 \\ \hline 864 \end{array}$$

79. $\begin{array}{r} 297 \\ 54 \\ \hline 16038 \end{array}$

80.

3	1	6	8	5	2	7	4	9
7	8	4	3	6	9	5	1	2
2	9	5	7	1	4	3	8	6
6	2	7	9	4	5	1	3	8
9	5	3	9	4	5	1	3	8
8	4	1	2	3	7	9	6	5
1	7	2	6	9	3	8	5	4
4	3	9	5	2	8	6	7	1
5	6	8	4	7	1	2	9	3

81. সমবাহু ত্রিভুজ এবং সমষড়ভুজটি আঁকা হলেই উত্তর বের হয়ে যাবে।



সমবাহু ত্রিভুজটিকে চারটি ছোট সমবাহু ত্রিভুজে ভাগ করা যায় ষড়ভুজটিকে এক মাপের ছয়টি সমবাহু ত্রিভুজে ভাগ করা যায় কাজেই তাদের Ratio 2:3

82. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a,\ \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = b$ এবং $a + b = x$ হলে

$x^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) + 3\sqrt[3]{4-5}x$

$x^3 = 4 - 3x$

$x^3 + 3x - 4 = 0$

এর real root হচ্ছে $x = 1$

কাজেই $a + b = 1$

83. $(a^{15} + 1) = (a^3 + 1)(a^{12} - a^9 + a^6 - a^3 + 1)$

$= (a + 1)(a^2 - a + 1)(a^{12} - a^9 + a^6 - a^3 + 1)$

আবার $(a^{15} + 1) = (a^5 + 1)(a^{10} - a^5 + 1)$

$= (a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a^{10} - a^5 + 1)$

যেহেতু $a^2 - a + 1$ একটি উৎপাদক এবং সেটি $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$-এর উৎপাদক হতে পারবে না তাই এটা নিশ্চয়ই $a^{10} - a^5 + 1$-এর উৎপাদক হবে। এটাকে এভাবে সাজানো যায়—

$(a^{10} - a^9 + a^8) + (a^9 - a^8 + a^7) - (a^7 - a^6 + a^5) - (a^6 - a^5 + a^4) - (a^5 - a^4 + a^3) + (a^3 - a^2 + a) + (a^2 - a + 1)$

কাজেই $(a^{15} + 1) = (a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a^2 - a + 1)$

$(a^8 + a^7 - a^5 - a^4 - a^3 + a + 1)$

84. এটি নিশ্চয়ই 12 ভিত্তিক সংখ্যা! কাজেই 10-এর $\frac{1}{5}$ হবে $2\frac{2}{5}$!

$f(2i) = (-4)^5 + (-4)^4 + (-4)^3 + (-4)^2 + (-4) + 1$

$= -4^4(4-1) - 4^2(4-1) - (4-1)$

$= -(4-1)(4^4 + 4^2 + 1) = -3 \times 273 = -819$

$= -9 \times 91$ যেটা 9 দ্বারা ভাগ করা যায়।

85. $x^2 = (2i)^2 = -4$ কাজেই

86. DA এবং BA রেখাকে বাড়িয়ে বিপরীত বাহু দুটিকে ছেদ করালে দেখা যাবে যে দুটি বর্গক্ষেত্রের মাঝখানের অংশটি MNPQ বর্গের এক চতুর্থাংশ।

প্রকৃতপক্ষে এটি MN বাহুর যে-কোনো স্থানে ছেদ করলে এবং ABCD বর্গ যে-কোনো আকারের হলেই সত্যি (যতক্ষণ পর্যন্ত $AB \geq \frac{MP}{2}$)

87. $2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$ অর্থাৎ $(2^8)^3 + (2^6)^4 = (2^5)^5$

অর্থাৎ a = 256, b = 64, c = 32

88.

বাবার সম্ভাব্য বয়স	:	16	25	36	49	64	81
মায়ের সম্ভাব্য বয়স	:	6	10	18	36	24	8
মেয়ের সম্ভাব্য বয়স	:			9	13	10	
ছেলের সম্ভাব্য বয়স	:			9	9	6	

কাজেই শুধুমাত্র গ্রহণযোগ্য সমাধান বাবা-মা মেয়ে-ছেলে যথাক্রমে 49, 36, 13 এবং 9 অন্যগুলোতে মায়ের বয়স বেশি কম এত কম বয়সে মা হওয়া সম্ভব নয়।

89.

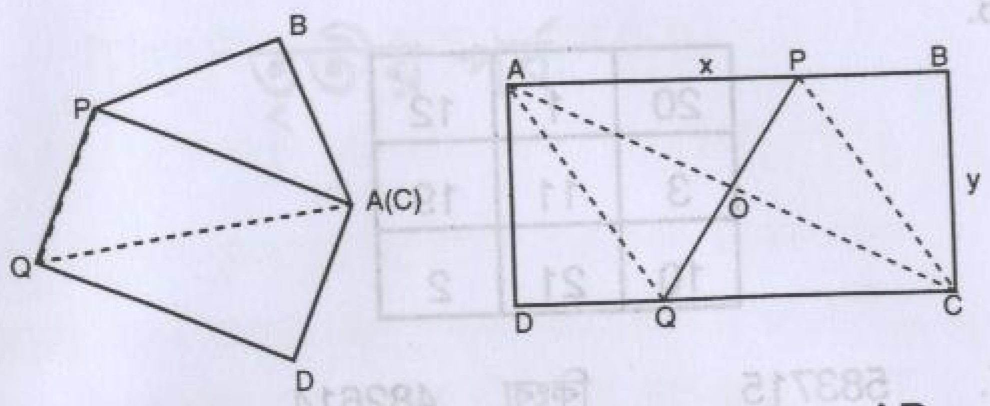
$$\begin{array}{r} 594 \\ 27 \\ \hline 16038 \end{array}$$

90.

7	2	9	3	5	8	6	1	4
1	5	8	6	4	7	2	9	3
3	6	4	9	1	2	7	8	5
4	1	3	2	6	9	8	5	7
5	9	6	7	8	9	8	5	7
8	7	2	5	3	1	9	4	6
9	8	5	4	7	3	1	6	2
6	3	1	8	2	5	4	7	9
2	4	7	1	9	6	5	3	8

91. গাড়িতে যেতে এবং আসতে আধাঘণ্টা লাগে তাই শুধু যেতে কিংবা ফিরতে লাগে পনেরো মিনিট। তাই হেঁটে অফিসে যেতে লাগে 1 ঘণ্টা 30 মিনিট − 15 মিনিট = 1 ঘণ্টা 15 মিনিট। কাজেই হেঁটে যেতে এবং ফিরে আসতে সময় লাগবে 2 ঘণ্টা 30 মিনিট।

92.



ABCD আয়াতক্ষেত্রে AB = CD = x এবং BC = AD = y. যেখানে x>y. A বিন্দু C-এর ওপরে এনে কাগজটি ভাঁজ করায় PQ ভাঁজ তৈরি হয়েছে। সিমেট্রির কারণে PC = PA = CQ = AQ। কাজেই AC এবং PQ, O বিন্দুতে পরস্পরের লম্বদ্বিখণ্ডক। যেহেতু ত্রিভুজ AOP এবং ABC সর্বসম কাজেই $\frac{PO}{BC} = \frac{AO}{AB}$

$$PQ = 2PO = 2\ AO.BC/AB = \sqrt{x^2 + y^2}.\frac{y}{x}$$

93. q হচ্ছে P_1 এবং P_2-এর গড়। কাজেই $P_1 < q < P_2$ যেহেতু P_1 এবং P_2 পরপর প্রাইম সংখ্যা তাই q প্রাইম হতে পারবে না এটা নিশ্চয়ই Composite.

94. যেহেতু পুরো সমীকরণটির সব coefficient পজেটিভ তাই যদি কোনো root থাকে সেগুলো হতে হবে এরকম : (x + a)(x + b) ....

অর্থাৎ x = − a কিংবা x = − b যেগুলো নেগেটিভ। ধরা যাক সেটি হচ্ছে − y তাহলে $1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} \cdots\cdots \frac{y^{2n}}{2n!} > e^{-y} > 0$

কাজেই এটি কখনো সম্ভব নয়!

95.

$$\begin{array}{r} 444 \\ 444 \\ 44 \\ 44 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 1000 \end{array}$$

96.

20	1	12
3	11	19
10	21	2

97.

583715
146248
729963

কিংবা

482614
156358
639972

98.

70,839
6,458
64,381

99.

396
45
17820

100.

1	7	3	4	8	9	6	2	5
8	4	9	5	6	2	7	3	1
2	6	5	7	1	3	8	4	9
4	1	6	3	9	8	5	7	2
3	9	7	1	2	5	4	8	6
5	8	2	6	4	7	1	9	3
6	3	4	2	7	1	9	5	8
7	5	8	9	3	6	2	1	4
9	2	1	8	5	4	3	6	7

তৃতীয় পর্ব

একশ চমকপ্রদ সংখ্যা

1. **0**

শূন্য সম্ভবত গণিতের সবচেয়ে রহস্যময় সংখ্যা। প্রাচীন গ্রীকের গণিতবিদেরা গণিতকে অনেক দূর এগিয়ে নিয়ে গিয়েছিলেন কিন্তু তাদের পক্ষে শূন্য ব্যাপারটি অনুভব করা সম্ভব হয় নি। সংখ্যা বলতেই তারা ধরে নিয়েছিলেন যত ছোটই হোক কিছু একটা থাকতে হবে। কিছু নেই, শূন্য সেটা আবার সংখ্যা হয় কেমন করে? শূন্যের এই অনুভবটি এসেছে আমাদের উপমহাদেশ থেকে এবং গণিতের জগতে এটি ছিল এক অভাবনীয় উপলব্ধি।

শূন্য দিয়ে যে-কোনো সংখ্যাকে গুণ করলে সেটা হয় শূন্য। কিন্তু শূন্য দিয়ে কোনো কিছুকে ভাগ দেয়া যায় না, তাহলে সেটা হয় অনির্ণেয়। মজার ব্যাপার হচ্ছে 0° সমান কত সেটা নিয়ে এখনো বিতর্ক চলছে। অনেক ক্যালকুলাস বইয়ে বলা আছে অনির্ণেয় আবার অনেক বইয়ে দেয়া আছে 1

2. $\frac{1}{3}$

এই সংখ্যাটি আমরা পেয়েছি প্রথম বেজোড় সংখ্যা (1)-কে দ্বিতীয় বেজোড় সংখ্যাটি (3) দিয়ে ভাগ দিয়ে। উপরে একটি মাত্র বেজোড় সংখ্যা না লিখে প্রথম ও দ্বিতীয়টি যোগ করে তাকে ভাগ দিতে পারি তৃতীয় এবং চতুর্থ বেজোড় সংখ্যা দিয়ে। অর্থাৎ

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7}$$

এভাবে আমরা এটাকে যত ইচ্ছে তত বাড়াতে পারি,

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \ldots$$

3. $\frac{1}{2}$

পৃথিবীর সবচেয়ে চমকপ্রদ ধারাগুলোর একটি হচ্ছে জিটা ফাংশন

$$\xi(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

তার একটা কারণ এটাকে শুধুমাত্র প্রাইম সংখ্যাগুলো দিয়েও অন্যভাগে প্রকাশ করা যায়—

$$\xi(s)\ \frac{2^s}{2^s-1} \times \frac{3^s}{3^s-1} \times \frac{5^s}{5^s-1} \times \frac{7^s}{7^s-1} \times \frac{11^s}{11^s-1} \times \ldots$$

রিমান বলেছেন এই ফাংশনটি যদি কমপ্লেক্স সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা হয় তাহলে তার root-গুলিও হবে কমপ্লেক্স এবং root-এর real অংশ সবসময়েই হবে $\frac{1}{2}$।

এটা এখনো একটা conjecture, নতুন সহস্রাব্দে এই conjecture-টি প্রমাণ করার জন্যে এক মিলিওন ডলার পুরস্কার ধার্য করা হয়েছে। এই conjecture-টিকে সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ঠ একটি গাণিতিক সমস্যা হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

4. **1**

যে সকল পূর্ণ সংখ্যায় উৎপাদক নেই তাদেরকে বলে প্রাইম সংখ্যা সেই হিসেবে 1 প্রাইম সংখ্যা হওয়া উচিৎ ছিল, কিন্তু এটিকে যত্ন করে প্রাইমের তালিকা থেকে সরিয়ে রাখা হয়েছে। তার কারণ যে-কোনো সংখ্যাকেই আসলে শুধুমাত্র একভাবে কিছু প্রাইম সংখ্যার গুণফল হিসেবে লেখা যায়। যেমন-

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$75 = 3 \times 5 \times 5 \quad \text{ইত্যাদি}$$

অন্য কোনোভাবে এটাকে লেখা সম্ভব নয়। যদি 1-কে প্রাইম ধরা হতো তাহলে এত সুন্দর নিয়মটি আর সত্যি হতো না, যে-কোনো সংখ্যাকে তখন অসংখ্যভাবে প্রাইম সংখ্যার গুণফল হিসেবে লেখা যেত, যেমন—

$12 = 2 \times 2 \times 3$ কিংবা $1 \times 2 \times 2 \times 3$ কিংবা $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3$

কাজেই এই সুন্দর থিওরেমটি রক্ষা করার জন্যে প্রাইম সংখ্যা হওয়ার দাবিদার হবার পরেও 1 প্রাইম সংখ্যা নয়।

5. $\sqrt{2}$ = 1.41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85697 ...

পিথাগোরাসের আমলে সকল পূর্ণ সংখ্যার একটা দৈব ক্ষমতা আছে বলে দাবী করা হতো। তখন বিশ্বাস করা হতো সকল সংখ্যাকেই এই পূর্ণ সংখ্যাগুলো দিয়ে প্রকাশ করা যাবে। তাই প্রথম যখন আবিষ্কার করা হলো যে $\sqrt{2}$-কে কোনোভাবেই দুটো পূর্ণ সংখ্যার ভগ্নাংশ হিসেবে প্রকাশ করা সম্ভব না তখন তাদের মাথায় আকাশ ভেঙ্গে পড়েছিল। জনশ্রুতি আছে যে প্রথম এই তথ্যটি বের করেছিল ক্রুদ্ধ গণিতবিদরা তাকে খুন করে ফেলেছিল! $\sqrt{2}$ হচ্ছে গণিতের জগতে আবিষ্কৃত প্রথম irrational সংখ্যা, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু যদি হয় 1 তাহলে তার কর্ণ হচ্ছে $\sqrt{2}$.

6. 1·61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576

এটি হচ্ছে বিখ্যাত গোল্ডেন রেশিও, যে সংখ্যার সাথে 1 যোগ করলে সংখ্যাটির বর্গ পাওয়া যায় এটি সেই সংখ্যা। অর্থাৎ

$$(\phi + 1) = \phi^2$$

এর সমাধান করলে আমরা পাই, $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ যার মান হচ্ছে 1·61803 ... ধারণা করা হয়— যে আয়াতক্ষেত্রের দুইবাহুর অনুপাত এই গোল্ডেন রেশিওতে তৈরি হয় সেটি অত্যন্ত দৃষ্টিনন্দন। পৃথিবীর বহু স্থাপত্য কর্ম, শিল্পীদের ছবি এই গোল্ডেন রেশিওতে তৈরি করা হয়েছে।

7. 2

এটি একমাত্র সংখ্যা যেটাকে নিজের সাথে যোগ করলে যা পাওয়া যায় নিজের সঙ্গে গুণ করলেও তাই পাওয়া যায়। এটি সবচেয়ে ছোট প্রাইম সংখ্যা এবং একমাত্র জোড় প্রাইম সংখ্যা। ফার্মার শেষ থিওরেম

$$x^n + y^n = z^n$$

যেখানে x, y, z এবং n পূর্ণ সংখ্যা, শুধুমাত্র n = 2-এর জন্যে সত্যি। প্রাচীন গ্রীক আমলে 2-কে মহিলা সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করা হতো! আধুনিক কম্পিউটারের সকল হিসেব নিকেশ হয় 2 ভিত্তিক সংখ্যা বা বাইনারী সংখ্যা দিয়ে।

8. e = 2·71828 18234 59045 23536 02874 71352 66249 77512 47093 69995

অয়লার এটাকে প্রথমে e বলে অভিহিত করেছেন। আমরা সাধারণত দুই ধরনের লগ নিয়ে থাকি একটা দশ ভিত্তিক অন্যটিকে বলা হয় ন্যাচারাল লগারিদম সেটা যে সংখ্যা ভিত্তিক সেটাই হচ্ছে e। অর্থাৎ

$$\log_{10} 10 = 1$$
$$\log_{10}(e) = 0{\cdot}43429...$$

যদি ন্যাচারাল লগ ব্যবহার করি তাহলে

$$\ln 10 = 2{\cdot}30253...$$

$$\ln e = 1$$

নিউটন e^x-কে লিখেছিলেন—

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

যারা ক্যালকুলাস জানে তারা অবাক হয়ে দেখবে e^x-কে ডিফারেন্সিয়েট করলে আবার e^x-টাই ফিরে আসে! e^x-এর মাঝে x = 1 বসালে আমরা যেটা পাই সেটাই হচ্ছে e, অর্থাৎ

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ... \simeq 2{\cdot}71828\ 1828 ...$$

9. 3

3 সংখ্যাটি প্রকৃতির একটু গুরুত্বপূর্ণ সংখ্যা, কারণ আমাদের পরিচিত বাস্তব জগৎ ত্রি-মাত্রিক। যে-কোনো সংখ্যার অঙ্কগুলো যোগ করে যোগফলকে যদি 3 দিয়ে ভাগ করা যায় তাহলে সংখ্যাটি 3 দিয়ে বিভাজ্য।

প্রাচীন গ্রীকরা ভাবতেন 3 একটি পুরুষ সংখ্যা!

10. π = 3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971...

π হচ্ছে সংখ্যাদের মাঝে সবচেয়ে বিখ্যাত, এটি একটি বৃত্তের পরিধি এবং তার ব্যাসের অনুপাত। অনেক প্রাচীনকাল থেকেই মানুষ এর মানটি মোটামুটিভাবে জানতো, দশমিকের পর প্রথম ত্রিশটি সংখ্যা জানলেই (উপরে দেখানো) বিশ্বব্রাহ্মণ্ডের সবচেয়ে বড় থেকে সবচেয়ে ছোট বস্তুর হিসেব করা সম্ভব। তারপরেও π-এর মান দশমিকের পর ট্রিলিওন সংখ্যা পর্যন্ত বের করা হয়ে গেছে। এটি irrational এবং ট্রান্সেডেন্টাল সংখ্যা যার অর্থ কখনোই এর শেষ দেখা যাবে না। দশমিকের পর এর সংখ্যাগুলো random অর্থাৎ কোনো নিয়ম মেনে আসে না।

দশমিকের পর দুই ঘরে সন্তুষ্ট থাকতে হলে $\frac{22}{7}$ কে ব্যবহার করা যায়।

দশমিকের পর ছয় ঘরের জন্যে 355/113 ব্যবহার করা যায়। π-এর মান বের করার জন্যে অনেক ধারা রয়েছে এর মাঝে রামানুজনের এই সূত্রটি খুব চমৎকার :

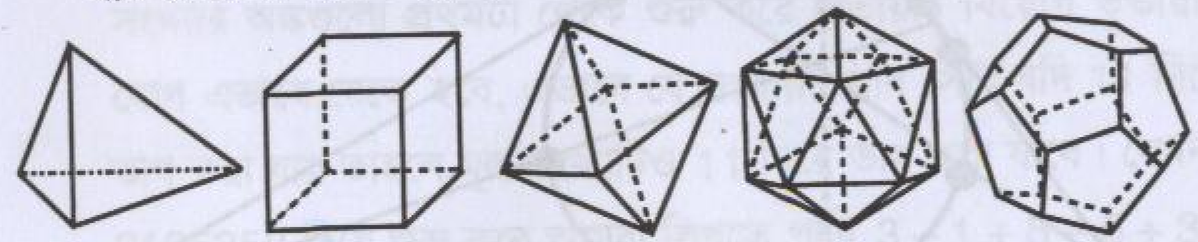
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+2630k)}{(R!)^4 396^{4k}}$$

11. 4

ম্যাপে পাশাপাশি দেশে ভিন্ন রং দিয়ে আলাদা করতে চাইলে সর্বোচ্চ চারটি রংয়ের প্রয়োজন, গণিতের এই থিওরেমটি প্রমাণ করার জন্যে কম্পিউটারকে ব্যবহার করা হয়েছে। বলা যেতে পারে এটি প্রথম একটি থিওরেম যেখানে মানুষের পাশাপাশি গণিতবিদরা কম্পিউটারের অস্তিত্ব মেনে নিয়েছেন।

12. 5

গ্রীকরা 2-কে ধরেছিল মহিলা সংখ্যা হিসেবে, 3 ছিল পুরুষ সংখ্যা তাই 2 + 3 = 5 তাদের কাছে ছিল বিবাহের সংখ্যা। আমাদের কাছে 5-এর বিশেষত্ব অন্য কারণে, এই জগতে মাত্র পাঁচ ধরনের নিয়মিত প্লেটনিক সলিড রয়েছে। সমান বাহু দিয়ে যেরকম সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গ, সমপঞ্চভুজ, সমষড়ভুজ ইত্যাদি তৈরি হয় ঠিক সেরকম ত্রিমাত্রিক জগতে সমান ক্ষেত্র দিয়ে এই প্লেটনিক সলিড তৈরি করা সম্ভব। এগুলোর পৃষ্ঠ সংখ্যা হচ্ছে যথাক্রমে 4, 6, 8, 12 এবং 20-এর বাইরে আর কোনো নিয়মিত প্লেটনিক সলিড তৈরি সম্ভব নয়।



13. 6

কোনো সংখ্যার সবগুলো উৎপাদক যোগ করে যদি সেই সংখ্যাটিই পাওয়া যায় তবে তাকে বলে পারফেক্ট সংখ্যা। 6 হচ্ছে প্রথম পারফেক্ট সংখ্যা, কারণ 6-এর উৎপাদক হচ্ছে 1, 2 ও 3 এবং 1 + 2 + 3 = 6. সংখ্যা 6-এর আরো একটি বৈশিষ্ট্য রয়েছে সেটি হচ্ছে সকল প্রাইম সংখ্যা হয় 6n + 1 না হয় 6n – 1, যেখানে n হচ্ছে পূর্ণ সংখ্যা।

14. 7

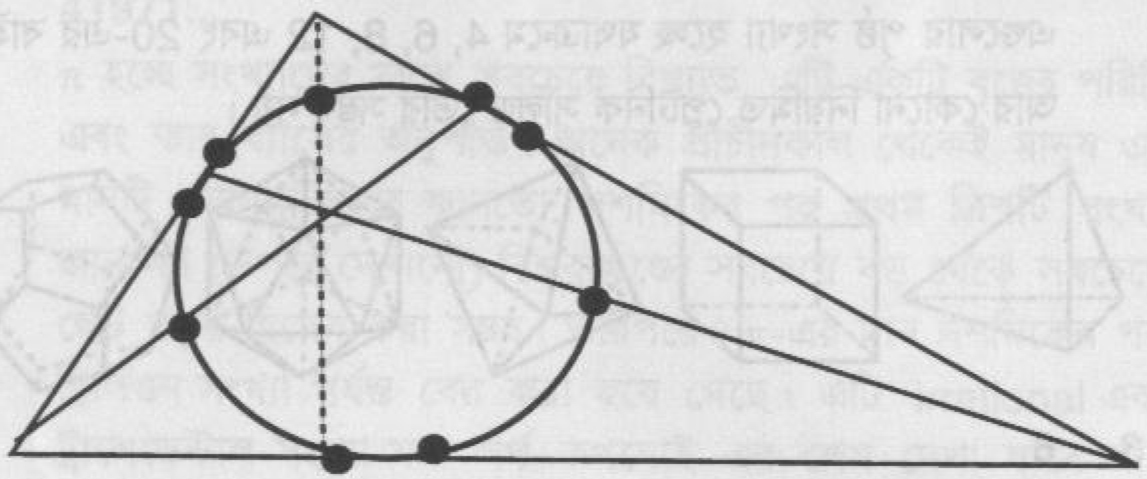
সপ্তাহে 7 দিন সে হিসেবে এর একটা গুরুত্ব আছে। গণিতের দৃষ্টি থেকে বলা যায় সপ্তভুজ হচ্ছে প্রথম সমভুজ যেটা শুধু রুলার আর কম্পাস ব্যবহার করে আঁকা যায় না।

15. 8

একমাত্র কিউব যার সাথে 1 যাগ করলে একটা বর্গ পাওয়া যায়। 8 = 2^3 এবং 8 + 1 = 3^2

16. 9

যে-কোনো তিনটি বিন্দু দিয়ে একটা বৃত্ত আঁকা যায় কিন্তু ত্রিভুজের সাথে সম্পর্কিত নয়টি বিন্দু আছে যেগুলোর ভেতর দিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়। বিন্দুগুলো হচ্ছে তিনটি বাহুর তিনটি মধ্যবিন্দু, তিন কোনা থেকে বিপরীত বাহুর উপর আঁকা লম্ব যেখানে বাহুকে স্পর্শ করেছে সেই তিনটি বিন্দু, লম্বগুলো যেখানে ছেদ করেছে সেখান থেকে বাইরের অংশটুকুর মধ্যবিন্দু।



কোনো সংখ্যা 9 দিয়ে ভাগ করা যায় কী না সেটা বের করা খুব সোজা। সংখ্যার সবগুলো অঙ্ক যোগ করে করে যদি শেষে 9 পাওয়া যায় তাহলে বুঝতে হবে সংখ্যাটি 9 দিয়ে বিভাজ্য।

17. 10

আমাদের দুই হাতে দশটি আঙুল তাই আমরা দশ ভিত্তিক বা দশমিক সংখ্যা গড়ে তুলেছি, এটাই সম্ভবত 10-এর সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা। তবে গোণার জন্যে দশভিত্তিক সংখ্যা বেছে নেয়া হলেও ব্যবসায়ী বা বাণিজ্যের জন্যে এটা মোটেও সহজ সংখ্যা ছিল না। দশকে দুই ভাগ করা যায়, চার ভাগ করলেই সেখানে ভগ্নাংশ চলে আসে। তাই মাপামাপি বা ওজন করার জন্যেও নানা ধরনের এককের তৈরি হয়েছিল। গণিতের দিক থেকে 10 সংখ্যাটির দুই একটা বিশেষত্ব বলা যায়। $10! = 6!7!$ এভাবে আর কোনো সংখ্যার ফ্যাক্টরিয়াল লেখা যায় না। এটি একমাত্র 10-এর জন্যে সত্যি।

18. 11

ফুটবল বা ক্রিকেট টিমে 11 জন খেলোয়াড় থাকে এভাবে বললেই সম্ভবত সবচেয়ে বেশি মানুষকে এই সংখ্যাটির গুরুত্ব বোঝানো সম্ভব। আমাদের বাস্তব জগত ত্রিমাত্রিক (সময়কে যোগ করে চর্তুমাত্রিকও বলা যায়) পদার্থবিজ্ঞানীরা সুপারসিমেট্রি ব্যবহার করে দেখিয়েছেন এই জগতের মাত্রা হচ্ছে এগারোটি— চারটি আমরা দেখি, বাকি সাতটি অত্যন্ত ক্ষুদ্র জায়গায় কুঁকড়ে আছে বলে আমরা দেখি না।

একটা সংখ্যাকে 11 দিয়ে ভাগ করা যায় কীনা সেটা বোঝা খুব সহজ। সংখ্যার অঙ্কগুলো প্রথমটা থেকে শুরু করে দ্বিতীয়টি বিয়োগ তৃতীয়টি যোগ এভাবে যেতে হবে, এভাবে যে সংখ্যাটি পাব সেটা যদি 11 দিয়ে ভাগ করা যায় তাহলে মূল সংখ্যাটিও 11 দিয়ে ভাগ করা যাবে। যেমন- 3185358 দিয়ে শুরু করে আমরা লিখতে পারি $3 - 1 + 8 - 5 + 3 - 5 + 8 = 11$, কাজেই এই সংখ্যাটি 11 দিয়ে বিভাজ্য।

যে সংখ্যা শুধু মাত্র 1 দিয়ে লেখা হয় তাদের বলে রিপ-ইউনিট (repunit) যেমন- 1, 11, 111, 1111 ইত্যাদি। কাজেই 11 হচ্ছে প্রথম রিপ-ইউনিট প্রাইম।

19. 13

এটাকে অশুভ সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করা হয়। পাশ্চাত্য দেশে বাসার নম্বর দেবার সময় বারোর পর চৌদ্দ দেয়া হয়, উঁচু দালানেও বারোতলার পর তেরোতলা না হয়ে চৌদ্দতলা থাকে! বিজ্ঞানীরা এই ধরনের কুসংস্কারকে গুরুত্ব না দেবার জন্যে চন্দ্রাভিযানে এপোলো থার্টিন পাঠিয়েছিলেন বিশাল দুর্ঘটনার কারণে সেই মহাকাশ অভিযানকে স্থগিত করে কোনোভাবে মহাকাশচারীদের পৃথিবীতে ফিরিয়ে আনা হয়! তেরো সংখ্যাটিকে যারা ভয় পায় তাদের একটা গাল ভরা নাম আছে সেটা হচ্ছে ট্রায়াকাইডেফাকোবিয়া (Triakaidekaphobia)!

গণিতের দৃষ্টিতে 13 হচ্ছে ছয় নম্বর প্রাইম এবং সাত নম্বর ফিবোনাচি সংখ্যা।

20. 23

23! সংখ্যাটিতে 23টি অঙ্ক রয়েছে। যদি কোথাও 23 জন মানুষ থাকে তাহলে শতকরা পঞ্চাশ ভাগ থেকেও বেশি সম্ভাবনা থাকে যে দুজনের জন্মদিন হবে এক তারিখে। বছরের 365 দিনের তুলনায় 23 খুব বড় সংখ্যা না হলেও 23 জন মানুষ দিয়ে জোড়ার সংখ্যা অনেক।

21. 28

6-এর পর 28 হচ্ছে দ্বিতীয় পারফেক্ট নাম্বার কারণ 28-এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে 1, 2, 4, 7 ও 14 এবং এগুলো যোগ করলে হয় 28. এর পরের কয়েকটি পারফেক্ট নম্বর হচ্ছে যথাক্রমে 496, 8128, 33550336 ইত্যাদি।

22. 29·530588

চান্দ্র মাসের সময় কাল হচ্ছে 29·530588 দিন কিংবা 29 দিন 12 ঘণ্টা 44 মিনিট 2·8 সেকেণ্ড।

18, 446, 744, 073, 709, 551, 615 [20 অঙ্ক]

23. 51

সব সংখ্যার ভেতর থেকেই কিছু না কিছু চমকপ্রদ বিশেষত্ব বের করা যায়। এই সংখ্যাটির মাঝে চমকপ্রদ কিছু নেই— সেটাই হচ্ছে এর বিশেষত্ব!

24. 57·29577951

এক রেডিয়ানের ডিগ্রির সংখ্যা।

25. 71

বাংলাদেশের স্বাধীনতা সংগ্রামের বছর। 20তম প্রাইম সংখ্যা 71 থেকে ছোট সবগুলো প্রাইম সংখ্যার যোগফলকে 71 দিয়ে ভাগ করা যায় 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 = 568÷71 = 8

71 থেকে ছোট এরকম সংখ্যা হচ্ছে 5 এবং বড় হচ্ছে 369, 119 এবং 415, 074, 643 এছাড়া আর একটিও নেই!

26. 86

2^{86} সংখ্যাটির মাঝে কোনো শূন্য নেই। এটি সম্ভবত এই বৈশিষ্ট্য থাকা 2-এর সর্বোচ্চ পাওয়ার।

27. 97

1-কে 97 দিয়ে ভাগ করলে যে রাশিমালা পাওয়া যায় তার মাঝে রয়েছে 96টি অঙ্ক, যেটি বারবার ঘুরে ঘুরে আসতে থাকে—

$\frac{1}{97}$ = 0·01030 92783 50515 46391 75257 73195

87628 86597 93814 43298 96907 21649

48453 60824 74226 80412 37113 40206

18556 7....

তারপর আবার এই অঙ্কগুলো আসতে শুরু করবে।

28. 100

দশ ভিত্তিক সংখ্যায় 100 নিঃসন্দেহে একটা গুরুত্বপূর্ণ সংখ্যা, সবকিছুই আমরা 100-এর অনুপাতে বের করার চেষ্টা করি। পরীক্ষায় ছাত্রছাত্রীরা 100-এর ভেতরে পরীক্ষা দেয়, ক্রিকেট খেলায় সেঞ্চুরি হয় একশতে, একশ বছর পরপর নতুন শতাব্দী শুরু হয়।

গণিতের দৃষ্টিতেও 100-এর কিছু বৈশিষ্ট্য রয়েছে। যেমন-

$100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

প্রথম 23টি প্রাইম সংখ্যা যোগ করলে হয় 100

যারা সংখ্যা নিয়ে খেলতে পছন্দ করেন তারা 1 থেকে 9 পর্যন্ত সবগুলো সংখ্যা ব্যবহার করে 100 তৈরি করার চেষ্টা করেন। সেরকম দুটো উদাহরণ—

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 \times 9) = 100$

$123 - 45 - 67 + 89 = 100$

29. 113

এটি হচ্ছে তিন অঙ্কের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা যে সংখ্যাটার অঙ্কগুলো যেভাবেই সাজানো হোক সেটা হবে একটা প্রাইম সংখ্যা— 113, 131, 311 এরকম পরের দুটো সংখ্যা হচ্ছে 337 এবং 199.

এর পরের সংখ্যা দুটো খানিকটা একঘেয়ে! 1, 111, 111, 111, 111, 111, 111 এবং 11, 111, 111, 111, 111, 111, 111

30. 114

একটা কিউবের ছয়টা পৃষ্ঠদেশ। তিনটা ভিন্ন ভিন্ন রং দিয়ে এর ছয়টা পৃষ্ঠদেশ সব মিলিয়ে 114-টা ভিন্ন ভিন্নভাবে রং করা যায়।

31. 127

$127 = 2^7 - 1$ এবং বাইনারিতে এটা হচ্ছে 1,111,111 এটি একটি প্রাইম সংখ্যা। যে সকল প্রাইমসংখ্যা $2^p - 1$ ধরনের তাদের বলা হয় মারজেন প্রাইম। এখানে p যদি প্রাইম না হয় তাহলে $2^p - 1$ কখনোই প্রাইম হবে না। তবে p যদি প্রাইম হয় তাহলে $2^p - 1$ কখোনো কখোনো প্রাইম সংখ্যা হয়। $2^7 - 1$ প্রাইম সংখ্যা। $2^{11} - 1 = 2047 = 89 \times 23$ প্রাইম সংখ্যা নয় আবার $2^{13} - 1 = 8191$ প্রাইম সংখ্যা।

32. 132

132 যে তিনটি অঙ্ক দিয়ে তৈরি সেই অঙ্কগুলো দিয়ে দুই অঙ্কের যে কয়টি সংখ্যা তৈরি করা সম্ভব তার সবগুলো যোগ করলে 132 পাওয়া যায়। এভাবে পাওয়া সংখ্যাগুলোর মাঝে এটা সবচেয়ে ছোট সংখ্যা।

$$13 + 12 + 31 + 32 + 21 + 23 = 132$$

33. 144

$144 = 12^2$, এটি 12তম ফিবোনাচি সংখ্যা এবং একমাত্র ফিবোনাচি সংখ্যা যেটি একটি বর্গ সংখ্যা।

34. 145

145 = 1! + 4! + 5! অর্থাৎ এটা যে অঙ্কগুলো দিয়ে তৈরি হয়েছে তার ফ্যাক্টরিয়ালের যোগফল।

35. 169

$169 = 13^2$ এবং $961 = 31^2$

এটা যে তিনটি অঙ্ক দিয়ে তৈরি হয়েছে তার ফ্যাক্টরিয়াল যোগ করা হলে পাওয়া যায়—

1! + 6! + 9! = 363,601

এবার 363 601 তে অঙ্কগুলো দিয়ে তৈরি তার ফ্যাক্টরিয়াল যোগ করা হলে পাওয়া যায়—

3! + 6! + 3! + 6! + 0! + 1! = 1454

এবার 1454 যে অঙ্কগুলো দিয়ে তৈরি হয়েছে সেগুলো যোগ করা হলে পাওয়া যায়—

1! + 4! + 5! + 4! = 169

36. 216

$216 = 6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$ একটি কিউবকে তিনটি কিউবের যোগফল হিসেবে লেখা সবচেয়ে ছোট সংখ্যা

37. 257

257-কে লেখা যায় $4^4 + 1$ অর্থাৎ $n^n + 1$ এধরনের প্রাইম সংখ্যা অত্যন্ত বিরল, যদি কোনোটি থাকে তাহলে তার অঙ্কগুলোর সংখ্যা 300,000 থেকে বেশি হবে।

38. 360

একটি পরিপূর্ণ বৃত্তে থাকে 360 ডিগ্রি।

39. 365·24219878

এক বছরে দিনের সংখ্যা 365·24219878 এটাকে অন্যভাবে বলা যায় 365 দিন 5 ঘণ্টা 48 মিনিট 45·9747 সেকেন্ড। যেহেতু দিনের সংখ্যা পরিপূর্ণ 365 নয় সেখানে আরো 5 ঘণ্টা 48 মিনিট 45·9747 সেকেন্ড বাড়তি আছে, প্রতি বছরে সেটা যোগ হতে থাকে। চার বছরে সেটা প্রায় একদিনের সমান হয়ে যায়, তাই প্রতি চার বছর পর পর লিপইয়ার 29 দিনের ফেব্রুয়ারি মাস তৈরি করে সেটাকে হিসেবে আনতে হয়। তবে যেটা গুরুত্বপূর্ণ সেটা হচ্ছে বাড়তি সময়টুকু পুরোপুরি ছয় ঘণ্টার কম। তাই আনুমানিক একশ আটাইশ বছরে একটা পুরোদিন কমাতে হয়। সেটা কমানোর জন্যে যে সব বছর 100 দিয়ে ভাগ হয় সেটা সাধারণভাবে লিপ ইয়ার হবার কথা থাকলেও ফেব্রুয়ারি মাস হয় 28 দিনের। কিন্তু যেসব বৎসর 400 দিয়ে ভাগ হয় সেটাকে লিপ ইয়ার হিসেবে বিবেচনা করা হয়। তারপরেও 3320 বছরে একবার একটা বাড়তি দিন চলে আসে— আপাতত সেটা এত ভবিষ্যতে তাই কেউ সেটা নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছে না!

40. 400

400 একটা চমকপ্রদ সংখ্যা, কারণ $400 = 7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3$! অর্থাৎ $400 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3$

41. 495

তিনটি ভিন্ন ভিন্ন অঙ্কের যে-কোনো সংখ্যাকে বড় থেকে ছোট এবং ছোট থেকে বড় হিসেবে সাজিয়ে বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যাটিকে বিয়োগ করতে থাকলে শেষ পর্যন্ত যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে সেটা হচ্ছে 495।

ধরা যাক সংখ্যাটি 123, তাহলে 321 থেকে 123 বিয়োগ করে পাই 198, এবারে 981 থেকে 189 বিয়োগ করে পাই 693, এবারে 963 থেকে 369 বিয়োগ করে পাই 297 এবং 972 থেকে 279 বিয়োগ করে পাই 495!

42. 510

7^{510} প্রায় 10^{431}, 7-কে কোনো পাওয়ার দিয়ে 10-এর পাওয়ারের কাছাকাছি নেয়ার এটা সবচেয়ে ভালো উদাহরণ। (প্রকৃত সংখ্যাটি হচ্ছে $7^{510} = 1{\cdot}000000937776536... \times 10^{41}$)

43. 641

ফার্মার একটা কনজেকচার ছিল যে $2^{2^n} + 1$ সব সময়ে প্রাইম সংখ্যা। 1742 সালে অয়লার প্রথম তার একটা ব্যতিক্রম দেখিয়েছিলেন, $2^{25} + 1$-কে 641 দিয়ে ভাগ দেয়া যায়! এখানে 641 ছিল $10 \times 2^6 + 1$

44. 666

এই সংখ্যাটিকে শয়তানের সংখ্যা হিসেবে বিশ্বাস করা হয়। তাই 06 সালের জুন মাসের 6 তারিখ অনেক মানুষ খুব আতঙ্কের মাঝে ছিল।

45. 729

$729 = 9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3$ প্লেটোর রিপাবলিকে এই সংখ্যাটিকে একটা রহস্যময় সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করা হয়েছিল।

46. 1024

কম্পিউটারের মেমোরির হিসেবে কিলো বলতে 1000 না বুঝিয়ে 1024 $= 2^{10}$-কে বোঝানো হয়।

47. 1089

ভিন্ন তিন অঙ্কের যে-কোনো সংখ্যাকে উল্টো করে মূলসংখ্যা থেকে বিয়োগ করার পর বিয়োগফলকে আবার উল্টো করে যোগ করলে সবসময় 1089 পাওয়া যায়। যেমন- 623 – 326 = 297 এবং 297 + 792 = 1089

এর আরেকটি বিশেষত্ব রয়েছে—

$$1089 \times 9 = 9801$$
$$10989 \times 9 = 98901$$
$$109989 \times 9 = 989901$$
$$1099989 \times 9 = 9899901$$ এভাবে চলতেই থাকবে!

48. 1681

$1681 = 41^2$ এটি একটি বর্গ সংখ্যা। এটি একমাত্র বর্গ সংখ্যা যেটি $16 = 4^2$ এবং $81 = 9^2$ এরকম দুই অঙ্কের দুটি বর্গ দিয়ে তৈরি হয়েছে।

49. 1729

এমনিতে এই সংখ্যাটি এমন কিছু বিখ্যাত সংখ্যা নয় কিন্তু এটি বিখ্যাত হয়ে রয়েছে একটি বিশেষ ঘটনার কারণে। রামানুজন অসুস্থ এবং জি এইচ হার্ডি তাকে দেখতে এসেছেন, আলাপের ছলে হার্ডি রামানুজনকে বললেন, আমি যে ট্যাক্সি ক্যাবে এসেছি তার নম্বর হচ্ছে 1729, কী সাধারণ একটা সংখ্যা! রামানুজন সাথে সাথে বললেন, "কে বলেছে এটা সাধারণ সংখ্যা ? এটা হচ্ছে সেই ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যেটাকে দুইভাবে দুটি কিউবের যোগফল হিসেবে লেখা যায়!" $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$

50. 2592

$2592 = 2^5 \times 9^2$ এরকম প্যাটার্ন এই একটাই আছে!

51. 4104

ক্ষুদ্রতম যে সংখ্যাটি তিনভাবে দুটি কিউবের যোগফল হিসেবে লেখা যায়—

$4104 = 16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3 = (-12)^3 + 18^3$

52. 6174

এই সংখ্যাটির নাম কাপ্রিকার ধ্রুবক। চার অঙ্কের কোনো সংখ্যা (সবগুলো অঙ্ক যেন এক না হয়) নিয়ে অঙ্কগুলোকে বড় থেকে ছোট এবং ছোট থেকে বড় হিসেবে সাজিয়ে বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যাটি বিয়োগ করতে হবে। এভাবে করে যেতে থাকলে সব সময়েই প্রক্রিয়াটি শেষ হবে কাপ্রিকার ধ্রুবক 6174 দিয়ে! যেমন- আমরা শুরু করি 1971 দিয়ে 1971 হবে 9711 এবং 1179

$9711 - 1179 = 8532$

$8532 - 2358 = 6174$

53. 6666

6666-কে বর্গ করলে পাওয়া যায় 4443 5556 এখন প্রথম আর পরের অংশ যোগ করলে পাওয়া যায় 4443 + 5556 = 9999 এটা যে-কোনো সংখ্যক 6-এর জন্যেই সত্যি!

54. 7744

$7744 = 88^2$ একমাত্র বর্গ যার এরকম প্যাটার্ন রয়েছে।

55. 8169

দুটি প্রাইম সংখ্যার ভেতরে পার্থক্য যদি 2 হয় তাহলে তাকে বলে টুইন প্রাইম, যেমন 3, 5; 11,13 কিংবা 71, 73.

প্রথম এক মিলিয়ন প্রাইম সংখ্যার ভেতরে 8169 জোড়া টুইন প্রাইম রয়েছে। তালিকাটা আরো বিস্তৃত করা যায়—

10	এর ভেতরে আছে	2টি
100	এর ভেতরে আছে	8টি
1000	এর ভেতরে আছে	35টি
10,000	এ	205টি
100,000	এ	1224টি
1000,000	এ	8169টি

56. 8208

এটাকে লেখা যায় $8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$

57. 10,989

9 দিয়ে গুণ করলে সংখ্যাটি উল্টে যায়

$10,989 \times 9 = 98,901$

58. 12321

যে সংখ্যার অঙ্কগুলো উল্টো করে লিখলেও সংখ্যাটি একই থাকে তাকে বলে পেলিনড্রমিক (palindromic)। 12321 একটি পেলিনড্রমিক সংখ্যা। আরেকটা পেলিনড্রমিক সংখ্যার বর্গ : $111^2 = 12321$ শুধু 111 নয়, 1111 কিংবা 11,111 এরকম সব সংখ্যার বর্গ নিলেও সেগুলো হবে পেলিনড্রমিক।

$1,111^2 = 1,234,321$

$11,111^2 = 123,454,321$ ইত্যাদি।

59. 54,748

এটাকে তার অঙ্কগুলোর পঞ্চম পাওয়ারের যোগফল হিসেবে লেখা যায়—

$54,748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$

60. 142,857

এটি $\frac{1}{7}$ এর দশমিকে বারবার ফিরে আসা অংশ।

$\frac{1}{7} = 0{\cdot}142857\ 142857\ .....$

142,857-কে 1 থেকে 6 দিয়ে গুণ করলে সংখ্যাটি বৃত্তাকারে ঘুরতে থাকে।

$142857 \times 1 = 142,857$

$142857 \times 2 = 285,714$

$142857 \times 3 = 428,571$

$142857 \times 4 = 571,428$

$142857 \times 5 = 714,285$

$142857 \times 6 = 857,142$

61. 314,159

π-এর দশমিক রূপ থেকে যে প্রাইম সংখ্যা বের করা যায় সেগুলো হচ্ছে 3, 31 এবং তারপর 314, 159. এর পরের প্রাইম সংখ্যাটি হচ্ছে—

31,415,926,535,897,932,384,626,433,832,795,028,841

62. 4,937,775

যে-কোনো সংখ্যাকে তার প্রাইম উৎপাদকের গুণফল হিসেবে লেখা যায়। কোনো সংখ্যার অঙ্কগুলো যোগ করলে যে যোগফল পাওয়া যায় তার প্রাইম উৎপাদকের যোগফলও যদি তার সমান হয় তাহলে সেটাকে বলে স্মীথসংখ্যা।

4,937,775 একটা স্মীথসংখ্যা কারণ—

$4,937,775 = 3 \times 5 \times 5 \times 65,837$ এবং দুদিকের সকল অঙ্কগুলো যোগ করলেই পাওয়া যায় 42. স্মীথসংখ্যাগুলো হচ্ছে 4, 22, 27, 58, 85, 94....

মজার ব্যাপার হচ্ছে স্মীথসংখ্যার উদ্ভাবকের নাম এ উইলানস্কী এবং স্মীথ হচ্ছে তার শ্যালকের নাম। 4,937,775 সেই শ্যালকের টেলিফোন নম্বর!

63. 10,213,223

এটি এমন একটি সংখ্যা যেটা নিজেকে নিজে ব্যাখ্যা করে। যেমন এই সংখ্যাটিকে এভাবে পড়তে হবে— এখানে আছে 1 সংখ্যক 0, 2 সংখ্যক 1, 3 সংখ্যক 2 এবং 2 সংখ্যক 3. এ ধরনের সংখ্যা তৈরি করা খুব সহজ নয়। একটা উপায় হচ্ছে প্রথমে কোনো একটা সংখ্যা দিয়ে শুরু করা, যেমন 123 এখানে আছে 1-টা 1, 1-টা 2 এবং 1-টা 3 কাজেই নিজেকে নিজে ব্যাখ্যা করার কায়দায় লিখতে পারি 111213, এখন এই নতুন সংখ্যাটিকে নিজেকে নিজে ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করা যায়। এখানে আছে 4-টা 1, 1-টা 2 এবং 1-টা তিন। কাজেই এবারে লিখব 411213 এভাবে আমরা নিজেকে নিজে ব্যাখ্যা করেই যাব যতক্ষন পর্যন্ত না সংখ্যাটি পেয়ে যাই। তাহলে দেখা যাক $411213 \rightarrow 31121314 \rightarrow 41122314 \rightarrow 31221214\ 21322314$ এটি হয়ে গেছে নিজেকে নিজে ব্যাখ্যা করেছে।

64. 20,615,673

অয়লারের একটা কনজেকচার ছিল যে কোনো সংখ্যার চতুর্থ পাওয়ার তিনটি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যার চতুর্থ পাওয়ারের যোগফল হতে পারবে না। নোয়াম এলকিস 1988-তে নিউ ইয়র্ক টাইমসের খবর হিসেবে চলে এলেন যখন তিনি অয়লারকে ভুল প্রমাণিত করে দেখালেন—

$(20,615,763)^4 = (2,682,440)^4 + (15,365,639)^4 + (18,796,760)^4$

65. 73,939,133

এই সংখ্যাটি একটি প্রাইম সংখ্যা। ডানদিক থেকে একটি একটি অঙ্ক কমাতে থাকলেও একেবারে শেষ পর্যন্ত (..., 739, 73, 7) এটি প্রাইম সংখ্যা হিসেবেই থেকে যায়!

66. 272,400,600

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ ধারাটি হচ্ছে হারমনিক ধারা এই সমষ্টি অসীম, কিন্তু এটি অত্যন্ত ধীরগতিতে সেখানে পৌঁছায়। এই ধারার 272, 400, 600-টি পদ যোগ করা হলে সমষ্টি মাত্র 20-কে ছুঁয়ে যায়। সমষ্টিটি 100 অতিক্রম করতে আনুমানিক $1 \cdot 5 \times 10^{43}$ পদ যোগ করতে হয়।

67. 381,654,729

এই সংখ্যার প্রথম অঙ্কটি (3)1 দিয়ে ভাগ করা যাবে। প্রথম দুটি অঙ্ক দিয়ে তৈরি সংখ্যা (38)-কে 2 দিয়ে ভাগ করা যাবে। প্রথম তিনটি অঙ্ক দিয়ে তৈরি সংখ্যা (381)-কে 3 দিয়ে ভাগ করা যায়—এভাবে একেবারে শেষ অঙ্কটি পর্যন্ত গেলে সেটা 9 দিয়ে ভাগ করা যাবে! 25 অঙ্কের এরকম বিশাল আরেকটি সংখ্যা হচ্ছে—

3,608,528,850,368,400,786,036,725

68. 455,052,511

10^{10} পর্যন্ত সংখ্যার ভেতরে মোট প্রাইমসংখ্যা রয়েছে 455,052,511 টি। 10 থেকে শুরু করে 10^{10} পর্যন্ত সংখ্যায় মোট কতগুলো প্রাইমসংখ্যা আছে তার তালিকাটা এরকম :

10	...	4
10^2	...	25
10^3	...	168
10^4	...	1,229
10^5	...	9,592
10^6	...	78,498
10^7	...	664,579
10^8	...	5,761,455
10^9	...	50,847,534
10^{10}	...	455,052,511

69. 987,654,321

এখানে 1 থেকে 9 পর্যন্ত সবগুলো সংখ্যা রয়েছে। ডানদিক থেকে বামদিকে অঙ্কগুলো বেড়ে গেছে। এই সংখ্যার বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এটাকে 1, 2, 4, 5, 7 এবং 8 দিয়ে গুণ করলেও 1 থেকে 9 পর্যন্ত (শূন্যসহ) সবগুলো অঙ্ক পাওয়া যায়। সংখ্যাটির আরেকটা বৈশিষ্ট্য :

987,654,321 – 123,456,789 = 864,197,532

যেখানে আবার 1 থেকে 9 পর্যন্ত সব অঙ্ক রয়েছে।

70. 999,999,937

নয় অঙ্কের সবচেয়ে বড় প্রাইমসংখ্যা, 10^9 থেকে মাত্র 63 কম!

71. 1,787,109,376

দশ অঙ্কের মাত্র দুটো সংখ্যা আছে যাকে বর্গ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তার শেষ অংশ হুবহু এই সংখ্যাটি! বামদিক থেকে একটি একটি অঙ্ক কমিয়ে আনলেও যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তার শেষ অংশ হুবহু সেই সংখ্যা।

দশ অঙ্কের এরকম দ্বিতীয় সংখ্যাটি হচ্ছে : 8,212,890,625

72. 1,979,339,339

সবচেয়ে বড় প্রাইমসংখ্যা যার ডানদিক থেকে একটি করে অঙ্ক কমিয়ে আনলেও এটি প্রাইম থাকে। (একেবারে শেষ অঙ্কটি 1, সেটা অবশ্যি প্রাইম নয়!)

73. 9,876,543,210

এই সংখ্যা থেকে অঙ্কগুলো উল্টো করে লেখা সংখ্যাটি বিয়োগ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় সেখানেও 0 থেকে 9 পর্যন্ত দশটি অঙ্কই রয়েছে।

74. 1,000,000,000,061

এই সংখ্যাটি এবং এর থেকে 2 বড় 1,000,000,000,063 এই দুটি বিশালসংখ্যা হচ্ছে দুটি টুইন প্রাইম— সংখ্যাদুটির বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এগুলো মনে রাখা বেশ সহজ!

75. 6,963,472,309,248

ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যেটাকে দুটি কিউবের যোগফল হিসেবে চারটি ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে লেখা যায় :

$$\begin{aligned}6{,}963{,}472{,}309{,}248 &= (2421)^3 + (19{,}083)^3\\ &= (5436)^3 + (18{,}948)^3\\ &= (10{,}200)^3 + (18{,}072)^3\\ &= (13{,}322)^3 + (16{,}630)^3\end{aligned}$$

76. 11,410,337,850,553

এটি একটি প্রাইম সংখ্যা এর সাথে 4,609,098,694,200 সংখ্যাটি 22 বার পর্যন্ত যোগ করা যায় এবং প্রত্যেকবারই একটা প্রাইম সংখ্যা পাওয়া যায়। এটি এখন পর্যন্ত খুঁজে পাওয়া সবচেয়ে বড় উদাহরণ।

77. 277,777,788,888,899

যে-কোনো সংখ্যা অঙ্কগুলো পরস্পরের সাথে গুণ করে মোট অঙ্কের সংখ্যা 1-এ নামিয়ে আনতে যতগুরো ধাপ অতিক্রম করতে হয় তাকে বলে সেই সংখ্যার পারসিস্টেন্স। যেমন- 10-এর পারসিস্টেন্স হচ্ছে 1. $1 \times 0 = 0$ এক ধাপে এক সংখ্যায় চলে আসা গেছে। 25-এর পারসিস্টেন্স 2, কারণ $2 \times 5 = 10$ এবং $1 \times 0 = 0$. এখানে দুই ধাপ লেগেছে। 2,77,777,788,888,899 এই সংখ্যাটির পারসিস্টেন্স হচ্ছে 11 এবং 11 পারসিস্টেন্সের এটা হচ্ছে ক্ষুদ্রতম সংখ্যা।

যেটা বিস্ময়কর সেটা হচ্ছে পারসিস্টেন্স 12-এর একটা সংখ্যা পেতে গেলে ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি 10^{50} থেকেও বড় হতে হবে!

78. 052,631,578,947,368,421

এটি হচ্ছে $\frac{1}{19}$ এর দশমিক অংশটুকু যেটা বার বার ঘুরে আসে। ইচ্ছে করলে এটাকে অন্যভাবেও তৈরি করা যায়। 2-এর পাওয়ারগুলো উল্টোভাবে বিস্তৃত করে যোগ করলে এই অংশটি চলে আসে।

```
                 1
                2
               4
              8
            16
           32
          64
        128
       256
      512
      ...
     ...
----------------
... 8947368421
```

79. $2^{58} + 1$

1869 সালে ল্যানড্রি এটাকে দুটো উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেন তার নিজের ভাষায় এই সংখ্যাটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে গিয়ে তার যত দীর্ঘ সময় এবং দীর্ঘ পরিশ্রম করতে হয়েছে সেরকম আর কাউকে করতে হয় নি। মজার ব্যাপার হচ্ছে তার দশ বছর পর অরিফিউইল খুব সহজে এভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে ফেললেন—

$(2^{29} - 2^{15} + 1)(2^{29} + 2^{15} + 1)$

যেটা একটা স্কুলের ছেলেও করে ফেলতে পারবে। এই ধরনের সমাধানকে বলা হয় অরিফিউইলিয়ান এবং সাধারণভাবে লেখা হয়—

$(2^{4n+2} + 1) = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)$

80. $2^{67} - 1$ = 147, 573, 952, 589, 676, 412, 927

মারজেন ধারণা করেছিলেন এটি প্রাইম সংখ্যা। 1903 সালের অক্টোবর মাসে আমেরিকান ম্যাথমেটিকেল সোসাইটির একটি সভায় গণিতবিদ কোল একটি পেপার দেবার কথা ঘোষণা করলেন যার শিরোনাম ছিল, "বড় সংখ্যার উৎপাদকে বিশ্লেষণ প্রসঙ্গে"। যখন তার পেপারটি উপস্থাপনার সময় হলো তিনি মঞ্চে গিয়ে একটি কথাও না বলে বোর্ডে চক দিয়ে লিখলেন—

147, 573, 952, 589, 676, 412, 927 = (193,707,721) × (761,838,257,287)

81. 357,686,312,646,216,567,629,137

এটি একটি চমকপ্রদ প্রাইম সংখ্যা। বামদিক থেকে একটি একটি করে অঙ্ক কমাতে থাকলেও এটি প্রাইম সংখ্যা হিসেবে একেবারে শেষ পর্যন্ত (...,9137,137,37,7) থেকে যায়।

82. 2,235,197,406,895,366,368,301,560,000

তাশ খেলায় চারজন খেলোয়াড়ের হুবহু পুরো সেট পেতে হলে 2,235,197,406,895,366,368,301,560,000 সংখ্যক বার তাশ বেটে দিতে হবে!

83. 10^{33}

10^9 থেকে 10^{5000}-এর ভেতর 10^{33} একমাত্র সংখ্যা যেটি দুটি সংখ্যার গুণফল হিসেবে লেখা যায় যে সংখ্যাগুলোর একটা অঙ্কও শূন্য নয়!

10^{33} = 8,589,934,592 × 16,415,321,826,934,814,453,125

84. 191, 918, 080, 818, 091, 909, 090, 909, 190, 818, 080, 819, 191

এটি একটি প্রাইম সংখ্যা। এটি পেলিনড্রমিক অর্থাৎ অঙ্কগুলো উল্টোভাবে লিখলেও সংখ্যাট হুবহু একই হয়। এটি সোফি জারমেইন ধরনের প্রাইম সংখ্যা কারণ এই সংখ্যাটি যদি N হয় তাহলে 2N + 1 সংখ্যাটিও প্রাইম সংখ্যা। ঘটনাক্রমে সেই প্রাইম সংখ্যাটিও পেলিনড্রমিক প্রাইম।

85. 69, 720, 375, 229, 712, 477, 164, 533, 808, 935, 312, 303, 556, 800

1 থেকে 100 পর্যন্ত প্রত্যেকটা সংখ্যা দিয়ে এই সংখ্যাটাকে ভাগ করা সম্ভব!

86. 374, 144, 419, 156, 711, 147, 060, 143, 317, 175, 368, 453, 031, 918, 731, 001, 856 [51 অঙ্ক]

এই সংখ্যাটি সমান 2^{168} কিন্তু বিস্ময়করভাবে এখানে 2 অঙ্কটি অনুপস্থিত!

87. 10^{100} [101-টি অঙ্ক]

1-এর পরে 100-টা শূন্য বসালে যে সংখ্যা পাওয়া যায় সেটাই হচ্ছে গুগোল। গণিতবিদ কাসনার প্রথম এই সংখ্যাটির প্রচলন করেন, গুগোল (google) নামটি দিয়েছে কাসনারের নয় বছরের নাতি!

এখানে মনে রাখা ভালো গুগোল একটি বিশাল সংখ্যা— কারণ পুরো বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের অণুপরমাণুর সংখ্যা গুগোল থেকে কম—10^{80} থেকে

10^{87} এর ভেতরে! গুগোলকে ব্যবহার করে আরো বড় একটি সংখ্যা তৈরি করা হয়েছে সেটাকে বলে গুগোলপ্লেক্স— 10^{google} অর্থাৎ 1-এর পর গুগোল সংখ্যক শূন্য লিখলে যে সংখ্যা হয় সেটাকে বলে গুগোলপ্লেক্স।

88. 114, 381, 625, 757, 888, 867, 669, 235, 779, 976, 146, 612, 010, 218, 296, 721, 242, 362, 562, 561, 842, 935, 245, 733, 897, 830, 597, 123, 563, 958, 705, 058, 989, 075, 147, 599, 290, 026, 879, 543, 541 [129 অঙ্ক]

বড় বড় দুটো প্রাইম সংখ্যা ব্যবহার করে গোপন তথ্য পাঠানোর একটা প্রক্রিয়া হিসেবে আরএসএ কোম্পানী 129 অঙ্কের এই বিশাল সংখ্যাটি প্রকাশ করে সারা পৃথিবীকে এর উৎপাদক দুটি বের করার চ্যালেঞ্জ জুড়ে দিয়েছিল। তাদের হিসেবে বর্তমান জগতের কম্পিউটার ব্যবহার করে এর উৎপাদক বের করতে প্রায় অনন্তকাল লেগে যাবে। কিন্তু অবিশ্বাস্য হলেও সত্যি প্রায় 600 জন উৎসাহী গণিতবিদ ইন্টারনেটে অসংখ্য কম্পিউটার ব্যবহার করে এক বছরের কম সময়ে এর উৎপাদক দুটো বের করে ফেলেছিলেন!

89. 82818079 ... 10987654321 [155 অঙ্ক]

155 অঙ্কের একটা প্রাইম সংখ্যা মনে রাখা সহজ নয়— কিন্তু এটি মনে রাখা খুব সহজ, কারণ এটা ডানদিক থেকে 1, 2, 3, 4 এভাবে বাড়তে বাড়তে 82-তে গিয়ে শেষ হয়েছে!

90. 1111 ... 111 [317 অঙ্ক]

317টি 1 পাশাপাশি লিখলে যে সংখ্যাটি তৈরি হয় সেটি রিপ ইউনিট এবং একটি প্রাইম সংখ্যা।

91. $(109876543212345678910)_{42}1$

ব্র্যাকেটের অংশটুকু 42 বার তারপর 1. এটি একটি পেলিনড্রমিক প্রাইম।

92. 450!

1950 সালে কম্পিউটারের সাহায্য ছাড়াই এ সংখ্যাটি বের করা হয়েছিল, এখানে মোট 1001-টি অঙ্ক বলে এটাকে আরব্য রজনীর ফ্যাক্টরিয়াল বলা হয়।

[1031 অঙ্ক]

93. 111 ... 1111

1031-টি 1 পরস্পর বসিয়ে এটি এখন পর্যন্ত পাওয়া সর্ববৃহৎ রিপ ইউনিট প্রাইম।

[1104 অঙ্ক]

94. $7532\times(10^{1104}-1)/(10^4-1)+1$

এই প্রাইম সংখ্যার প্রত্যেকটি অঙ্ক প্রাইমসংখ্যা।

95. $2\times10^{3020}-1$

এই প্রাইম সংখ্যায় আছে একটি 1 এবং বাকি সব 9!

96. $2^{30402457}-1$

এখন পর্যন্ত পাওয়া সবচেয়ে বড় মার্জেন প্রাইম।

[369, 693, 100 অঙ্ক]

97. 9^{9^9}

তিনটি অঙ্ক ব্যবহার করে এবং অন্য কিছু ব্যবহার না করে সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি এভাবে লেখা সম্ভব!

98. $1^{billion}$

1-এরপর এক বিলিয়ন শূন্য লেখা হলে সংখ্যাটিকে বলে গিগাপ্লেক্স

99. $10^{10^{10^{34}}}$

স্কু এর সংখ্যা। একটা নির্দিষ্ট সংখ্যার ভেতরে কতগুলো প্রাইম সংখ্যা তার অনুমানটি প্রকৃত সংখ্যা থেকে বেশি বলে ধারণা করা হয়। রিমান হাইপোথিসিস যদি সত্যি হয় তাহলে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার পর এই অনুমানটি প্রকৃত সংখ্যা থেকে কম হতে শুরু করবে। সংখ্যা যত বাড়তে থাকবে এই বেশি এবং কম চলতে থাকবে।

যে সংখ্যায় পৌছালে এই কম বেশি পরিবর্তনটি হবে সেটাই হচ্ছে স্কু-এর সংখ্যা।

100. $3\uparrow\uparrow\uparrow3$ TM3

গিনিজ বুক অফ রেকর্ডে সবচেয়ে বড় সংখ্যা হিসেবে যে সংখ্যাটি সংরক্ষিত আছে সেটা হচ্ছে গ্রাহামের সংখ্যা। প্রচলিত চিহ্ন দিয়ে এই সংখ্যা প্রকাশ করা যায় না বলে এর জন্যে নতুন চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়েছে। গ্রাহামের সংখ্যা বোঝার জন্যে আগে কেমন করে এই নতুন চিহ্নটি কেমন করে ব্যবহার করতে হয় সেটি বুঝতে হবে। চিহ্নটি হচ্ছে ↑ এটাকে পাওয়ার হিসেবে বোঝানো হয়। $m\uparrow3$ হচ্ছে m^3

অর্থাৎ $m\uparrow n$ = $m \times m \times m ... \times m$ (n সংখ্যক)

$m\uparrow\uparrow n$ = $m\uparrow m\uparrow m ... \uparrow m$ (n সংখ্যক)

$m\uparrow\uparrow\uparrow n$ = $m\uparrow\uparrow m\uparrow\uparrow m ... \uparrow m$ (n সংখ্যক)

$m\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow n$ = $m\uparrow\uparrow\uparrow m\uparrow\uparrow\uparrow m ... \uparrow\uparrow\uparrow m$ (n সংখ্যক)

এবারে আবার আমরা গ্রাহামের সংখ্যায় ফিরে যাই। এটা বোঝার জন্যে আমাদের প্রথমে বুঝতে হবে $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow3$ সংখ্যাটিকে। শুরু করা যাক—

(1) প্রথমে ধরে নিই $N_1 = 3\uparrow3$ এখানে এই চিহ্নটি দিয়ে বোঝানো হচ্ছে $3^3 = 27$

(2) এবারে ধরে নিই $N_2 = 3\uparrow\uparrow3$

$= 3\uparrow3\uparrow3$

$= 3\uparrow27$

$= 7,625,597,484,987$

(3) এবারে ধরে নিই $N_2 = 3\uparrow\uparrow\uparrow3$

$= 3\uparrow\uparrow3\uparrow\uparrow3$

$= 3\uparrow\uparrow N_2$

$= 3\uparrow3\uparrow3\uparrow3\uparrow3 ... \uparrow3$ (N_3 সংখ্যক)

এটি একটি বিশাল সংখ্যা। সংখ্যাটা বোঝার জন্যে জানতে হবে $3\uparrow3 = 3^3$, $3\uparrow3\uparrow3 = 3^{3^3}$ ইত্যাদি। কাজেই N_3 সংখ্যাটি একটি 3-এর পাওয়ারের সুদীর্ঘ স্তম্ভ ছাড়া আর কিছু নয়।

(4) এবারে ধরে নিই $N_4 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow3$

$= 3\uparrow\uparrow\uparrow3\uparrow\uparrow\uparrow3$

$= 3\uparrow\uparrow\uparrow N_3$

$= 3\uparrow\uparrow3\uparrow\uparrow3 ... \uparrow\uparrow3$ (N_3 সংখ্যক)

এই সংখ্যাটিকে সহজ করে বোঝানোর আর চেষ্টা করা হলো না— N_3 যদি 3-এর পাওয়ারের স্তম্ভ হয়ে থাকে তাহলে এটি স্তম্ভেরও স্তম্ভ! আমরা যদি বিষয়টা বুঝে থাকি তাহলে গ্রাহামের সংখ্যাটি ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করতে পারি—

(1) প্রথমে G_1 = $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow3$

(2) এবারে G_2 = $3\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\uparrow3$ (G_2 সংখ্যক ↑)

(3) এবারে G_3 = $3\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\uparrow3$ (G_3 সংখ্যক ↑)

.

.

.

.

(63) G_{63} = $3\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\uparrow3$ (G_{63} সংখ্যক ↑)

(64) গ্রাহাম সংখ্যা G = $3\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\uparrow3$ (G_{63} সংখ্যক ↑)

বলাই বাহুল্য এই সংখ্যাটি যে কত বড় সেটা কল্পনা করাও প্রায় দুঃসাধ্য। বিষয়টা প্রায় রূপকথার মতো।

এই অচিন্ত্যনীয় বড় সংখ্যাটি তৈরি করা হয়েছে রামজী থিওরি নামে একটি সমস্যার সমাধানের সম্ভাব্য সর্বোচ্চ সংখ্যা হিসেবে। রামজী থিওরির বিশেষজ্ঞদের মতে এর প্রকৃত সর্বোচ্চ মান হচ্ছে 6, হ্যাঁ ছয়!

এটাই হচ্ছে গণিতের মজা!

পরিশিষ্ট

বই এবং ওয়েবসাইটের তালিকা :

1. Mathematican Fun Games and Puzzles

   By Jack Forhlichstein

2. Puzzles in Math Logic

   By Aaron J. Friedland

3. Curious and Interesting Numbers

   By David Wells

4. Mathematical Quickies

   By Charles W. Trigg

5. Ultimate Sudoku

6. The Gentle Art of Mathematics

   By Dan Pedoe

7. en.wikipedia.org

8. marthworld.wolfarm.com

9. www.mersenne.org