

โจทย์คณิตข้อสอบจริงสามัญปี 60

ตอนที่ 1 แบบบรรยายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. กำหนดให้  $P(X) = 2X^3 + aX^2 + bX + c$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $X+1, X+2$  และ  $X+3$  เป็นตัวประกอบของ  $P(X)$  แล้ว  $a+b+c$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12

2. 24

3. 32

4. 40

~~5. 46~~

$$\rightarrow P(1) = 2 + a + b + c \quad \text{--- ①}$$

$$\rightarrow P(X) = 2(X+1)(X+2)(X+3)$$

$$P(1) = 2(1+1)(1+2)(1+3) = 48 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} = \text{②} ; 2 + a + b + c = 48$$

$$a + b + c = 46 \quad \#$$

รู้ทัน

วิชาสามัญ

2. จำนวนเต็มบวก  $n > 2$  ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18 และ 24 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

X [73,77]      2. [78,82]      3. [83,87]      4. [88,92]      5. [93,97]

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 18 \quad 24} \\ \underline{3 \quad 4} \end{array}$$

$$6 \times 3 \times 4 = 72$$

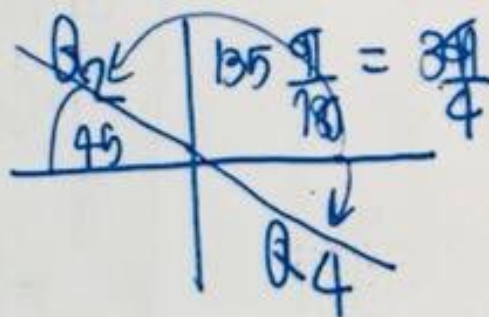
$$n = 72 + 2 = 74 \#$$



3. กำหนดให้  $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$  ถ้า  $\tan A = 2$  และ  $\tan B = 3$  แล้ว  $A + B$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

1.  $\frac{\pi}{4}$       2.  $\frac{\pi}{3}$       3.  $\frac{3\pi}{4}$       4.  $\frac{4\pi}{3}$       5.  $\frac{5\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{2+3}{1-(2)(3)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tan(A+B) &= -1 \\ A+B &= \frac{3\pi}{4} \quad \text{or} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \# \end{aligned}$$

รู้ทัน  
วิชาสามัญ

4.  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  and  $\vec{b} \times \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  and  $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$  เท่ากับจริงใดต่อไปนะ

1. -3      2. -2      3. 2      4. 3      5.  $2\sqrt{21}$

เฉลย

1)  $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$   
 2)  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$   
 3)  $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$   
 4)  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

รู้ทัน

วิชาสามัญ

$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}$   
 $(\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$   
 $\vec{0} \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$   
 $\vec{0} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + \vec{0}$   
 $-(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{0}$   
 $-\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -(6 - 2 - 1) = -3 \#$

5. ถ้าจุด  $(6,4)$  อยู่บนวงกลม  $C$  ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางสองเส้นของวงกลม  $C$  คือส่วนของเส้นตรง

$2x + y = 5$  และ  $x + 3y = 10$  แล้วรัศมีของวงกลมยาวเท่ากับจุดใดต่อไปนี้  $r =$  (ค่าที่ถูกต้อง)

1.  $\sqrt{21}$  หน่วย    2.  $\sqrt{24}$  หน่วย    3. 5 หน่วย    ~~4.  $\sqrt{26}$  หน่วย~~    5. 6 หน่วย

$2x + y = 5$  — ①  
 ①  $\times$  3  $\Rightarrow$   $6x + 3y = 15$  — ③  
 $x + 3y = 10$  — ②  
 ③ - ②  $\Rightarrow$   $5x = 5$   
 $x = 1$  ลง ①  
 $2 + y = 5$   
 $y = 3$

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
 &= \sqrt{(6-h)^2 + (4-k)^2} \\
 &= \sqrt{25 + 1} \\
 &= \sqrt{26} \#
 \end{aligned}$$

รู้ทัน  
**วิชาสามัญ**

6. ผลบวกของคำตอบของสมการ  $\log |x-2|^{(x-5)} = 0$  เท่ากับข้อใด

- 1. 4
- 2. 5
- 3. 6
- 4. 8

X 9

B  
A = 1

ข้อ 1 A = 1 B ≠ 0

ข้อ 2 B = 0 A ≠ 0

ข้อ 3\* A = -1 B = 0

ข้อ 1

$$|x-2|^{(x-5)} = 10^0 = 1$$

ข้อ 1 A = 1 B ≠ 0

$$|x-2| = 1$$

$$x-2 = 1, -1$$

$$x = 3, 1$$

ข้อ 2 B = 0 A ≠ 0

$$x-5 = 0$$

$$x = 5$$

ข้อ 3\* A = -1 B = 0

$$|x-2| \neq -1$$

ผลบวก

$$3+1+5 = 9 \#$$

รู้ทัน วิชาสามัญ

7. ถ้าวัดผลการเรียนคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เป็นดังตารางต่อไปนี้

	คะแนนที่ได้ (จากเต็ม 100)	เกณฑ์การใช้น้ำหนักในการคิดคะแนน
การบ้าน	85	20% /
สอบกลางภาค	65	40% /
สอบปลายภาค	70	40% /

แล้วจำนวนเปอร์เซ็นต์ของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 68

X 71

3. 74

4. 77

5. 80

$$\bar{X} = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{(20)(85) + (40)(65) + (40)(70)}{20 + 40 + 40} = \frac{7100}{100} = 71$$

รู้ทัน  
วิชาสามัญ

8. กำหนดให้  $S = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$   $W = \{A | A \subset S \text{ และ } A \text{ มีสมาชิก } 4 \text{ ตัว}\}$  ถ้าสุ่มหยิบเซตหนึ่งเซตจาก  $W$  แล้ว  
 ความน่าจะเป็นที่จะเป็นที่จะได้เซตที่ไม่มีเลข  $9$  เป็นสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{2}{9}$

2.  $\frac{1}{3}$

3.  $\frac{4}{9}$

4.  $\frac{1}{2}$

~~5.  $\frac{5}{9}$~~

$$n(S) = {}^9C_4 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$n(E) = {}^8C_4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{5}{9} \#$$

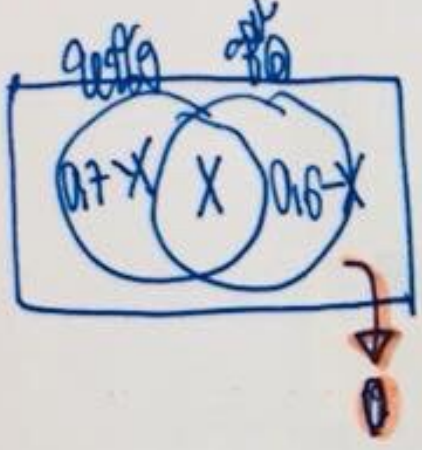
รู้ทัน

วิชาสามัญ



9. ความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะไปดูหนังและไปซื้อของในวันอาทิตย์เป็น 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ ถ้าดวงพรจะทำกิจกรรมอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน และความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะทำกิจกรรมทั้ง 2 อย่างเท่ากับชื่อใดต่อไปนี้

1. 0.1      2. 0.2      3. 0.3      4. 0.4      5. 0.5



$$P(A \cup B) = 1$$

$$1 = 0.7 - X + X + 0.6 - X$$

$$X = 1.3 - 1 = 0.3 \quad \#$$

รู้ทัน  
**วิชาสามัญ**

10. ถ้าลำดับ  $a_n = \frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}}$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1

2.  $-\frac{1}{2}$

~~3.  $-\frac{1}{4}$~~

4. 0

5.  $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+2n)^{13} (5+n)^2}{(1-2n)^{15}}$$

รู้ทัน  
วิชาสามัญ

$$\frac{2^{13} n^{15}}{(-2)^{15} n^{15}} = -\frac{1}{4} \#$$

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก 1 คำตอบที่ถูกต้อง จำนวน 20 ข้อ จีละ = 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. ถ้า  $Z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ  $Z + \frac{|Z-1|}{Z-1} = -3 + 2i$  แล้ว  $|Z|$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3                      2.  $\sqrt{10}$                       3.  $\sqrt{13}$                       4.  $2\sqrt{5}$                       5. 4

$\bar{1} = 1$   
 $\overline{\bar{z}} = z$   
 $|z| = |\bar{z}|$

$Z + \frac{\overline{z-1}}{z-1} = -3 + i$   
 $Z + \frac{\overline{z-1}}{z-1} = -3 + 2i$   
 ~~$Z + \frac{\overline{z-1}}{|z-1|} = -3 + i$~~   
 $z = -4 + i$

ถ้า  $z = a + bi$  ;  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$   
 $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2}$   
 $= \sqrt{17}$   
 $= 2\sqrt{5} \#$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

12. ให้  $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง } [-10, 10]\}$

$B = \{x | (x+5)(|x|-5) \geq -9\}$

1. 7

2. 14

3. 16

4. 18

5. 21

B :  $(x+5)(|x|-5) \geq -9$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

$x \geq 0$

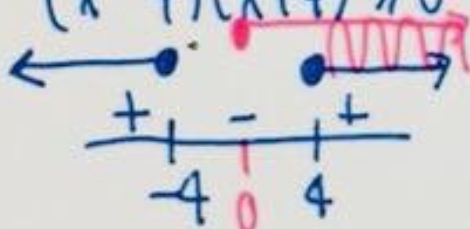
$x < 0$

$(x+5)(x-5) \geq -9$

$x^2 - 25 \geq -9$

$x^2 - 16 \geq 0$

$(x-4)(x+4) \geq 0$



$x = [4, \infty)$



$(x+5)(-x-5) \geq -9$

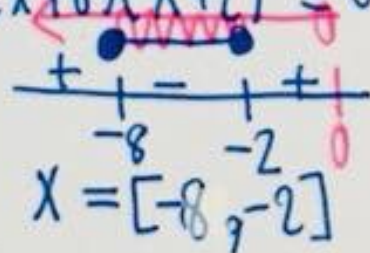
$(x+5)(-1)(x+5) \geq -9$

$(x+5)(x+5) \leq 9$

$x^2 + 10x + 25 \leq 9$

$x^2 + 10x + 16 \leq 0$

$(x+8)(x+2) \leq 0$



$x = [-8, -2]$

B :  $x = [-8, -2] \cup [4, \infty)$

A :  $x = [-10, 10]$

$A \cap B : x = [-8, -2] \cup [4, 10] = 14 \text{ ตัว } \textcircled{2}$

13. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n โดยที่ n ขาด 3,399 และเหลือเศษ 24 จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับจริงใดต่อไปนี้

1. 7      2. 8      3. 9      4. 10      5. 11

หาค่า  
h ลากค่า 24

$n = 3399 - 24 = 3375 = 3^3 \times 5^3$

รู้ทัน  
วิชาสามัญ

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3375} \\ 5 \overline{) 675} \\ 5 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

หาร 3<sup>3</sup> x 5<sup>3</sup> ออก

$n =$

<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>
<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>
<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>
<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>
<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>
<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>
<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>5</del>	<del>3</del>

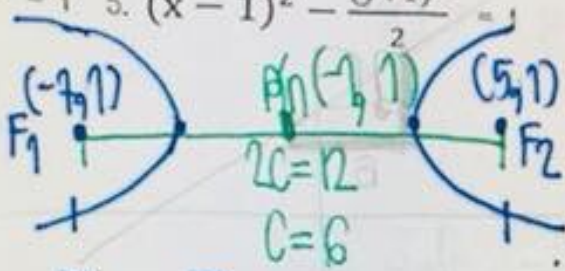
$= 16 - 5 = 11$  ตัว

14. ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด  $(-7, 1)$  และ  $(5, 1)$  ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานี้ขนานกับเส้นตรง  $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$  แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{(x+1)^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$     ~~2.  $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$~~     3.  $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{24} = 1$   
 4.  $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$     5.  $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

สมการวงรี  

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$$
 #

สมการเส้นตรง  

$$Ax + By + C = 0$$
  

$$m_{L_1} = -\frac{A}{B}$$

$$\frac{m_H}{\frac{b}{a}} = \sqrt{2}$$
  

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2} \quad \text{--- ①}$$
  

$$36 = a^2 + b^2 \quad \text{--- ②}$$
  
 ① แล ②  

$$36 = a^2 + 2a^2$$
  

$$a^2 = 12 \quad \text{แล ②}$$
  

$$b^2 = 24$$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

ความสัมพันธ์  $a, b, c$  ของ H  

$$c^2 = a^2 + b^2$$

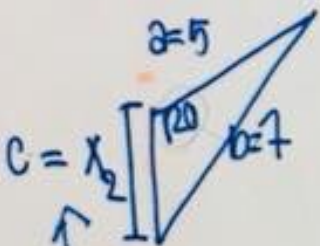
15. ถ้าหาพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD ดังรูป โดยมีด้าน BC, AC และ AD ยาวเท่ากับ 5, 7 และ 8 หน่วยตามลำดับมี  $\widehat{BAD} = 90^\circ$  และ  $\widehat{CBA} = 120^\circ$  พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD เท่ากับจุดใดต่อไปนี้

- X 22 ตารางหน่วย
- 2. 24 ตารางหน่วย
- 3. 28 ตารางหน่วย
- 4.  $28\sqrt{2}$  ตารางหน่วย
- 5.  $28\sqrt{3}$  ตารางหน่วย



$$\sin 30 = \frac{x_1}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x_1}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$$



จาก 9.  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$7^2 = 5^2 + c^2 - 2(5)c \cos 120$$

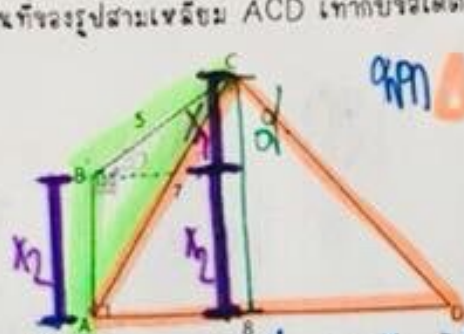
$$49 = 25 + c^2 - 10c \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$0 = -24 + c^2 + 5c$$

$$c^2 + 5c - 24 = 0$$

$$(c-3)(c+8) = 0$$

$$c = 3, -8$$



จาก  $\Delta = \frac{1}{2} \times 8 \times 11$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 11 = \frac{1}{2} \times 88 = 44$$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

$$\sin 80 + \sin 20 = 2 \sin 50 \cos 30 = \sqrt{3} \sin 50$$

$$\sin 70 + \sin 10 = 2 \sin 40 \cos 30 = \sqrt{3} \sin 40$$

$$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos A = \sin(90-A), \sin A = \cos(90-A)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

รู้ทัน วิชาสามัญ

16. ถ้าขนาดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า  $\vec{v} = (\sin 80^\circ + \sin 20^\circ)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$

และ  $|\vec{v} \times \vec{i}| = \sin 70^\circ + \sin 10^\circ$  แล้ว  $|\vec{v}|^2$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1      2. 3      3. 5      4. 6      5. 7

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin 50^\circ \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v} \times \vec{i}| = \sqrt{3} \sin 40$$

$$\vec{v} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} \sin 50 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -a \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v} \times \vec{i}| = \sqrt{0^2 + b^2 + (-a)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3} \sin 40$$

$$a^2 + b^2 = 3 \sin^2 40$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{3} \sin 50)^2 + a^2 + b^2}$$

$$|\vec{v}|^2 = 3 \sin^2 50 + a^2 + b^2$$

$$= 3 \sin^2 50 + 3 \sin^2 40$$

$$= 3 \sin^2 50 + 3 \cos^2 50$$

$$= 3(\sin^2 50 + \cos^2 50)$$

$$= 3(1) = 3 \quad \# \quad \textcircled{2} \quad \#$$



17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ  $(\log 100x)^2 + 2 \log_{100} x + 2 = 0$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1.  $\frac{11}{1000}$

2.  $\frac{101}{1000}$

3.  $\frac{11}{100}$

4. 101

5. 110

สูตร

1)  $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2)  $\log_a M = \frac{1}{n} \log_a M^n$

3)  $\log_a a^m = m \log_a a$

4)  $\log 10 = 1$

5)  $\log_a x = b$   
 หรือ  $x = a^b$

$(\log 100 + \log x)^2 + 2 \log_{10^2} x + 2 = 0$

$(\log 10^2 + \log x)^2 + \frac{2}{2} \log_{10} x + 2 = 0$

$(2 \log 10 + \log x)^2 + \log x + 2 = 0$

$(2 + \log x)^2 + \log x + 2 = 0$

$a = 2 + \log x$

$a^2 + a = 0$

$a(a+1) = 0$

$a = 0$  ,  $-1$

$2 + \log x = 0$  ,  $-1$

$\log x = -2$  ,  $-3$

$x = 10^{-2}$  ,  $10^{-3}$

$x = \frac{1}{100}$  ,  $\frac{1}{1000}$

ดังนั้น  $\frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{11}{1000}$

① #

รู้ทัน  
**วิชาสามัญ**



$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

19. ถ้าขงให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม  $d > 0$

และ  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม  $r > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ก.  $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = d \quad \times$

ข.  $\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = r \quad \times$

ค.  $\det \begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 2^d \quad \times$

ง.  $\det \begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = r^2 \quad \times$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อต่อไปนี้

$\times 0$  (ไม่มีข้อความใดถูกต้อง)

2. 1    3. 2    4. 3    5. 4

ก)  $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_1+d & a_1+2d \\ a_1+3d & a_1+4d & a_1+5d \\ a_1+6d & a_1+7d & a_1+8d \end{bmatrix} = 0$

$\sim \begin{bmatrix} a_1 & a_1+d & a_1+2d \\ a_1+3d & a_1+4d & a_1+5d \\ 3d & 3d & 3d \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{bmatrix} a_1 & a_1+d & a_1+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 3d & 3d & 3d \end{bmatrix}$

ข)  $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 r & a_1 r^2 \\ a_1 r^3 & a_1 r^4 & a_1 r^5 \\ a_1 r^6 & a_1 r^7 & a_1 r^8 \end{bmatrix} = 0$

$\sim a_1 \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 \\ a_1 r^3 & a_1 r^4 & a_1 r^5 \\ a_1 r^6 & a_1 r^7 & a_1 r^8 \end{bmatrix} \xrightarrow{a_1 r^3} \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 \\ 1 & r & r^2 \\ a_1 r^6 & a_1 r^7 & a_1 r^8 \end{bmatrix}$

ค)  $\det \begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_1+d} & 2^{a_1+2d} \\ 2^{a_1+3d} & 2^{a_1+4d} & 2^{a_1+5d} \\ 2^{a_1+6d} & 2^{a_1+7d} & 2^{a_1+8d} \end{bmatrix} = 0$

$\sim 2^{a_1} \begin{bmatrix} 1 & 2^d & 2^{2d} \\ 2^{3d} & 2^{4d} & 2^{5d} \\ 2^{6d} & 2^{7d} & 2^{8d} \end{bmatrix} \xrightarrow{2^{3d}} \begin{bmatrix} 1 & 2^d & 2^{2d} \\ 1 & 2^d & 2^{2d} \\ 2^{6d} & 2^{7d} & 2^{8d} \end{bmatrix}$

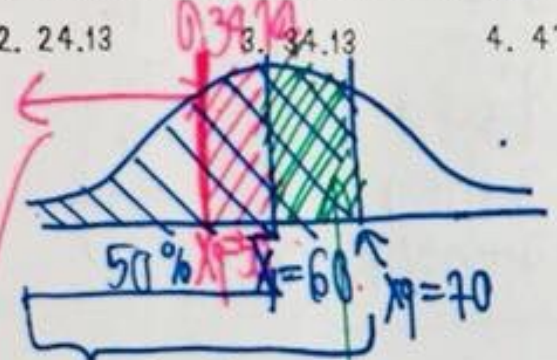
ง)  $\det \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1^2 r^2 & b_1^2 r^4 \\ b_1^2 r^6 & b_1^2 r^8 & b_1^2 r^{10} \\ b_1^2 r^{12} & b_1^2 r^{14} & b_1^2 r^{16} \end{bmatrix} = 0$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

21. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 60 และ 10 คะแนน ตามลำดับ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13% แล้วนักเรียนที่สอบได้ 50 คะแนน จะมีตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็นที่

$(Z=1, A=0.3413)$

วิธีทำ  
 $Z = \frac{X_i - \bar{X}}{SD}$



$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{SD}$

$Z = \frac{50 - 60}{10}$

$Z = -1$

34.13%  
 $A = 0.3413$   
 $Z = 1$

$A = 0.5 - 0.3413 = 0.1587 ; P = 15.87\%$

รู้ทัน  
**วิชาสามัญ**

$$a+b+24 = 40$$

$$a+b = 16 \quad \text{--- ①}$$

22. ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 40 คน เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	f	ความถี่ f
1-5	4	4
6-10	6	a
11-15	6	6
* 16-20	10	b
21-25	10	10
26-30	4	4

f	d	fd
4	-3	-12
a+4	-2	-2
a+10	-1	-1
a+b+10	0	0
a+b+20	1	10
a+b+24	2	8

$$\Sigma fd = -12$$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ 17.5 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. 16.50
- 2. 16.75
- 3. 17.25
- 4. 17.50
- 5. 17.75

$$Me = L + I \left( \frac{\frac{n}{2} - \Sigma fL}{f_{me}} \right)$$

$$17.5 = 15.5 + 5 \left( \frac{20 - (a+10)}{b} \right)$$

$$2b = 100 - 5a - 50$$

$$5a + 2b = 50 \quad \text{--- ②}$$

$$2 \times 0 \text{ ; } 2a + 2b = 32 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{②} - \text{③} \quad 3a = 18 \text{ ; } a = 6 \text{ หรือ ①}$$

$$b = 10$$

$$\bar{x} = a + I \left( \frac{\Sigma fd}{n} \right)$$

$$= 18 + 5 \left( \frac{-12}{40} \right)$$

$$= 18 - 1.5$$

$$= 16.5$$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

23

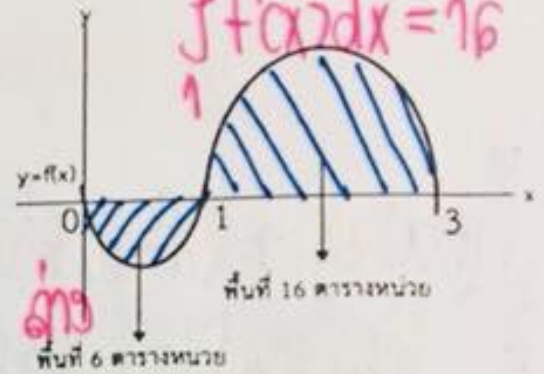
23. ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป

แล้ว  $\int_0^3 (|f(x)| - f(x)) dx$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6    2. 10    3. 12    4. 16    5. 32

$$\int_0^1 f(x) dx = -6$$

$$\int_1^3 f(x) dx = 16$$



$$\int_0^3 (|f(x)| - f(x)) dx + \int_0^3 (|f(x)| - f(x)) dx$$

$$\int_0^1 (-f(x) - f(x)) dx + \int_1^3 (f(x) - f(x)) dx$$

$$\int_0^1 (-2f(x)) dx + \int_1^3 0 dx$$

$$-2 \int_0^1 f(x) dx + 0$$

$$\frac{-2(-6) + 0}{12 + 0} = 12 \#$$

รู้ทัน  
วิชาสามัญ

24. ถ้า  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันนูนขี้น และกราฟของ  $y = f(x)$  ตัดกับกราฟของ  $y = 3x - 4$  ที่  $x = 2$  และ  $x = 5$  แล้ว  $\int_2^5 (2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)) dx$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 94

2. 104

3. 158

~~4. 258~~

5. 264

$$= \int_2^5 (f(x) \cdot 2x + (x^2 - 1) f'(x)) dx \quad \text{สังเกตุ}$$

$$f(x) = 3x - 4$$

$$f(2) = 3(2) - 4 = 2$$

$$f(5) = 3(5) - 4 = 11$$

$$= \int_2^5 ([f(x) \cdot (x^2 - 1)]') dx$$

รู้ทัน  
วิชาสามัญ

$$= f(x) \cdot (x^2 - 1) \Big|_2^5$$

$$= [f(5) \cdot (5^2 - 1)] - [f(2) \cdot (2^2 - 1)]$$

$$= 11 \cdot 24 - 2 \cdot 3 = 264 - 6 = 258 \quad \#$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

25

25. กำหนดให้  $a_n$  เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี  $a_1=2$  และผลต่างร่วมกับเท่ากับ  $-\frac{2}{9}$  ถ้า  $b_n = 2^{a_n}$  แล้วจำนวนเต็มบวก  $m$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_m \geq 1024$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7      2. 8      3. 9      4. 10      5. 11

$$2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot 2^{a_3} \cdot \dots \cdot 2^{a_m} \geq 2^{10}$$

$$2^{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m} \geq 2^{10}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m \geq 10$$

$$\frac{m}{2} [2(2) + (m-1)(-\frac{2}{9})] \geq 10$$

$$2m + (m-1)(-\frac{2}{9}) \geq 10$$

$$\frac{18m - m^2 + m}{9} \geq 10$$

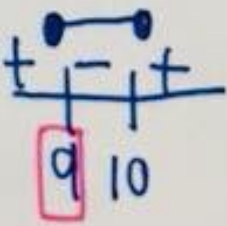
$$18m - m^2 + m \geq 90$$

$$-m^2 + 19m - 90 \geq 0$$

$$m^2 - 19m + 90 \leq 0$$

$$(m-9)(m-10) \leq 0$$

$$m=9 \#$$



รู้ทัน  
วิชาสามัญ



26. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{211}{9}$   
 และ  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 27$  แล้วจำนวนจริง  $x$  ซึ่งทำให้  $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$  มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับจะลดลงเป็น

1.  $\frac{64}{81}$

2. 1

3.  $\frac{16}{9}$

4.  $\frac{32}{27}$

5.  $\frac{64}{27}$

$Me = \frac{1+1}{2} = 6$

$x = Me = a_6$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$\frac{a_1}{1-r} = 27 \quad \text{--- (1)}$

$\frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = \frac{211}{9} \quad \text{--- (2)}$

หาร (1) ด้วย (2)  
 $27(1-r^5) = \frac{211}{9}$   
 $1-r^5 = \frac{211}{243}$

$r^5 = \frac{1-211}{243}$   
 $r^5 = \frac{32}{243}$   
 $r = \frac{2}{3}$

$\frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} = 27$   
 $a_1 = 9$

$\therefore a_6 = a_1 r^5 = 9 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 9 \left(\frac{32}{243}\right) = \frac{32}{27}$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

27. ถ้าหนดให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม ซึ่งมีค่าวิกฤตที่  $x = 4$  และ  $x = -4$  จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $f''(-4) \cdot f''(4) < 0$  ✓

ข.  $f(4\sqrt{3}) = 2f(0)$

ค.  $f(-4) + f(4) = 2f(0)$

ง. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ  $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$  และ  $f(0)$  เท่ากับ  $f(0)$  ✓

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)

2. 1

3. 2

3

5. 4

$$f'(x) = a(x-4)(x+4) = a(x^2 - 16) = ax^2 - 16a$$

$$f'(x) = ax^2 - 16a$$

$$f''(x) = 2ax$$

$$f''(4) = 2a(4) = 8a$$

$$f''(-4) = 2a(-4) = -8a$$

รู้ทัน **วิชาสามัญ**

$$f''(-4) \cdot f''(4) = -64a^2 = \text{ลบ}$$

∴ ก ถูก

อีกรูป

$$f(x) = \frac{ax^3}{3} - 16ax + C$$

$$f(4\sqrt{3}) = a(4\sqrt{3})^3 - 16a(4\sqrt{3}) + C = C$$

$$f(0) = 0 - 0 + C = C$$

ก)  $f(4\sqrt{3}) \neq 2f(0)$   
 $C \neq 2C$  ข) ผิด

ง)  $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$$= \frac{2C + 2C + C}{5}$$

$$= C$$

~~$$f(4) = \frac{a(4)^3}{3} - 16a(4) + C$$~~

~~$$f(-4) = \frac{a(-4)^3}{3} - 16a(-4) + C$$~~

$$f(4) + f(-4) = 2C \quad \text{ค) ถูก}$$

การลดรูป

28. ถ้า  $S$  เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก  $m$  ที่ทำให้  $\frac{2^{100}}{2^{100}-m}$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้วผลบวกของสมาชิกของ  $S$  เท่ากับ

1.  $99(2^{99})$       2.  $100(2^{99}) + 1$       3.  $99(2^{100}) + 1$       4.  $100(2^{100})$       5.  $101(2^{101})$

ดูว่าอะไรเป็นคำตอบ

$$2^{100} \quad \text{หรือ} \quad 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{100}$$

มี 101 พจน์

$$\therefore 2^{100} - m = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{100}$$

$$\text{ข้อ} \quad m = 2^{100} - 2^0 + 2^{100} - 2^1 + 2^{100} - 2^2 + \dots + 2^{100} - 2^{100}$$

$$= 101 \cdot 2^{100} - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{100})$$

$$S_n = \frac{a_1 (n^n - 1)}{n-1}$$

$$= 101 \cdot 2^{100} - \frac{2^0 (2^{101} - 1)}{2-1}$$

$$= 101 \cdot 2^{100} - 2^{101} + 1$$

$$= 101 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 2^{100} + 1$$

$$= 99 \cdot 2^{100} + 1 \quad \text{③} \#$$

ดูที่นั่น วิชาสามัญ

$\cos\theta + i\sin\theta$

29. ถ้าเซต  $A = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$  และ  $B = \left\{ k \in A \mid \left( \frac{\cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8}}{\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}} \right)^k = i \right\}$

โดยที่  $i^2 = -1$  จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็น

1. 5

2. 7

3. 9

4. 11

5. 13

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$z_1 = |z_1| \operatorname{cis}\theta_1$

$z_2 = |z_2| \operatorname{cis}\theta_2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

$\frac{z_2}{|z_2|}$

$z_1^n = |z_1|^n \operatorname{cis} n\theta_1$



$\left[ \frac{\cos(-\frac{5\pi}{8}) + i\sin(-\frac{5\pi}{8})}{\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4})} \right]^k = \operatorname{cis} 90^\circ$

$\left[ \frac{\operatorname{cis}(-\frac{5\pi}{8})}{\operatorname{cis}(-\frac{3\pi}{4})} \right]^k = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

$\left[ \operatorname{cis} \left( -\frac{5\pi}{8} - \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right) \right]^k = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$



รู้กัน **วิชาสามัญ**

$\operatorname{cis} \frac{k\pi}{8} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{k\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$k = 4 + 16n$

$\therefore 1 \leq 4 + 16n \leq 100$

$-3 \leq 16n \leq 96$

$\frac{-3}{16} \leq n \leq 6$

$\therefore B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  7 ข้อ (2)



# ภาคตัดกรวย

รู้ทัน วิชาสามัญ

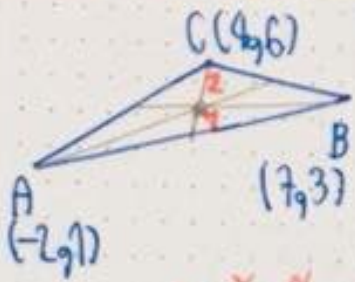
Part 1 (3-4 ข้อ)

ทำสูตร + หารรูป

- 1) 3 ข้อ
- 2) พาราโบลา
- 3) วงรี
- 4) ไฮเพอร์โบลา
- 5) ไข่เต่า
- 6) วงรี
- 7) วงรี
- 8) ไฮเพอร์โบลา

2) 3 ข้อ

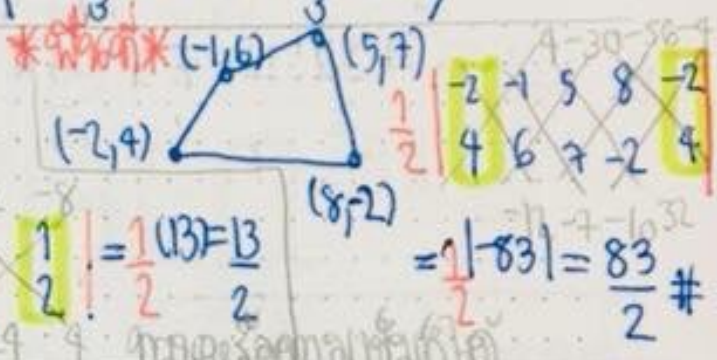
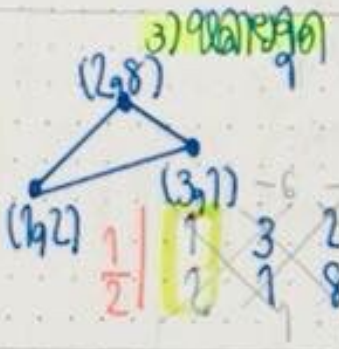
\* ไล่หาคงรูป



$|AB| = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$   
 $|BC| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$   
 $|CA| = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$

\* ไล่หาคงรูป

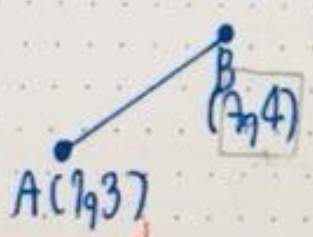
คือ ไล่หาคงรูปจากจุดโดยไล่ไปเรื่อยๆ ถ้าพอจะหาคงรูปได้แล้วให้หาคงรูป =  $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$



## เรขาคณิต

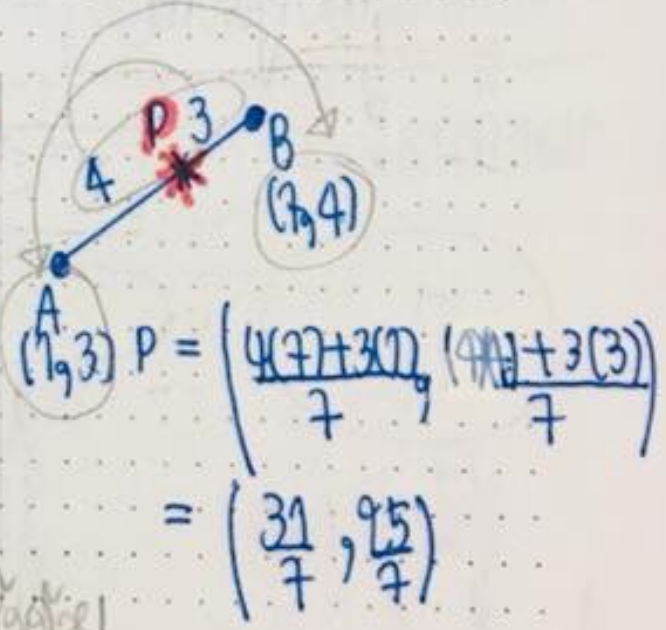
1) 2 ข้อ

\* ระยะห่าง =  $\sqrt{(Ax)^2 + (Ay)^2}$



$|AB| = \sqrt{(7-1)^2 + (4-3)^2}$   
 $= \sqrt{37}$

\* ความชัน (m) =  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{7-1} = \frac{1}{6}$



ถ้า  $L_1 \parallel L_2$ ;  $m_1 = m_2$  และ  $L_1 \perp L_2$ ;  $m_1 m_2 = -1$

ถ้า  $L_1 \parallel L_2$ ;  $m_1 = m_2$  และ  $L_1 \perp L_2$ ;  $m_1 m_2 = -1$

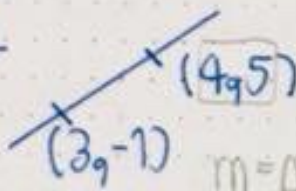
\* จุดกึ่งกลาง =  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) = (\frac{7+1}{2}, \frac{4+3}{2}) = (4, \frac{7}{2})$

# เส้นตรง

\*สร้างสมการ\*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- ตัวอย่าง 1) ความชัน  $m$   
 2) จุดผ่าน  $(x_1, y_1)$

ex  ความชัน  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{4 - 3} = \frac{6}{1} = 6$

สมการเส้นตรง  $m = 6$ , ผ่าน  $(4, 5)$

ตัวอย่าง  $y - y_1 = m(x - x_1)$   
 $y - 5 = 6(x - 4)$   
 $y - 5 = 6x - 24$

$$6x - y - 19 = 0$$

สมการเส้นตรง  $m = 6$ , ผ่าน  $(3, -1)$

ตัวอย่าง  $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = 6(x - 3)$$

$$y + 1 = 6x - 18$$

$$6x - y - 19 = 0$$

$m = 6$  ผ่าน  $(4, 5)$ ;  $6x - y - 19 = 0$

$m = 6$  ผ่าน  $(3, -1)$ ;  $6x - y - 19 = 0$

$m = \frac{3}{4}$  ผ่าน  $(1, 2)$ ;  $3x - 4y + 5 = 0$

$m = \frac{2}{5}$  ผ่าน  $(2, 4)$ ;  $2x - 5y + 16 = 0$

$m = -\frac{3}{4}$  ผ่าน  $(2, 3)$ ;  $3x + 4y - 18 = 0$

\*จุดของสมการเส้นตรง\*

1)  $y - y_1 = m(x - x_1)$

2)  $Ax + By + C = 0$  รู้ทั้ง

หรือ  $m = -\frac{A}{B}$

ex  $3x + 7y - 92 = 0$ ;  $m = -\frac{3}{7}$

3)  $y = mx + c$

ความชัน

ex  $y = 2x + 1$ ;  $m = 2$

วิชาสามัญ

\*จุดตัด, จุดผ่าน\*

หาจุดตัดของสมการเส้นตรง

2 เส้นตัดกันแก้สมการ

ex  $x + y = 5$  — ① จุดตัดจุดตัด =  $(3, 2)$   
 $x - y = 1$  — ②

① + ②  $2x = 6$  ;  $x = 3$  หรือ ①  $y = 2$

ex  $A(0, 2)$  กับ  $B(2, 3)$

จุดตัดของเส้นตรง  $2x + y - 7 = 0$

$A(0, 2)$

$B(2, 3)$

$0 + 2 - 7 \neq 0$  ไม่เป็น  
 $4 + 3 - 7 = 0$  เป็น

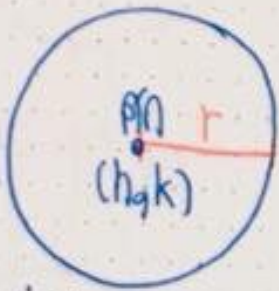
\*จุดตัดเส้น\*

$A(2, 4)$  ;  $2x + 3y + 10 = 0$

$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$d = \frac{|2(2) + 3(4) + 10|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}}$

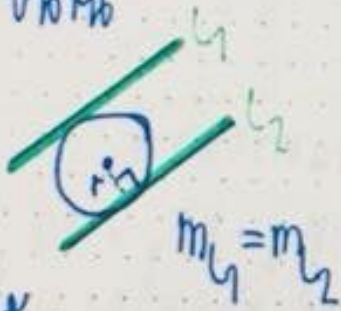
# วงกลม



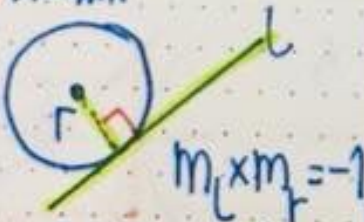
จุดกึ่งกลางของวงกลม  
= จุดกึ่งกลางของเส้นรอบวง

ข้อ 4 หนึ่งข้อ

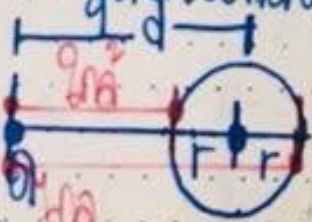
1) ขนานกัน



\* 2) สัมผัสกัน



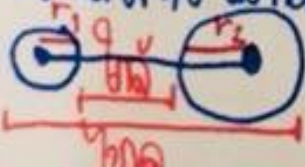
3) จุดกึ่งกลางวงกลม (นอก)



นอก =  $d - r$

ใน =  $d + r$

4) วงกลมสัมผัสกัน



นอก =  $d - r_1 - r_2$

ใน =  $d + r_1 + r_2$

## สมการวงกลม

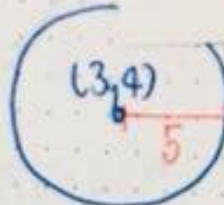
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

จุดศูนย์กลาง =  $(h, k)$

รัศมี =  $r$

วิชาสามัญ

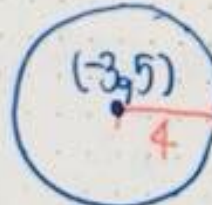
ex1



สมการคือ

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

ex2



สมการคือ

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 4^2$$

ex3

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 9$$

ศก =  $(5, -2)$

$r = 3$

ex4

$$(x+4)^2 + y^2 = 7$$

ศก =  $(-4, 0)$

$r = \sqrt{7}$

ex5

$$x^2 + 4x + y^2 + 8y = 0$$

$$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 + 8y + 4^2 = 0 + 4 + 16$$

$$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 20$$

ศก =  $(-2, -4)$   $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ex6

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y = 0$$

$$x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 10y + 5^2 = 0 + 9 + 25$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 34$$

ศก =  $(3, -5)$

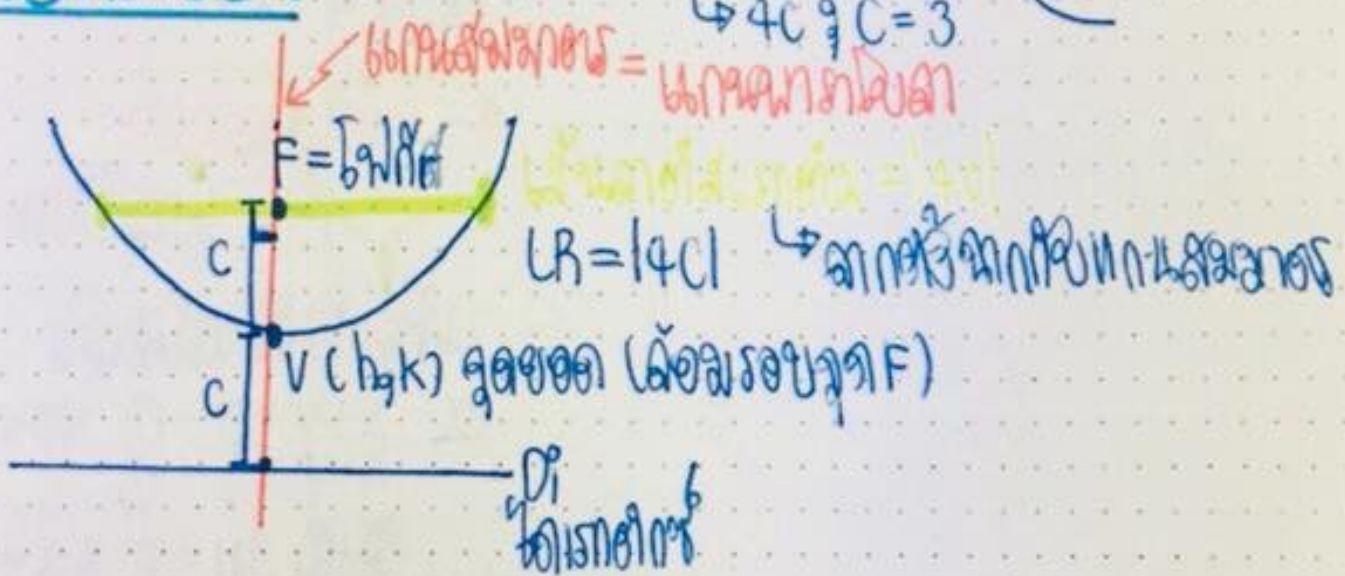
$r = \sqrt{34}$



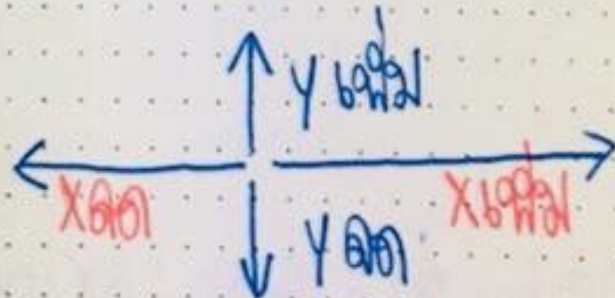
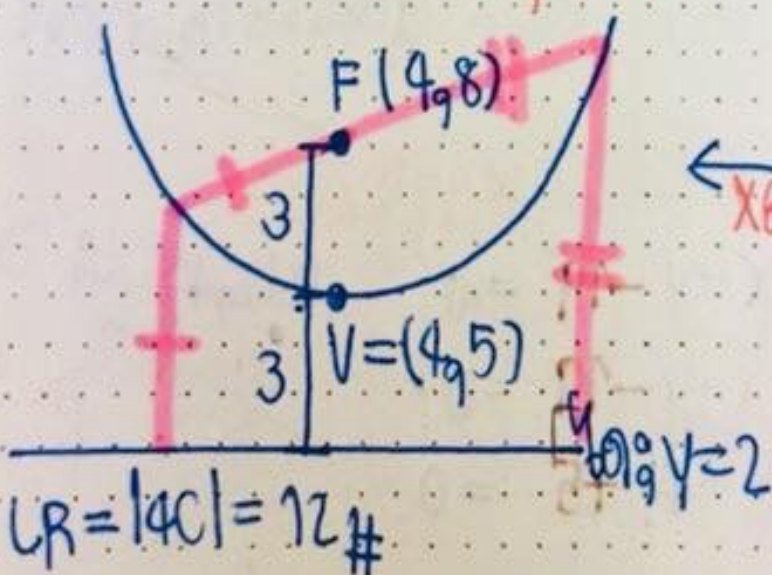
# พาราโบลา

<p>C+ หงาย</p>	<p>C- คว่ำ</p>	<p>C- หงาย</p>	<p>C+ คว่ำ</p>
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$		$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	

ex มาตรฐาน  $(x-1)^2 = 4(5)(y-3)$  หงาย  
รายละเอียด และ  $(y-3)^2 = 12(x+4)$  ขวา  
 $\hookrightarrow 4c \text{ ; } c=3$



ex มาตรฐาน  $(x-4)^2 = 12(y-5)$  ;  $V=(h,k)=(4,5)$   
 $4c \text{ ; } c=3$



รู้ทัน วิชาสามัญ

# ลำดับ + อนุกรม



- 1) ลำดับ  $a_n$
- 2) อนุกรม  $S_n$
- 3)  $\Sigma$  (จำกัด, อนันต์)
- 4) ลิมิต
- \* จำสูตร + ใช้สูตร \*

**ลำดับ**  $a_1, a_2, \dots, a_n$   
 ↳ ลำดับคณิต, ลำดับเรขาคณิต, ลำดับผสม  
 พจน์ที่  $n$  ไป  $n$  พจน์ที่  $n$

## ลำดับคณิต

สูตร  $a_n = a_1 + (n-1)d$   
 ลำดับ  $d = a_2 - a_1, a_3 - a_2$   
 ผลหารร่วม  $d=4$

ex1 ลำดับคณิต 3, 7, 11, ...

ข้อ 10  $a_{10} + a_{17} - a_{13}$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 3 + (n-1)4$$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$a_n = 4n - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{10} = 39 \\ a_{17} = 67 \\ a_{13} = 51 \end{array} \right\} + \quad - \quad \# \quad 55$$

# อนุกรม

## ลำดับคณิต

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

สูตร

$$1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

## ลำดับเรขาคณิต

### ลำดับเรขาคณิต

สูตร  $a_n = a_1 (r)^{n-1}$   
 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \dots$   
 ↓  $\frac{a_2}{a_1} \quad \frac{a_3}{a_2}$   
 อัตราส่วนร่วม

## อนุกรมเรขาคณิต

### ลำดับเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

# ลำดับผสม

ลำดับ 2 ชั้น

ex1 จงหา  $a_{10}$  จาก

3, 7, 13, 21, 31, ...

$d_1 = 4, 6, 8, 10$

$d_2 = 2, 2, 2$

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)d_1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{1 \times 2}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 + (10-1)4 + \frac{(10-1)(10-2)2}{2} \\ &= 3 + 36 + 72 \\ &= 111 \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= 3 + (20-1)4 + \frac{(20-1)(20-2)(2)}{2} \\ &= 3 + 76 + 342 \\ &= 421 \# \end{aligned}$$

ถ้า  $S_{20} = \sum_{n=1}^{20} a_n$

$$a_n = 3 + (n-1)4 + \frac{(n-1)(n-2)2}{2}$$

$$= 3 + 4n - 4 + n^2 - 2n - n + 2$$

$$= n^2 + n + 1$$

$$S_n = \sum_{n=1}^n (n^2 + n + 1)$$

$$S_{20} = \sum_{n=1}^{20} n^2 + \sum_{n=1}^{20} n + \sum_{n=1}^{20} 1$$

$$\left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) + 20(1)$$

$$\frac{20(21)(41)}{6} + \frac{20(21)}{2} + 20$$

$$2870 + 210 + 20$$

$$3100 \#$$

$$S_n = \sum_{n=1}^n a_n$$

1) ถ้า  $a_n$   
2) take  $\Sigma$

อนุกรมเลขคณิต

สูตร  $\Sigma$  (บวกลบคูณหาร +, -, /)

$$1) \sum_{n=1}^n n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) \sum_{n=1}^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) \sum_{n=1}^n n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4) \sum_{n=1}^n c = cn$$



# อนุกรมอนันต์ อนันต์ อนันต์

- $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
  - ผลบวกอนันต์
- $S_{\infty}$  } 1) อนุกรมอนันต์  
2) เทลลอร์อนันต์  
3) ผลบวก

## อนุกรมเรขาคณิต

สูตร  $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$

\*  $-1 < r < 1$  \*

ถ้า  $r$  เป็น 1 หรือ -1 ไม่ใช่อนุกรมเรขาคณิต (ข้อยกเว้น)

ex1  $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$   $r = \frac{1}{2}$

$S_{\infty} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \#$

ex2  $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \dots$   $r = -\frac{1}{2}$

$S_{\infty} = \frac{4}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{8}{3} \#$

ex3  $3 + 6 + 12 + \dots$   $r = 2$

อนุกรมเรขาคณิต (ข้อยกเว้น)

## เทลลอร์อนันต์

ex  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots$   
 $= 1$

ex  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1$

ex  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n(n+1)} \right]$

$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1$

ex  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

