

Exercice 1 **

Soit a un entier ($a \geq 1$), $n = 4 \cdot m$ où $m = 4 \cdot k$ (k un entier $k \geq 1$) et ϕ est l'indicatrice d'Euler telle que :

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

. Montrer que si $\phi(a^n - 2) + 1 \equiv n - 1 \pmod{n}$ alors $\phi(a^n - 2) + 1$ est toujours un nombre premier.

Exercice 2 **

Soit $I_k(x)$ la fonction de Bessel modifiée Kn. Soit e^x la fonction exponentielle. Montrer que

$$e^x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_k(x)$$

Exercice 3 *

Soit k un entier strictement positif.

Soit n un entier naturel tel que $n = 6k - 1$

Soit r le reste de la division de $(n - 1)! - n$ par $(n + 2)$

Montrer la propriété suivante : si $6k + 1$ est premier alors $r = 3k + 2$

Indice : on définit $6k + 1$ tel que $6k + 1 = r(n) + r(n - 1)$ où $r(n)$ est la séquence des restes successifs avec $r(1) = 5$ et $n \geq 2$. On suppose $r(n) \neq 2$ et $r(n - 1) \neq 2$.

Exercice 4 *

Soit x un entier tel que $x > 1$. On définit la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x)$$

Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}}$$

(a, b, c, d sont des entiers ≥ 1) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{b} = \frac{4}{\pi}$$

Exercice 5 *

Soit $\sigma(n)$ la fonction somme des diviseurs qui somme tous les diviseurs de n , un entier naturel ≥ 1 . On introduit la fonction f telle que:

$$f(n) = 1 + (n!)^2 - \sigma(n!)(n!)^2 + 2 \sum_{k=1}^{-1+\sigma(n!)} \left\lfloor \frac{k(1 + (n!)^2)}{\sigma(n!)} \right\rfloor$$

Montrer que quand $f(n) = 2n + 1$, alors $2n + 1$ est toujours premier.

Exercice 6 *

Soient a et b deux nombres premiers jumeaux tel que $b = a + 2$

On pose $N = 4^b$ et q le quotient de N par a et r le reste.

Puis on pose $P = (q \bmod b) * a + r - 1$

1. Montrer que P est un multiple de $10 * b + 1$ si $a > 29$
2. Généraliser pour le cas $N = n^b$ pour $n \geq 2$ entier naturel.