

endlich_verständlich
und
einmalmathe

Let's
Rock
Mathe

fragen.letsrockmathe.de

Satz von Vieta

Allseits bekannt ...

Ihr kennt bestimmt den Ausdruck:

$$x^2 - 8x + 15 = 0. \quad (1)$$

Es handelt sich dabei um eine quadratische Gleichung. Wenn ihr die Lösungen x_1 und x_2 finden wollt, benutzt ihr normalerweise die pq -Formel oder die Mitternachtsformel. Aber vielleicht ist es ja einfacher, wenn ihr die Gleichung (1) umschreibt. Deswegen hier ein kleiner Denkanstoß:

$$-5 + (-3) = -8 \quad \text{und} \quad -5 \cdot (-3) = 15$$

Erkenntnis

Was bringt uns das jetzt? Nun, lösen wir die Gleichung mit einem beliebigen Verfahren, so kriegen wir als Lösung 3 und 5 raus. Also scheint es da einen Zusammenhang zu geben. Um dem auf den Grund zu gehen, betrachten wir eine weitere Gleichung:

$$(x - 5)(x - 3) = x \cdot x - 3 \cdot x - 5 \cdot x + 5 \cdot 3 = x^2 - (3 + 5)x + 15 = x^2 + 8x + 15.$$

Verblüffend ... aber ist das nicht einfach nur Zufall? Schauen wir uns es das Ganze doch mal allgemein an:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b.$$

Diese Schreibweise ist sehr praktisch, denn dann sind die Nullstellen a und b direkt ablesbar. Würde man diese Werte einsetzen, so erhält man ja gerade den Wert 0.

Vergleichen wir das doch mal mit der allgemeinen Form von quadratischen Gleichungen die wir für die pq -Formel brauchen:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Wichtig ist, dass die Bezeichnung der Nullstellen egal ist, man kann also statt a und b auch x_1 und x_2 bzw. p und q nehmen. Dann fällt auf, dass es zwei Gleichungen gibt:

$$p = a + b \quad \text{und} \quad q = a \cdot b \quad (2)$$

Die Gleichung (2) heißt auch *Satz von Vieta*.

Geläufige Fälle

Um das Prinzip zu verdeutlichen, hier noch ein Beispiel:

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Wenn wir $p = 1 = (3 - 2)$ und $q = -6 = 3 \cdot (-2)$ rechnen, so können wir dies, gemäß dem Satz, umschreiben zu:

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

und hier können wir die Nullstellen direkt ablesen, nämlich -3 und 2 .

Der Satz von Vieta gilt *nur* für quadratische Gleichungen, wenn das x^2 alleine ohne Zahl steht, also vor x^2 kein Koeffizient steht. Steht trotzdem etwas vor dem x^2 , können wir einfach ausklammern:

$$2x^2 - 20x + 48 = 2(x^2 - 10x + 24).$$

Das q lässt sich als $q = 24 = 6 \cdot 4$ schreiben und $-p$ lässt sich als $-p = 10 = 6 + 4$ schreiben. Somit sind die Nullstellen mit dem Satz von Vieta gerade 6 und 4 . Somit gilt:

$$2((x - 6)(x - 4)) = 2(x^2 - 10x + 24) = 2x^2 - 20x + 48.$$

Aufgaben

Hier sind noch ein paar Übungsaufgaben (nicht jedes Polynom lässt sich mit Hilfe von Vieta umschreiben!):

a) $x^2 + 10x + 25$

b) $x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ (hier mit Brüchen arbeiten [$1/2 + (\dots) = 5/2$])

c) $3x^2 + 10x + 25$

d) $5x^2 + 5x + \frac{5}{4}$

e) $x^2 + 5x + \frac{4}{5}$

f) $x^2 - 4x - 16 + x^2$

g) $x^2 - 8x + 8$