Hold: Matematik B->A, STX, MaA07 dag-holdet
Eksamenssæt: Matematik A Studentereksamen 25 maj 2018

- Kære kursister, jeg har kørt alle opgaver hurtigt igennem i Maple, så I kan kontrollere facit med mine svar. Dette er ikke en fyldestgørende besvarelse, men blot et kontroldokument. Har I spørgsmål til sættet, så kan vi mødes til timerne 29 maj kl. 9:00-12:30 som er frivillige lektioner inden mundtlig eksamen d. 5 juni -

Delprøve 1 - uden hjælpemidler

Opgave 1

$-2x^2+2x+12=0 \Leftrightarrow$
$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow$
$(x-3)\cdot(x+2)=0 \Leftrightarrow$
$x=-2 \vee x=3$

Opgave 2

Forholdet er

$$k=\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{10}{5}=2$$

Så er

$$|BC|=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{6^2}=6$$

Og

$$|DE|=\frac{6}{k}=\frac{6}{2}=3.$$

Opgave 3

$f(x)=3\cdot 1.1^x$ er graf for B
$g(x)=3\cdot 0.9^x$ er graf for A
$h(x)=3\cdot x^{0.5}=3\sqrt{5}$ er graf for C.

Opgave 4

Vækstraten er -1.5%
Begyndelsesværdien er 70.4
Forskriften er

$$f(x)=70.4\cdot 0.985^x$$

fordi
$a=1+r$, hvor $r=-0.015$.

$f(x)$ angiver den årlige udledning af CO_2, målt i mio. tons, til tidspunktet x, målt i år fra 1990 til 2015

Opgave 5

$$f(x)=e^{\frac{x}{3}}-x-3$$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - 1$$

Indsæt i diff ligningen

$$\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{x + e^{\frac{x}{3}} - x - 3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{e^{\frac{x}{3}} - 3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - 1 \checkmark$$

Opgave 6

Lad $t = \ln(x)$,

$dt = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow dx = x\,dt$,

$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x = \quad 3 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot (t)^2 \cdot x \,\mathrm{d}t = 3 \cdot \int t^2 \,\mathrm{d}t = t^3 + k$, så

$t = \ln(x)$ og svaret er $(\ln(x))^3 + k$, for $k \in \mathbb{R}$.

Delprøve 2 - med hjælpemidler

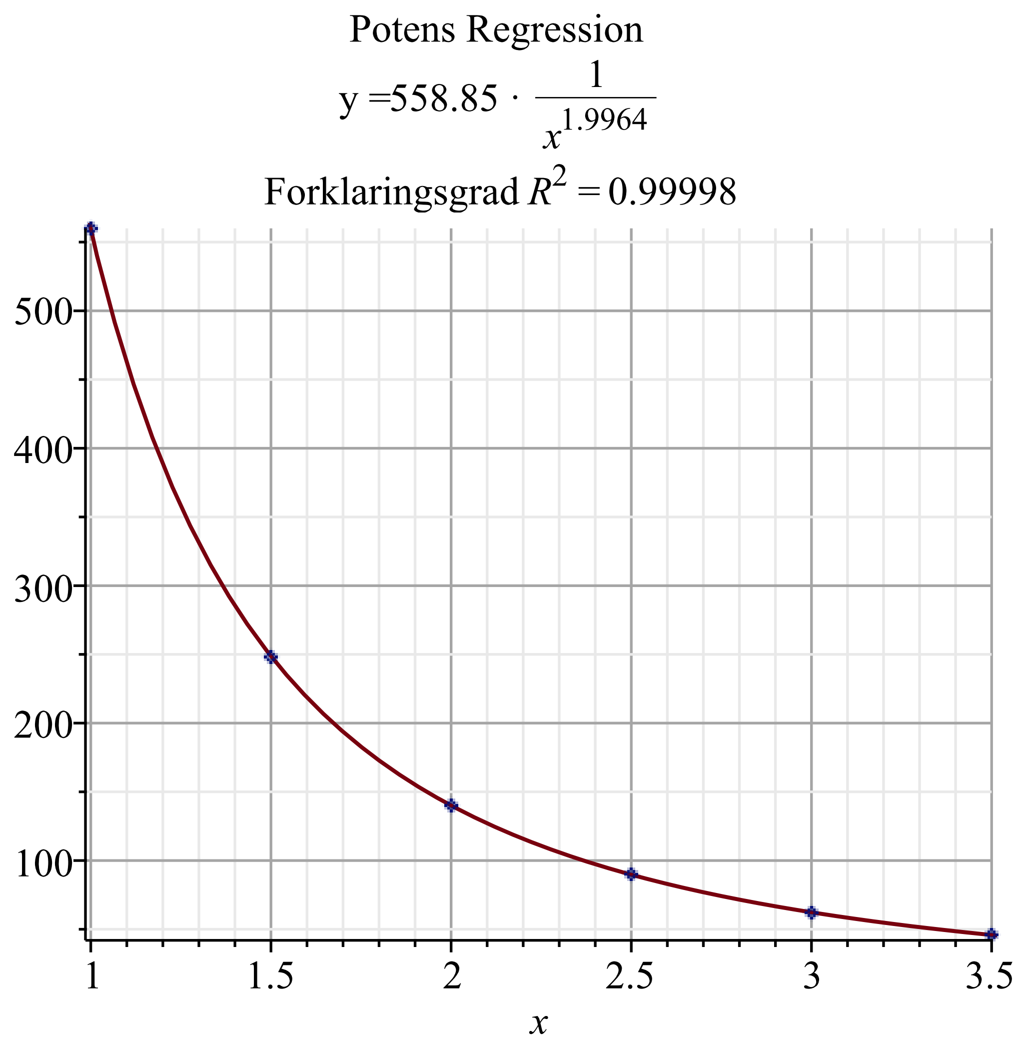
Opgave 7

with(*Gym*) :

Opgave a

$$obs := \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 3 & 3.5 \\ 560 & 248 & 140 & 90 & 62 & 46 \end{bmatrix} :$$

PowReg(*obs*)



$a = -1.9964$ og $b = 558.85$

Opgave b

$f(x) := 558.85 \cdot x^{-1.9964}$:

$f(x) = 5$

$$\frac{558.85}{x^{1.9964}} = 5 \tag{7.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 10.61718641]] \tag{7.2}$$

Afstanden skal være 10.6m

Opgave c

$r_x = 40\ \%$ eller 0.4, så

$r_y = \left((1 + 0.4)^{-1.9964} - 1\right) \cdot 100$

$$r_y = -48.91775337 \tag{7.3}$$

Lysintensiteten skal falde med 48.9% når afstanden øges med 40%

Opgave 8

$with(Gym):$

Opgave a

Parameterfremstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Giver ligningerne

$x = 1 + 2\,t$ og $y = 3 - 5\,t$, isoler t i første ligning så

$solve(1 + 2\,t = x, t)$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tag{8.1}$$

Indsæt i anden ligning og udregn y.

$y = 3 - 5 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)$

$$y = \frac{11}{2} - \frac{5\,x}{2} \tag{8.2}$$

Alternativt, find en tværvektor til $\vec{a}$.

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Udnyt punktet P.

$5 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 3) = 0$

$$5\,x - 11 + 2\,y = 0 \tag{8.3}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for y}}$

$$y = \frac{11}{2} - \frac{5\,x}{2} \tag{8.4}$$

Opgave b

$\vec{a} := \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}; \vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

$proj(\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{bmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

Opgave 9

$with(Gym):$

Opgave a

$B := 89 :; c := 58 :; a := 94 :$
Find a, så
$b := \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot Cos(B)}$

$$b := 109.5887721 \tag{9.1}$$

$A := invCos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$

$$A := 59.05056101 \tag{9.2}$$

$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot Sin(A)$

$$T = 2725.584816 \tag{9.3}$$

Opgave b

$m := \sqrt{c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot Cos(B)}$

$$m := 74.01249542 \tag{9.4}$$

Opgave 10

$with(Gym) :$

Opgave a

$f(x) := (x^2 + 5x + 500) \cdot \exp\left(-\frac{x}{100}\right) :$

Tangenten er
$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$$y = 500 \tag{10.1}$$

Opgave b

Løs ligningen
$f'(x) = 0$

$$(2x + 5)\, e^{-\frac{x}{100}} - \frac{(x^2 + 5x + 500)\, e^{-\frac{x}{100}}}{100} = 0 \tag{10.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 195]] \tag{10.3}$$

Benyt anden afledede.
$f''(0)$

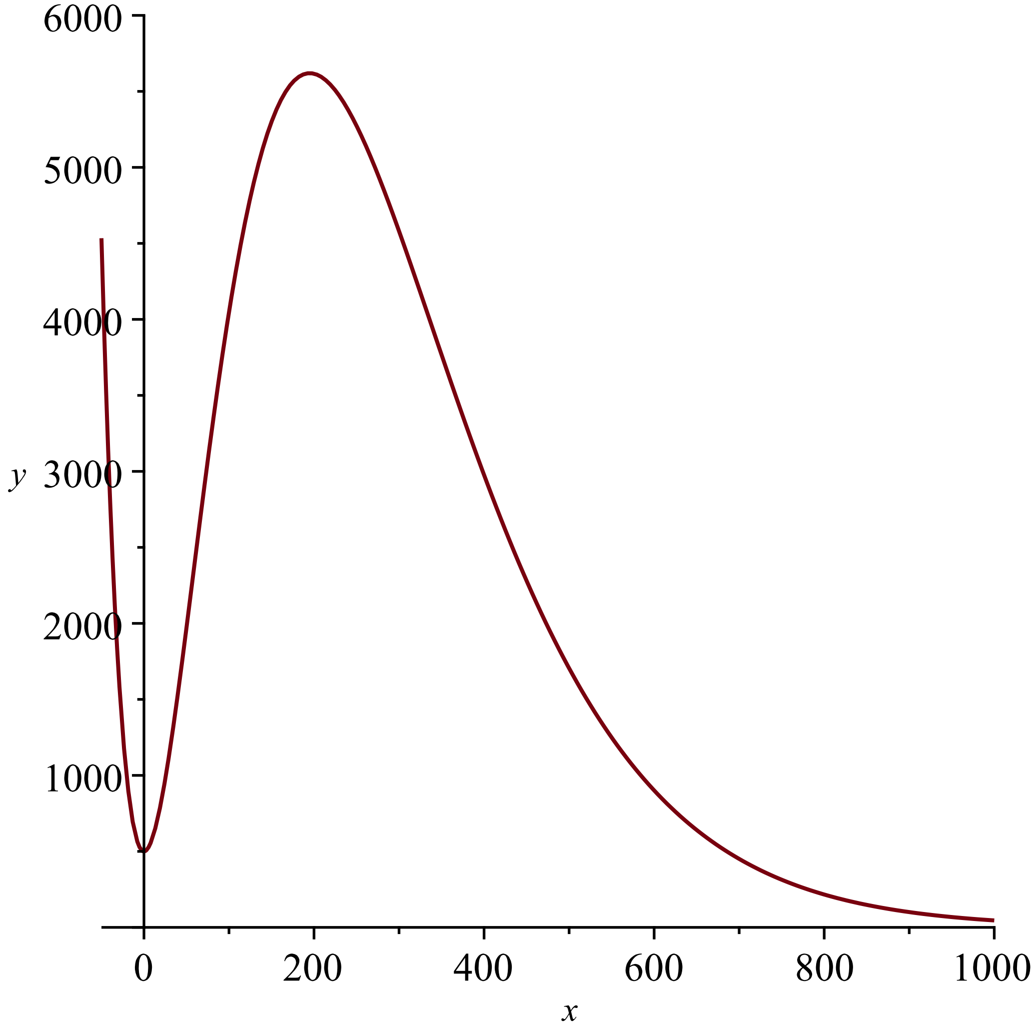
$$\frac{39}{20} \tag{10.4}$$

Positiv når $x = 0$, dvs. $f''(0) > 0$, så er der lokalt minimum.
$f''(195)$

$$-\frac{39\, e^{-\frac{39}{20}}}{20} \tag{10.5}$$

Negativ når $x = 195$, dvs. $f''(195) < 0$, så er der lokalt maksimum.
-$f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty; 0]$ og $[195; \infty[$
-$f(x)$ er voksende i intervallet $[0; 195]$.

$plot(f(x), x=-50..1000, y=-10..6000)$



Opgave 11

$with(Gym):$

Opgave a

$$c(x) := \frac{12500\cdot x - 2500\cdot x^2}{150 + 7.8^x} + 90$$

$$c := x \mapsto \frac{-2500\,x^2 + 12500\,x}{150 + 7.8^x} + 90 \qquad \textbf{(11.1)}$$

$0 \le x \le 7.$

Løs ligningen

$fintervalsolve(c'(x) = 0, x = 0..7)$

$$[1.619547144, 5.534788851] \qquad \textbf{(11.2)}$$

$c''(1.619547144)$

$$-78.95967092 \qquad \textbf{(11.3)}$$

Som er negativ, dermed er $x = 1.619547144$ maksimal.
Så glukosekoncentrationen er maksimal ved 1.6 timer efter indtagelse.

Opgave b

$fintervalsolve(c(x) = 130, x = 0..7)$

$$[0.5505316428, 2.665889157] \qquad (11.4)$$

$\Delta x = 2.665889157 - 0.5505316428$

$$\Delta x = 2.115357514 \qquad (11.5)$$

så glukosekoncentrationen er over 130mg/dl i ca. 2.11 timer.

Opgave 12

$with(Gym):$

Opgave a

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 32$

$$f := x \mapsto x^3 - 6x^2 + 32 \qquad (12.1)$$

$V_M = \text{Pi} \cdot \int_0^4 (f(x))^2 \, dx$

$$V_M = \frac{53248\,\pi}{35} \qquad (12.2)$$

$evalf[5](\%)$

$$V_M = 4779.6 \qquad (12.3)$$

Opgave b

Løs ligningen så vi får grænserne for N.

$f(x) - 32 = 0$

$$x^3 - 6x^2 = 0 \qquad (12.4)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 6], [x = 0], [x = 0]] \qquad (12.5)$$

$\frac{M}{N} = \left| \frac{\int_0^4 f(x)\, dx}{\int_0^6 (f(x) - 32)\, dx} \right|$

$$\frac{M}{N} = \frac{16}{27} \qquad (12.6)$$

Opgave 13

$with(Gym):$

$restart$

Opgave a

Hypotese: Der er ingen sammenhæng mellem kolde fødder og symptomer på forkølelse.

De forventede værdier bestemmes via formlen

$forv = \frac{sum\ lodret \cdot sum\ vandret}{sum\ i\ alt}$

Dvs. det skal I selv udregne.

$$forv = \begin{bmatrix} 9 & 81 \\ 9 & 81 \end{bmatrix}$$

Opgave b

Man kan nøjes med den ene oplysning og finde alle andre observerende værdier.
Man kunne f.eks. opstille det sådan

Observationer	Symptomer på forkølelse	Ingen symptomer på forkølelse	Sum
Afkølede fødder	13	x	90
Ikke afkølede fødder	y	z	90
Sum	18	162	180

Og løse ligningerne

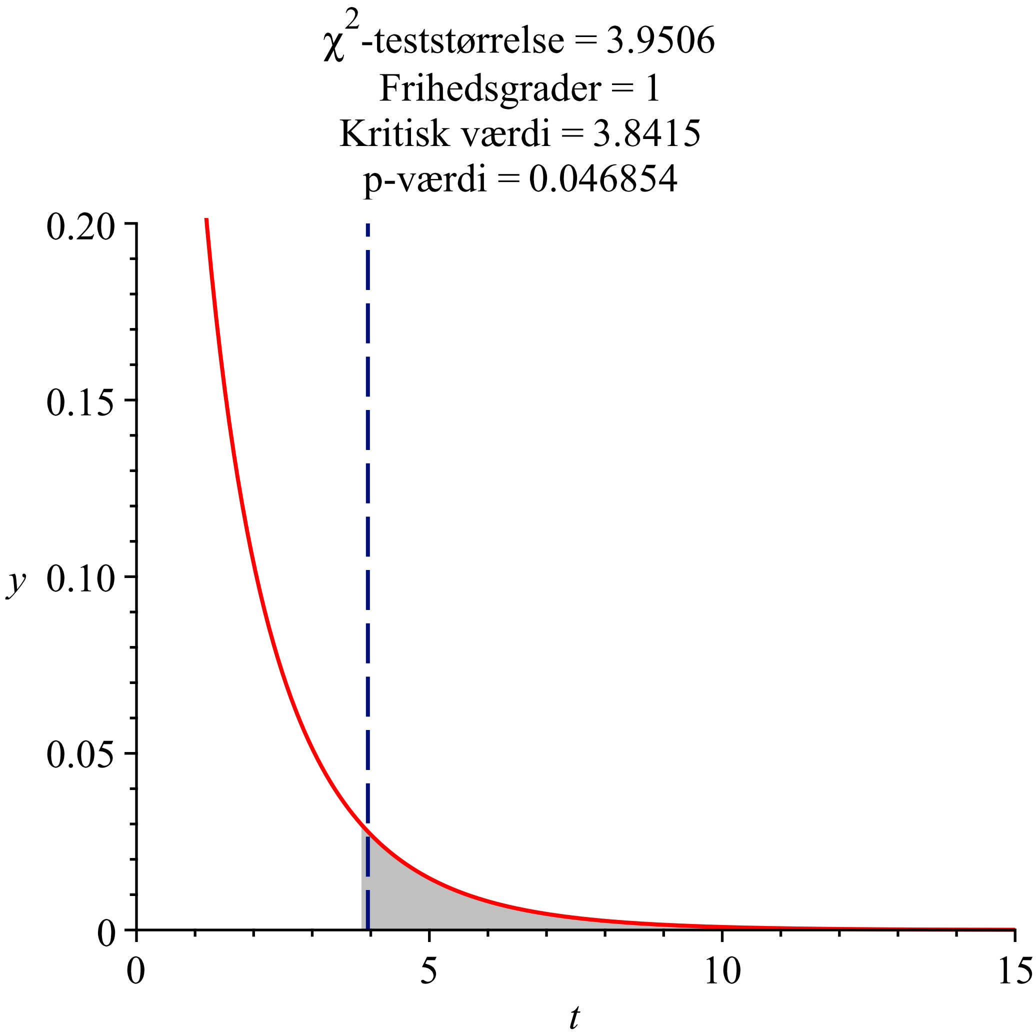
$solve(\{13 + x = 90, 13 + y = 18, x + z = 162\})$

$$\{x = 77, y = 5, z = 85\} \quad \textbf{(13.1)}$$

$$obs := \begin{bmatrix} 13 & 77 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}:$$

Og lav en uafhænighedstest.

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$



P-værdien er mindre end 5%, så hypotesen forkastes.

Opgave 14

with(*Gym*) :

Opgave a

$V'(t) = \frac{1}{7700} \cdot (2800 - 40 \cdot V(t))$

$$D(V)(t) = \frac{4}{11} - \frac{2\, V(t)}{385} \tag{14.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve DE}}$

$$V(t) = 70 + e^{-\frac{2\,t}{385}}\,\_C1 \tag{14.2}$$

$95 = 70 + e^{-\frac{2 \cdot 0}{385}}\,\_C1 \xrightarrow{\text{solve for }\_C1} [[\_C1 = 25]]$

$V(t) := 70 + e^{-\frac{2\,t}{385}} \cdot 25$

$$V := t \mapsto 70 + 25\, e^{-\frac{2\,t}{385}} \tag{14.3}$$

$V(45)$

$$70 + 25\, e^{-\frac{18}{77}} \tag{14.4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$89.788 \tag{14.5}$$

så efter 45 dage vejer personen 89.8kg

Opgave b

restart

with(*Gym*) :

$V'(t) = \frac{1}{7700} \cdot (\mathrm{D} - 40 \cdot V(t))$

$$\mathrm{D}(V)(t) = \frac{\mathrm{D}}{7700} - \frac{2\, V(t)}{385} \tag{14.6}$$

$\xrightarrow{\text{solve DE}}$

$$V(t) = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2\,t}{385}}\, \_C1 \tag{14.7}$$

$100 = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2\cdot 0}{385}}\, \_C1$

$$100 = \frac{\mathrm{D}}{40} + \_C1 \tag{14.8}$$

$\xrightarrow{\text{solve for \_C1}}$

$$\left[\left[\_C1 = -\frac{\mathrm{D}}{40} + 100\right]\right] \tag{14.9}$$

$V(t) = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2\,t}{385}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{D}}{40} + 100\right)$

$$V(t) = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2\,t}{385}} \left(-\frac{\mathrm{D}}{40} + 100\right) \tag{14.10}$$

$95 = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{2\cdot 90}{385}} \left(-\frac{\mathrm{D}}{40} + 100\right)$

$$95 = \frac{\mathrm{D}}{40} + e^{-\frac{36}{77}} \left(-\frac{\mathrm{D}}{40} + 100\right) \tag{14.11}$$

$\xrightarrow{\text{solve for D}}$

$$\left[\left[\mathrm{D} = \frac{200\left(20\, e^{-\frac{36}{77}} - 19\right)}{e^{-\frac{36}{77}} - 1}\right]\right] \tag{14.12}$$

evalf[5](%)

$$[[\mathrm{D} = 3464.4]] \tag{14.13}$$

Energiindtaget skal være 3464kcal for personen.

Opgave 15

$with(Gym)$:

Opgave a

$\overrightarrow{OA} := \langle 0, 3, 3\rangle$:; $\overrightarrow{OB} := \langle 1, 4, 0\rangle$:; $\overrightarrow{OC} := \langle 6, 0, 3\rangle$:

$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{15.1}$$

$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15.2}$$

$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -9 \end{bmatrix} \tag{15.3}$$

Brug punktet A som fast punkt.

$-9 \cdot (x - 0) - 18 \cdot (y - 3) - 9 \cdot (z - 3) = 0$

$$-9\,x - 18\,y + 81 - 9\,z = 0 \tag{15.4}$$

$\dfrac{-9\,x - 18\,y + 81 - 9\,z}{-9} + 9 = \dfrac{0}{-9} + 9$

$$x + 2\,y + z = 9 \tag{15.5}$$

Og pengene passer.

Opgave b

Indsæt parameterfremstillingen i planen.

$(3 \cdot k \cdot t) + 2 \cdot (3 + t) + (3 - t \cdot k) = 9$

$$2\,k\,t + 2\,t + 9 = 9 \tag{15.6}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = -1]] \tag{15.7}$$