Þrír kaflar um mengjafræði

Reynir Axelsson

Reykjavík, 2014

Formáli

Þetta hefti er að stofni til inngangskafli og tveir viðaukar úr tveimur fyrirlestraheftum um línulega algebru. Einhverntíma var ég spurður um aðgengilegt efni um mengjafræði, og mér kom þá til hugar að ekki þyrfti miklar viðbætur við þessa þrjá kafla til að gera úr þeim hefti sem gæti orðið nytsamlegt fyrir stærðfræðinema. Meginviðbæturnar eru ný grein um venzl í fyrsta kaflanum og eilítið ítarlegra mál um náttúrlegar tölur í öðrum kaflanum, auk þess sem samræma þurfti efni milli kaflanna.

Kaflarnir þrír í heftinu hafa hver sinn tilgang, og að töluverðu leyti má nota þá óháð hvern öðrum. Í fyrsta kaflanum er reynt að taka saman með nokkuð óformlegum hætti þau helztu undirstöðuhugtök úr mengjafræði sem allir stærðfræðinemar þurfa að kunna upp á sína tíu fingur. Öðrum kaflanum er ætlað að treysta undirstöður fyrsta kaflans með því að lýsa því frumsendukerfi sem flestir stærðfræðingar notfæra sér í daglegu starfi (hvort sem þeir gera sér meðvitaða grein fyrir því eða ekki), svokallaðri *Zermelo-Fraenkel-mengjafræði.* Þessi kafli er ætlaður þeim sem vilja treysta undirstöður þekkingar sinnar með því að sjá hvernig réttlæta má efni fyrsta kaflans útfrá skýrt framsettum frumsendum. Þriðji kaflinn fjallar síðan um þær örfáu niðurstöður úr mengjafræði sem eru ekki augljósar, en eru oft notaðar af stærðfræðingum í ólíkustu sérgreinum, en það eru hjálparsetning Zorns, velröðunarsetning Zermelos og einföldustu staðreyndir um raðtölur og fjöldatölur.

Reynir Axelsson

Efnisyfirlit

Kafli I

Undirstöðuatriði einfaldrar mengjafræði

§1. Stök, mengi og mengjaaðgerðir

Í þessari grein rifjum við upp nokkrar undirstöðustaðreyndir um mengi og byrjum á að velta fyrir okkur hvað mengi er. Höfundur mengjafræðinnar, Georg Cantor, skilgreindi mengi með eftirfarandi hætti:

> „Mengi" M er hvers konar samantekt ákveðinna vel aðgreindra hluta m (sem við köllum „stök" mengisins) úr reynslu okkar eða hugsun í eina heild.

Í stórum dráttum segir skilgreining Cantors að mengi sé ekki annað en hvers konar hópur eða samsafn af hlutum.

Þessi skilgreining Cantors hefur verið gagnrýnd á þeirri forsendu að hún segi ekki neitt. Hún segir að vísu að mengi sé „samantekt" af hlutum; en þarf þá ekki að skilgreina hvað „samantekt" er? Það hjálpar ekki að setja neitt annað orð í staðinn fyrir „samantekt", til dæmis orðin „hópur" eða „samsafn", því að þá má alveg eins spyrja hvernig skilgreina eigi hugtökin „hópur" eða „samsafn".

Vandinn er að við getum ekki skilgreint eitt eða neitt nema með tilvísun til einhvers sem er þekkt. Venjulega skilgreinum við hugtök út frá einfaldari hugtökum. En hvernig sem menn hafa farið að hefur ekki tekizt að finna nein hugtök sem eru einfaldari en hugtökin „mengi" og „stak". Við verðum því að láta þau vera óskilgreind. Við getum þá litið á „skilgreiningu" Cantors sem lauslega skýringu á því hvað í þessum hugtökum felst.

Þótt við getum ekki gefið beina skilgreiningu á hvað mengi er, þá getum við gert grein fyrir hugtakinu óbeint. Það gerum við með því að gefa okkur sem „frumforsendu“ — eða ***frumsendu***, eins og það er kallað — eftirfarandi staðhæfingu, sem oft er kölluð ***frumsenda um umtak***:

Mengi eru söm þá og því aðeins að þau hafi sömu stök.

Nafn frumsendunnar skýrist af því að stundum er hún orðuð svo að „mengi ákvarðist af umtaki sínu“. Með því er átt við að það ákvarðist af stökunum sem í því eru. [Nafnið mun vera ættað úr heimspeki. Þar er gerður greinarmunur á *umtaki* og *inntaki* hugtaka. Umtak hugtaks er allir hlutir sem falla undir hugtakið; umtak hugtaksins „rauður“ er til dæmis allir rauðir hlutir. Inntak hugtaks er hins vegar *merking* þess í einhverjum skilningi, sem við þurfum ekki að hafa áhyggjur af hér.]

Það er vert að staldra við og reyna að gera sér grein fyrir hvernig frumsendan um umtak kemur í staðinn fyrir skilgreiningu á mengi. Hún segir ekki beinum orðum hvað mengi er, en hún segir í staðinn hvað við þurfum að vita til að *þekkja* eitthvert tiltekið mengi: við þurfum aðeins að vita hvaða stök það hefur. Ekkert annað skiptir máli.

Hver sá hlutur sem stærðfræðin fjallar um kallast ***stak***. Stökum eru gefin heiti, sem eru sérstök tákn eða bókstafir eða samsetningar af táknum og bókstöfum. Sumum stökum eru gefin heiti í eitt skipti fyrir öll; til dæmis fá fyrstu náttúrlegu tölurnar heitin „0“, „1“, „2“, „3“. Slík heiti samsvara eiginnöfnum í venjulegu mæltu máli. Öðrum eru gefin heiti til bráðabirgða; þá verða oftast fyrir valinu bókstafir (sem í rökfræði eru kallaðir ***breytur***). Slík heiti samsvara einna helzt fornöfnum í mæltu máli, svo sem orðunum „hann“, „hún“ og „það“. Sú meginregla gildir að eitt og sama heiti verður alltaf að standa fyrir sama stakið í ákveðnu samhengi. Ef til dæmis bókstafurinn „x“ kemur fyrir sem heiti tvisvar í einni setningu, þá táknar hann sama stakið í bæði skiptin. Aftur á móti getur eitt stak haft mörg heiti. Til dæmis eru „4“ og „2 + 2“ tvö heiti á sama stakinu. Ef a og b eru sama stakið, þá skrifum við

$$a = b.$$

Ef a og b eru ekki sama stakið, þá skrifum við

$$a \neq b.$$

Táknið „=“ kallast ***jafnaðarmerki*** eða ***samsemdarmerki***. Fullyrðing af gerðinni $a = b$ kallast ***jafna*** eða ***samsemd***. Um jöfnur gilda reglurnar

$$\begin{gathered} a = a, \\ \text{ef } a = b, \text{ þá er } b = a, \\ \text{ef } a = b \text{ og } b = c, \text{ þá er } a = c. \end{gathered}$$

Við skrifum oft „$a = b = c$“ í stað „$a = b$ og $b = c$“ o. s. frv.

Önnur mikilvæg regla um samsemd er þessi: Setjum svo að $E(x)$ sé einhver fullyrðing um almennt stak x. Ef $a = b$, þá er fullyrðingin $E(a)$ sönn þá og því aðeins að fullyrðingin $E(b)$ sé sönn.

Stök má taka saman í ***mengi***. Fyrir sérhvert stak x og sérhvert mengi A gildir nákvæmlega eitt af tvennu:

$$x \text{ er stak í } A$$

eða

$$x \text{ er ekki stak í } A.$$

Ef x er stak í A, þá skrifum við

$$x \in A,$$

en ef x er ekki stak í A, þá skrifum við

$$x \notin A.$$

Við skrifum oft „$x, y \in A$“ í stað „$x \in A$ og $y \in A$“ o. s. frv.

Tökum sérstaklega eftir því að mengi eru líka stök, og þau geta því verið stök í öðrum mengjum. Þannig má mynda mengi af mengjum, mengi af mengjum af mengjum o. s. frv.

(1.1) Skilgreining. *Látum A og B vera mengi. Við segjum að A sé* ***hlutmengi*** *í menginu B ef sérhvert stak í A er jafnframt stak í B. Við skrifum þá*

$$A \subset B$$

og segjum einnig að A sé ***innihaldið*** *í B og að B sé* ***yfirmengi*** *mengisins A. Ef A er ekki hlutmengi í B, þá skrifum við*

$$A \not\subset B.$$

Ef $A \subset B$ og $A \neq B$, þá segjum við að A sé ***eiginlegt hlutmengi*** *í menginu B og skrifum*

$$A \subsetneqq B.$$

Fullyrðingin $A \subset B$ jafngildir því fullyrðingunni

$$\text{ef } x \in A, \text{ þá er } x \in B,$$

og fullyrðingin $A \not\subset B$ jafngildir fullyrðingunni

$$\text{til er stak } x \text{ þannig að } x \in A \text{ og } x \notin B.$$

(1.2) Viðvörun. Margir höfundar nota táknasamstæðuna $A \subseteq B$ til að lýsa því að A sé hlutmengi í menginu B, en táknasamstæðuna $A \subset B$ til að lýsa því að A sé eiginlegt hlutmengi í B. Sá ritháttur sem við notum er þó sennilega algengari.

Við getum nú sett frumsenduna um umtak fram með þessu táknmáli:

> **Frumsenda um umtak.** Fyrir mengi A og B gildir $A = B$ þá og því aðeins að $A \subset B$ og $B \subset A$.

Við notum frumsenduna um umtak oftast þegar við þurfum að sýna að mengi A og B séu sama mengið: Til að sanna að $A = B$ þurfum við að sýna tvennt:

(i) ef $x \in A$, þá er $x \in B$,
(ii) ef $x \in B$, þá er $x \in A$.

Af frumsendunni um umtak leiðir að við getum tilgreint mengi með því að taka fram hvaða stök það hefur. Einfaldasta leiðin til þess er að telja þau upp. Mengið sem hefur stökin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (og engin önnur) er táknað

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Sér í lagi getum við fyrir sérhvert stak a myndað mengið

$$\{a\}$$

sem hefur aðeins eitt stak, nefnilega stakið a. Slíkt mengi kallast ***einstökungur***.

(1.3) Athugasemd. Samkvæmt frumsendunni um umtak skiptir ekki máli hversu oft eitthvert stak er talið í upptalningunni, og ekki skiptir heldur máli í hvaða röð stökin eru talin upp. Þannig er til dæmis $\{a, a\} = \{a\}$ og $\{2, 2, 3, 2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\}$. Stundum er ekki alveg augljóst hve mörg stök mengi hefur sem er tiltekið með þessum hætti. Til dæmis hefur mengið $\{3, 1 + 2\}$ aðeins eitt stak, því að $1 + 2 = 3$. Þetta er einfalt dæmi, en oft er mjög erfitt að sjá að tiltekin stök séu sama stakið.

Ljóst er þó að ekki er ávallt unnt að fara þessa leið, því að sum mengi geta haft óendanlega mörg stök, og við getum aldrei talið þau öll upp. Algengara er að skilgreina mengi með þeim „eiginleikum“ sem stök þess eiga að hafa. Nú er „eiginleiki“ dálítið óljóst hugtak, og heppilegra er að tala um „fullyrðingar“ um stök, því að auðveldara er að gera grein fyrir þeim. Svo að dæmi sé tekið úr mæltu máli, þá getum við talað um eiginleikann „að vera rauður“. Gerum nú ráð fyrir að við viljum tala um alla rauða hluti. Í stað þess að tala um alla þá hluti sem hafa eiginleikann að vera rauður getum við alveg eins talað um alla hluti x þannig að fullyrðingin „x er rauður“ sé sönn.

(1.4) Skilgreining. *Látum $E(x)$ vera einhverja fullyrðingu um stakið x. Gerum ennfremur ráð fyrir að til sé mengi sem hefur sem stök nákvæmlega þau stök x þannig að fullyrðingin $E(x)$ sé sönn. Þetta mengi er þá táknað*

$$\{x : E(x)\}.$$

Ef A er mengi, þá táknum við einnig með

$$\{x \in A : E(x)\}$$

mengi allra staka x þannig að fullyrðingin „$x \in A$ og $E(x)$“ sé sönn.

Samkvæmt skilgreiningunni gildir:

$$x \in \{x : E(x)\} \text{ þá og því aðeins að } E(x).$$

Skilgreiningu á mengi með því að telja upp stök þess má einnig rita með þessum hætti. Til dæmis er

$$\{a, b\} = \{x : x = a \text{ eða } x = b\}.$$

(1.5) Athugasemd. Sú forsenda í skilgreiningunni að *til sé* mengi sem inniheldur nákvæmlega þau stök x þannig að fullyrðingin $E(x)$ sé rétt er ekki óþörf. Á fyrstu dögum mengjafræðinnar gengu menn útfrá því sem vísu að hvaða eiginleika sem vera skal mætti nota til að skilgreina mengi, en síðar kom í ljós að svo er alls ekki. Frægasta dæmið er svokölluð ***þversögn Russells***. Undir því nafni gengur sú staðreynd, sem Bertrand Russell benti fyrstur á, að fullyrðingin „$x \notin x$“ skilgreinir ekki mengi. Með öðrum orðum er ekki til neitt mengi sem inniheldur sem stök nákvæmlega þau mengi sem eru ekki stök í sjálfum sér. Til að sjá það gerum við ráð fyrir að slíkt mengi A sé til, með öðrum orðum er

$$A = \{x : x \notin x\}.$$

Fyrir sérhvert stak x gildir þá

$$x \in A \text{ þá og því aðeins að } x \notin x.$$

En þar sem þetta gildir fyrir sérhvert x gildir það sér í lagi fyrir mengið A. Við höfum því

$$A \in A \text{ þá og því aðeins að } A \notin A.$$

En þetta er mótsögn: Annaðhvort gildir $A \in A$ eða $A \notin A$. Ef $A \in A$, þá segir skilyrðið að $A \notin A$. Ef $A \notin A$, þá segir skilyrðið að $A \in A$. Í báðum tilfellum sjáum við að bæði skilyrðin $A \in A$ og $A \notin A$ gilda samtímis, en það fær ekki staðizt. Við hljótum því að álykta að ekkert mengi A sé til sem fullnægir skilyrðinu.

Viðbrögð manna við þversögn Russells og öðrum ámóta þversögnum voru þau að tiltaka nánar hvaða eiginleika er óhætt að nota til að skilgreina mengi. Þetta var gert með því að bæta við frumsenduna um umtak nýjum frumsendum sem segja flestar að tilteknir eiginleikar skilgreini mengi. Þannig varð til svokölluð ***frumsendumengjafræði***. Nokkur ólík frumsendukerfi fyrir mengjafræði hafa verið sett fram, en þekktast þeirra er kennt við Ernst Zermelo og Adolf Fraenkel og kallað ***Zermelo-Fraenkel-mengjafræði***.

Við gerum ekki nákvæma grein fyrir frumsendumengjafræði í þessum kafla. Flestar frumsendur Zermelo-Fraenkel-mengjafræði eru til að tryggja að þeir eiginleikar sem stærðfræðingar nota dags daglega til að skilgreina mengi séu leyfilegir. Þannig tryggja frumsendurnar tilvist allra þeirra mengja sem við skilgreinum í þessari grein, til dæmis sammengis, sniðmengis og mismunar tveggja mengja (sjá skilgreiningu (1.9)). Við látum okkur í bili nægja að gera stuttar athugasemdir á eftir sumum skilgreiningum þegar sérstakrar frumsendu er þörf til að tryggja að það sem skilgreint er sé til. Í öðrum kafla þessa heftis er hins vegar gefin lýsing á kerfi Zermelos og Fraenkels handa þeim sem vilja treysta undirstöðuþekkingu sína enn betur.

Tilgreinum samt strax tvær frumsendur kerfisins. Önnur þeirra, sem er stundum kölluð ***frumsenda um lítil mengi***, segir að fyrir gefin stök a og b sé til mengi sem inniheldur nákvæmlega stökin a og b, nefnilega mengið $\{a, b\}$. Með öðrum orðum segir hún að fullyrðingin „$x = a$ eða $x = b$“ skilgreini mengi. Hin, sem kallast ***frumsenda um hlutmengi***, segir að fyrir sérhverja „skynsamlega fullyrðingu“$E(x)$ og sérhvert mengi A megi skilgreina hlutmengi allra staka í menginu A sem hafa eiginleikann $E(x)$. Með öðrum orðum segir hún að mengið $\{x \in A : E(x)\}$ sé til. Við útskýrum ekki nákvæmlega nú hvað átt er við með „skynsamlegri“ fullyrðingu; það verður gert í næsta kafla. Við látum nægja í bili að segja að með því er átt við fullyrðingu sem er sett saman úr einföldum fullyrðingum af gerðinni „$x \in A$“ og „$x = y$“ eftir ákveðnum reglum.

Frumsendan um hlutmengi leyfir okkur því að skilgreina mengi allra staka sem hafa tiltekinn „skynsamlegan“ eiginleika *og eru auk þess stök í fyrirfram gefnu mengi.* Þessi takmörkun virðist nægja til að forðast þversagnir á borð við þversögn Russells. Ef A er gefið mengi, þá er til dæmis ekkert því til fyrirstöðu að mynda mengið

$$B := \{x \in A : x \notin x\},$$

með öðrum orðum mengi allra mengja *sem eru stök í* A en ekki stök í sjálfum sér. Með sama hætti og að ofan sést að $B \in B$ þá og því aðeins að $B \in A$ og $B \notin B$. En af því er ekki unnt að leiða neina mótsögn, heldur getum við aðeins dregið þá ályktun að $B \notin B$ og að $B \notin A$. (Hvernig?)

Tvær aðrar frumsendur Zermelo-Fraenkel-kerfisins er einnig vert að minnast á hér, af því að þær eru nokkuð frábrugðnar hinum, þótt við látum bíða að segja nákvæmlega hnvernig þær eru. Önnur er svokölluð ***frumsenda um val***, en hún verður sett fram og rædd stuttlega í fjórðu grein þessa kafla. Hin er svokölluð ***frumsenda um óendanlegt mengi***, sem tryggir tilvist *mengis allra náttúrlegra talna.* Með henni og öðrum frumsendum mengjafræðinnar má síðan sanna tilvist alls *venjulega talnakerfisins.*

Við reynum ekki að gera grein fyrir talnakerfinu í þessu hefti. Í þessum fyrsta kafla gerum við ráð fyrir að lesandinn hafi öðlast einhverja þekkingu á hvað tölur eru og kunni skil á einföldustu eiginleikum þeirra. Einkum gerum við ráð fyrir að hann kannist við mengi ***náttúrlegu talnanna*** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ og kunni skil á einföldustu eiginleikum þeirra. Ekki skaðar að hann þekki líka mengi ***heilu talnanna*** $\mathbb{Z}$, mengi ***ræðu talnanna*** $\mathbb{Q}$ og mengi ***rauntalnanna*** $\mathbb{R}$ og kunni eitthvað með þessar tölur að fara, þótt komum lítið til með að nota þær, nema hvað við vísum stöku sinnum í rauntölurnar í skýringardæmum. Í kafla II sýnum við svo fyrir þá sem áhuga hafa hvernig búa má til mengi náttúrlegu talnanna innan mengjafræðinnar og þannig að réttlæta þá eiginleika þeirra sem við leyfum okkur að nota í þessum kafla.

Þar sem $x = x$ gildir fyrir sérhvert stak x er ekki til neitt stak x þannig að $x \neq x$. Mengið

$$\{x : x \neq x\}$$

hefur því ekkert stak. Við segjum að mengi sem hefur ekkert stak sé ***tómt***. Ekki getur verið til nema eitt tómt mengi: Gerum ráð fyrir að A og B séu tóm mengi. Ef $A \neq B$, þá gildir samkvæmt frumsendunni um umtak annaðhvort $A \not\subset B$ eða $B \not\subset A$. Setjum svo að $A \not\subset B$. Þá er til stak x í menginu A sem er ekki stak í menginu B. En A hefur ekkert stak, þannig að það fær ekki staðizt. Eins fæst mótsögn ef við gerum ráð fyrir að $B \not\subset A$. Við ályktum því að $A = B$. Nú má skilgreina:

(1.6) Skilgreining. *Mengið*

$$\varnothing := \{x : x \neq x\}$$

kallast ***tóma mengið****.*

(1.7) Athugasemdir. (1) Við notum hér þá ritvenju að tvípunktur framan við (eða aftan við) jafnaðarmerki tákni skilgreiningu. Þá ber að líta svo á að jafnan sé skilgreining þess tákns sem stendur sömum megin við jafnaðarmerkið og tvípunkturinn.

(2) Tóma mengið gefur okkur gott dæmi um að ekki má rugla saman stakinu a og menginu $\{a\}$ sem hefur aðeins stakið a og engin önnur stök. Tóma mengið hefur sjálft ekkert stak, en mengið $\{\varnothing\}$ hefur nákvæmlega eitt stak, nefnilega stakið $\varnothing$. Því er augljóslega $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Við tökum nú saman nokkrar einfaldar staðreyndir um hlutmengi:

(1.8) Setning. (1) *Ef A er mengi, þá er $A \subset A$; með öðrum orðum er sérhvert mengi hlutmengi í sjálfu sér.*

(2) *Ef $A \subset B$ og $B \subset C$, þá er $A \subset C$.*

(3) *Ef A er mengi, þá er $\varnothing \subset A$; með öðrum orðum er tóma mengið hlutmengi í sérhverju mengi.*

(4) *Ef A er mengi og $A \subset \varnothing$, þá er $A = \varnothing$.*

Sönnun: (1) Þessi fullyrðing segir að $x \in A$ sé afleiðing af $x \in A$, sem er augljóst.

(2) Gerum ráð fyrir að $A \subset B$ og $B \subset C$ og sýnum að sérhvert stak í A sé jafnframt stak í C: Við gerum því ráð fyrir að $x \in A$. Af $x \in A$ og $A \subset B$ leiðir $x \in B$. En af $x \in B$ og $B \subset C$ leiðir $x \in C$, eins og sanna átti.

(3) Gerum ráð fyrir að svo sé ekki og að $\varnothing \not\subset A$. Þá er til stak x í $\varnothing$ sem er ekki stak í A. En $\varnothing$ hefur ekkert stak, svo að það fær ekki staðizt.

(4) Gerum ráð fyrir að $A \subset \varnothing$. Samkvæmt (3) gildir einnig $\varnothing \subset A$. En þá er $A = \varnothing$ samkvæmt frumsendunni um umtak. $\square$

Við getum framkvæmt ýmsar reikniaðgerðir á mengjum:

(1.9) Skilgreining. *Látum A og B vera mengi.*

(1) *Mengið*

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ eða } x \in B\}$$

*kallast **sammengi** mengjanna A og B.*

(2) *Mengið*

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ og } x \in B\}$$

*kallast **sniðmengi** mengjanna A og B. Mengi A og B kallast **sundurlæg** ef $A \cap B = \varnothing$.*

(3) *Mengið*

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ og } x \notin B\}$$

*kallast **mismunur** mengjanna A og B. Ef B er hlutmengi í menginu A, þá er mismunurinn $A \setminus B$ einnig kallaður **fyllimengi** mengisins B í menginu A.*

Sammengið $A \cup B$ er mengi allra staka sem eru annaðhvort stök í A eða í B *eða hvort tveggja*. Sniðmengið $A \cap B$ er mengi allra staka sem eru stök í báðum mengjunum A og B. Mismunurinn $A \setminus B$ er mengi allra staka sem eru í A en ekki í B.

(1.10) Athugasemdir. (1) Sérstaka frumsendu þarf til að tryggja tilvist sammengis tveggja mengja; hún kallast ***frumsenda um sammengi*** og er raunar sett fram í almennari mynd þannig að hún tryggi einnig tilvist sammengis óendanlega margra mengja; sjá einnig athugasemdir (4.2) hér á eftir. Ekki þarf sérstaka frumsendu til að tryggja tilvist sniðmengis og mismunar tveggja mengja. Hún er afleiðing af frumsendunni um hlutmengi, því að skrifa má $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ og $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

(2) Af frumsendunni um lítil mengi og frumsendunni um sammengi leiðir tilvist þeirra mengja sem eru skilgreind með því að telja upp stök þeirra. Frumsendan um lítil mengi segir að fyrir gefin stök a, b sé mengið $\{a, b\}$ til, og sér í lagi er þá fyrir gefið stak a mengið $\{a\} = \{a, a\}$ til. En þá má nota frumsenduna um sammengi til að tryggja tilvist mengja af gerðinni $\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}$, $\{a, b, c, d\} := \{a, b, c\} \cup \{d\}$ o. s. frv.

Við tökum saman helztu reglur um þessar reikniaðgerðir á mengjum í setningu:

(1.11) Setning. (1) *Fyrir öll mengi A og B er $A \subset A \cup B$ og $B \subset A \cup B$.*

(2) *Fyrir öll mengi A og B er $A \cap B \subset A$ og $A \cap B \subset B$.*

(3) *Ef $A \subset C$ og $B \subset C$, þá er $A \cup B \subset C$.*

(4) *Ef $A \subset B$ og $A \subset C$, þá er $A \subset B \cap C$.*

(5) *Fyrir sérhvert mengi A er $A \cup \varnothing = A$ og $A \cap \varnothing = \varnothing$.*

(6) *Fyrir sérhvert mengi A er $A \cup A = A$ og $A \cap A = A$.*

(7) (*Víxlreglur*) *Fyrir öll mengi A og B er*

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{og} \quad A \cap B = B \cap A.$$

(8) (*Tengireglur*) *Fyrir öll mengi A, B og C er*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

og

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(9) (*Dreifireglur*) *Fyrir öll mengi A, B og C er*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

og

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(10) *Fyrir sérhvert mengi A er $A \setminus \varnothing = A$ og $A \setminus A = \varnothing$.*

(11) *Fyrir öll mengi A, B og C er $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.*

(12) (*Reglur de Morgans*) *Fyrir öll mengi A, B og C er*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

og

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Sönnun: Við látum nægja að gefa nákvæma sönnun á nokkrum af þessum reglum til að sýna hvernig slíkar sannanir geta verið:

Regla (1) er augljós: Ef $x \in A$, þá er annaðhvort $x \in A$ eða $x \in B$, því að fyrra skilyrðinu er örugglega fullnægt. Þar með er $A \subset A \cup B$. Eins sést að $B \subset A \cup B$.

(2) Ef $x \in A \cap B$, þá er bæði $x \in A$ og $x \in B$, og því sér í lagi $x \in A$. Þar með er $A \cap B \subset A$. Eins sést að $A \cap B \subset B$

(3) Setjum svo að $A \subset C$ og $B \subset C$ og sýnum að $A \cup B \subset C$. Gerum því ráð fyrir að $x \in A \cup B$. Þá er annaðhvort $x \in A$ eða $x \in B$. Í fyrra tilfellinu höfum við bæði $x \in A$ og $A \subset C$ og því $x \in C$, en í seinna tilfellinu höfum við bæði $x \in B$ og $B \subset C$ og því $x \in C$. Þannig er $x \in C$ í báðum tilfellum, eins og sanna átti.

(4) Setjum svo að $A \subset B$ og $A \subset C$ og sýnum að $A \subset B \cap C$. Gerum því ráð fyrir að $x \in A$. Vegna $A \subset B$ og $A \subset C$ fæst $x \in B$ og $x \in C$, en það þýðir að $x \in B \cap C$.

Regla (5) er nú augljós: Vegna (1) er $A \subset A \cup \varnothing$, og af $A \subset A$ og $\varnothing \subset A$ leiðir samkvæmt reglu (3) að $A \cup \varnothing \subset A$. Því er $A = A \cup \varnothing$. Seinni fullyrðingin fæst með sama hætti.

Reglur (6) og (7) má einnig sanna með svipuðum hætti; sönnum aðeins fyrri víxlregluna: Af $B \subset A \cup B$ og $A \subset A \cup B$ leiðir samkvæmt reglu (3) að $B \cup A \subset A \cup B$, og með sama hætti (eða einfaldlega með því að víxla nöfnum á A og B) sést að $A \cup B \subset B \cup A$. En þar með er $A \cup B = B \cup A$.

(8) Við sönnum aðeins fyrri tengiregluna. Við höfum $C \subset B \cup C$ og $B \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ samkvæmt reglu (1) og þar með $C \subset A \cup (B \cup C)$ samkvæmt lið (2) í (1.8). Með sama hætti fæst einnig $B \subset B \cup C$ og $B \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ og þar með $B \subset A \cup (B \cup C)$. En nú er $A \subset A \cup (B \cup C)$ samkvæmt reglu (1); af því og $B \subset A \cup (B \cup C)$ leiðir samkvæmt reglu (3) að $A \cup B \subset A \cup (B \cup C)$. Af því og $C \subset A \cup (B \cup C)$ leiðir aftur samkvæmt reglu (3) að $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Með nákvæmlega sama hætti sést að $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Þar með er $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(9) Við látum einnig nægja að sanna fyrri dreifiregluna. Sýnum fyrst að $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$: Gerum ráð fyrir að $x \in (A \cup B) \cap C$. Þá er $x \in A \cup B$ og $x \in C$. Vegna $x \in A \cup B$ er annaðhvort $x \in A$ eða $x \in B$. Í fyrra tilfellinu er bæði $x \in A$ og $x \in C$ og því $x \in A \cap C$. Í seinna tilfellinu er bæði $x \in B$ og $x \in C$ og því $x \in B \cap C$. Þar með er annaðhvort $x \in A \cap C$ eða $x \in B \cap C$ og því $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Vegna $A \subset A \cup B$ er auðséð að $A \cap C \subset (A \cup B) \cap C$. Eins fæst $B \cap C \subset (A \cup B) \cap C$. En þar með er $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$ samkvæmt reglu (3). Við höfum því bæði $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ og $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$ og því $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ samkvæmt frumsendunni um umtak.

Við eftirlátum lesanda sönnun á öðrum reglum í setningunni. $\square$

(1.12) Athugasemd. Mengin $(A \cup B) \cup C$ og $A \cup (B \cup C)$ eru sama mengið samkvæmt tengireglu fyrir sammengi. Það getur því ekki valdið neinum misskilningi að sleppa svigunum og tákna þetta mengi með

$$A \cup B \cup C;$$

og við getum kallað það ***sammengi mengjanna*** A, B ***og*** C. Ekki getur það heldur valdið misskilningi að tala um sammengi

$$A \cup B \cup C \cup D$$

fjögurra mengja o. s. frv. Hliðstæða athugasemd má gera um sniðmengi.

§2. Fjölskyldur og varpanir

Við ætlum nú að ræða um eitt mikilvægasta hugtak stærðfræðinnar, nefnilega um *vörpun.* Reyndar tölum við um tvö hugtök, sem eru svo náskyld að þau eru næstum því sami hluturinn: *fjölskylda* og *vörpun.* Við ætlum fyrst gefa lauslegar skilgreiningar (nákvæmar mengjafræðilegar skilgreiningar má finna í kafla II hér á eftir) og ræða síðan um hver munurinn á hugtökunum er:

(2.1) Skilgreining. *Við segjum að við höfum gefna* ***fjölskyldu*** *a ef við höfum gefin*

(i) *mengi I,*
(ii) *fyrir sérhvert stak i úr I nákvæmlega eitt tiltekið stak a_i.*

Við táknum þá fjölskylduna með tákninu

$$(a_i)_{i\in I}.$$

Við köllum mengið I ***skilgreiningarmengi*** *eða* ***vísamengi*** *fjölskyldunnar $(a_i)_{i\in I}$, og við segjum að stakið a_i sé* ***gildi*** *fjölskyldunnar a í stakinu i.*

(2.2) Skilgreining. *Við segjum að við höfum gefna* ***vörpun*** *f ef við höfum gefin*

(i) *mengi X og mengi Y,*
(ii) *fyrir sérhvert stak x úr X nákvæmlega eitt tiltekið stak $f(x)$ úr menginu Y.*

Við táknum þá vörpunina með

$$f : X \to Y$$

eða einfaldlega með f. Við köllum mengið X ***skilgreiningarmengi***, ***formengi*** *eða* ***frámengi*** *og mengið Y* ***bakmengi*** *eða* ***aðmengi*** *vörpunarinnar f, og við segjum að f sé* ***vörpun frá menginu X í mengið Y****. Stakið $f(x)$ kallast* ***gildi vörpunarinnar f í stakinu x****.*

(2.3) Athugasemd. Eins og sjá má eru skilgreiningarnar mjög líkar. Eini raunverulegi munurinn er sá að í skilgreiningunni á vörpun er tiltekið ákveðið mengi Y og þess krafizt að öll gildi vörpunarinnar séu stök í Y, en í skilgreiningunni á fjölskyldu er ekki tekið fram að gildin þurfi að vera stök í einhveru fyrirfram tilteknu mengi. Að öðru leyti eru fjölskylda og vörpun nokkurn veginn sami hluturinn.

Hvenær sem við höfum vörpun $f : X \to Y$ getum við gleymt menginu Y og litið á fjölskylduna

$$(f(x))_{x\in X},$$

og hvenær sem við höfum gefna fjölskyldu $(a_i)_{i\in I}$ getum við myndað mengið

$$Y := \{y : \text{til er } i \text{ úr } I \text{ þannig að } y = a_i\},$$

eða — með styttri og þægilegri rithætti —

$$Y = \{a_i : i \in I\},$$

og litið á vörpunina $a : I \to Y$ þannig að $a(i) = a_i$ fyrir sérhvert i úr I. Athugum þó að í stað mengisins Y gætum við tekið hvaða yfirmengi þess sem vera skal, og við teldumst þá hafa aðra vörpun: Við hefðum annað bakmengi, þótt vörpunin tæki sama gildi og áður í öllum stökum formengisins.

Í stórum dráttum getum við þó oft litið á sama hlutinn sem fjölskyldu eða vörpun eftir ástæðum. Hvorn kostinn við veljum fer að jafnaði eftir því hvort við höfum sérstakan áhuga á bakmenginu eða ekki, en er kannski ekki síður háð venju og samhengi.

Eins og sjá má í skilgreiningunum eru fjölskyldur og varpanir ritaðar með talsvert ólíkum hætti, þótt hugtökin séu svona lík. Til dæmis er gildi fjölskyldu a í staki i oftast táknað með a_i, þ. e. a. s. stakið i er gefið til kynna með ***lágvísi***. Gildi vörpunar f í staki x er hins vegar oftast táknað $f(x)$, þ. e. a. s. stakið x er gefið til kynna með því að skrifa það innan sviga. En þetta er þó aðeins venja, og ekkert er því til fyrirstöðu að breyta rithættinum að vild, svo að þetta er enginn raunverulegur munur. Til dæmis mætti alveg eins tákna gildi fjölskyldu a í staki i með $a(i)$ í stað a_i. En ýmis annar ritháttur kemur einnig til greina og er stundum notaður. Stundum er gildi fjölskyldu a í staki i til dæmis ritað a^i; með öðrum orðum er stakið i ritað sem ***hávísir***, og jafnvel er ekki óþekkt að sjá ritháttt á borð við ${}^i a$ og ${}_i a$. Einnig skrifa sumir höfundar fx eða jafnvel xf í stað $f(x)$ fyrir gildi vörpunar f í staki x. Enn fleiri tilbrigði í rithætti eru hugsanleg og stundum notuð.

Tökum einnig fram að skilgreiningar (2.1) og (2.2) eru *óformlegar* í þeim skilningi að þær segja ekki nákvæmlega hvað fjölskylda eða vörpun er, heldur hvað við þurfum að vita til að þekkja einhverja tiltekna fjölskyldu eða vörpun. Í frumsendumengjafræði eru fjölskyldur og varpanir skilgreindar sem mengi af tiltekinni gerð, og um það það má lesa í kafla II um Zermelo-Fraenkel-mengjafræði.

Til að gera muninn á skilgreiningunum ljósari setjum við fram setningu, sem er í stórum dráttum aðeins umorðun á því sem í skilgreiningunum felst og verður því ekki sönnuð frekar:

(2.4) Setning. (1) *Fjölskyldur $(a_i)_{i\in I}$ og $(b_j)_{j\in J}$ eru sama fjölskyldan þá og því aðeins að $I = J$ og $a_i = b_i$ fyrir sérhvert stak i úr I.*

(2) *Varpanir $f : X \to Y$ og $g : Z \to T$ eru sama vörpunin þá og því aðeins að $X = Z$, $Y = T$ og $f(x) = g(x)$ fyrir sérhvert stak x úr X.* □

Þótt fjölskylda og vörpun séu skyld hugtök eru þau notuð í dálítið ólíku samhengi. Lítum fyrst á fjölskyldur. Einn af mörgum kostum hugtaksins er sá að það má nota til að skilgreina svokallaðar ***raðtvenndir*** af stökum.

Látum I vera mengið $\{1, 2\}$. Þá má tilgreina fjölskyldu $(a_i)_{i\in I}$ með því að telja upp stökin tvö a_1 og a_2, sem eru gildi fjölskyldunnar í stökunum 1 og 2, *í réttri röð*. Almennar ef I er mengi af gerðinni $\{1, 2, \dots, n\}$, þar sem n er náttúrleg tala, þá má tilgreina fjölskyldu $(a_i)_{i\in I}$ með því að telja stökin $a_1, a_2, \dots, a_n$ upp hvert af öðru *í réttri röð*:

(2.5) Skilgreining. (1) *Látum m og n vera heilar tölur. Við setjum*

$$[\![m, n]\!] := \{k \in \mathbb{Z} : m \le k \le n\};$$

með öðrum orðum er $[\![m, n]\!]$ *mengi allra heilla talna sem liggja milli* m *og* n *að þeim báðum meðtöldum. Þetta mengi er einnig táknað með*

$$\{m, m+1, \ldots, n\}$$

eða með álíka hætti. Sér í lagi er oft ritað $\{1, 2, \ldots, n\}$ *eða* $\{1, \ldots, n\}$ *í stað* $[\![1, n]\!]$.

(2) *Fjölskylda* $(a_i)_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ *er rituð*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Þegar $n = 2$ *fæst fjölskylda af gerðinni*

$$(a_1, a_2).$$

Slík fjölskylda kallast ***tvennd*** *eða* ***raðtvennd****. Þegar* $n = 3$ *fæst* ***þrennd*** *eða* ***raðþrennd*** (a_1, a_2, a_3)*; þegar* $n = 4$ *fæst* ***fernd*** *eða* ***raðfernd*** (a_1, a_2, a_3, a_4) *o. s. frv. Almennt er fjölskylda* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *kölluð (****röðuð****)* n***-d*** *[lesið „ennd“] eða* n***-und****, en stundum einnig* ***endanleg runa af lengd*** n.

(2.6) Athugasemdir og dæmi. (1) Tvenndin $(3, 2)$ er samkvæmt skilgreiningu ekkert annað en fjölskyldan $(a_i)_{i\in\{1,2\}}$, þar sem $a_1 = 3$ og $a_2 = 2$. Hins vegar er tvenndin $(2, 3)$ fjölskyldan $(b_i)_{i\in\{1,2\}}$, þar sem $b_1 = 2$ og $b_2 = 3$. Þar sem $a_1 \neq b_1$ (og raunar einnig $a_2 \neq b_2$) er $(3, 2) \neq (2, 3)$. Það skiptir því höfuðmáli í hvaða röð stökin í tvennd (og almennar í n-d) eru talin upp. Berum þetta saman við þá staðreynd að *mengin* $\{2, 3\}$ og $\{3, 2\}$ eru sama mengið: $\{2, 3\} = \{3, 2\}$.

Tökum einnig eftir að gildi fjölskyldu í ólíkum stökum þurfa ekki að vera ólík. Þetta gildir þá einnig um tvenndir, þrenndir o. s. frv. Til dæmis getum við myndað tvenndina $(1, 1)$ og þrenndina $(1, 1, 1)$, og þetta eru ólíkir hlutir. Með sama hætti eru þrenndirnar $(1, 1, 2)$ og $(2, 1, 1)$ ólíkar, og hvor um sig er allt annar hlutur en tvenndin $(1, 2)$, þótt *mengin* $\{1, 1, 2\}$, $\{2, 1, 1\}$ og $\{1, 2\}$ séu öll sama mengið.

(2) Mikilvægasti eiginleiki tvennda er bein afleiðing af lið (1) í setningu (2.4): Fyrir tvenndir (a, b) og (c, d) gildir

$$(a, b) = (c, d) \text{ þá og því aðeins að } a = c \text{ og } b = d.$$

Almennar gildir um n-dir að $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ þá og því aðeins að $a_i = b_i$ fyrir öll $i = 1, 2, \ldots, n$.

(3) Hvað er n-und ef $n = 0$? Tökum þá fyrst eftir að mengið $\{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!] = \{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n\}$ er *tóma mengið* ef $n = 0$. En getum við talað um fjölskyldu $(a_i)_{i\in I}$ ef I er tóma mengið? Hvað þýðir það að fyrir sérhvert stak i úr I sé gefið nákvæmlega eitt tiltekið stak a_i þegar ekkert stak i í I er til? Þessu er auðsvarað: Til að skilgreina fjölskyldu með skilgreiningarmengi $\varnothing$ þurfum við að tiltaka gildi hennar í sérhverju staki úr $\varnothing$; en $\varnothing$ hefur ekkert stak, svo að við þurfum ekki að gera neitt, og fjölskyldan er sjálfgefin. Niðurstaðan verður því sú að til er nákvæmlega ein fjölskylda með skilgreiningarmengi $\varnothing$; við getum kallað hana ***tómu fjölskylduna***.

(4) Minnumst hér á sérstaka tegund af fjölskyldum sem eru afar mikilvægar í stærðfræðigreiningu, þótt við þurfum lítið á þeim að halda í þessum mengjaköflum. Það eru

svokallaðar ***óendanlegar runur***, sem eru samkvæmt skilgreiningu ekkert annað en fjölskyldur af gerðinni $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, með öðrum orðum fjölskyldur þannig að vísamengið sé mengi allra náttúrlegra talna.

(2.7) Skilgreining. *Látum A og B vera mengi. Mengi allra tvennda (a, b) þannig að $a \in A$ og $b \in B$ kallast* ***margfeldi*** *mengjanna A og B og er táknað*

$$A \times B.$$

Með öðrum orðum er

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ og } b \in B\}.$$

Almennar ef $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eru mengi, þá táknum við með

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ fyrir öll } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

mengi allra n-unda $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ þannig að $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, og við köllum það ***margfeldi*** *mengjanna $A_1, A_2, \ldots, A_n$.*

Ef öll mengin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eru sama mengið A, þá er margfeldi þeirra táknað með A^n; með öðrum orðum er

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ sinnum}} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}.$$

(2.8) Athugasemd. Ef $n = 0$, þá er margfeldið A^n einnig skilgreint: Mengið A^0 inniheldur nákvæmlega eitt stak, nefnilega tómu fjölskylduna.

Við snúum okkur nú að vörpunum. Byrjum á að taka fram að sumir höfundar nota orðið „fall“ sem samheiti fyrir orðið „vörpun“. En algengara mun þó vera að nota orðið „fall“ um sérstaka tegund varpana, nefnilega um varpanir þannig að bakmengið sé mengi af *tölum*.

Snúum okkur nú að því hvernig má tilgreina varpanir. Til þess þarf fyrst að tilgreina skilgreiningarmengið og bakmengið, og fyrir sérhvert stak x úr skilgreiningarmenginu þarf að tiltaka hvert gildi vörpunarinnar í stakinu x á að vera. Til þess eru margar aðferðir.

Ef skilgreiningarmengið er endanlegt, þá má gera þetta með upptalningu. Segjum til dæmis að $X = \{a, b, c\}$, þar sem a, b og c eru ólík stök, þá má skilgreina vörpun $f : X \to \mathbb{N}$ með því að setja

$$f(a) := 3, \qquad f(b) := 7, \qquad f(c) := 3.$$

Með því að skrifa „$f : X \to \mathbb{N}$“ höfum við þegar tekið fram að formengið skuli vera X og bakmengið skuli vera mengi allra náttúrlegra talna $\mathbb{N}$.

Þægilegt er að setja slíka skilgreiningu upp í einskonar *töflu* sem hefur tvær línur: Í fyrri línuna skrifum við öll stökin í skilgreiningarmenginu X. Fyrir neðan hvert þeirra skrifum við gildi vörpunarinnar í því staki. Það er ekkert því til fyrirstöðu að tákna fallið f með þessari töflu. Fallið f í dæminu hér að ofan mætti til dæmis skrifa

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Algengast er raunar að nota þennan ritháttt fyrir varpanir af sérstakri tegund, nefnilega svokallaðar *uppstokkanir* endanlegra mengja; þær verða skilgreindar hér á eftir í skilgreiningu (2.18). Ekkert virðist þó því til fyrirstöðu að nota hann almennar fyrir varpanir með endanlegu skilgreiningarmengi. [Tökum þó eftir að bakmengið kemur ekki fram í þessum rithætti, svo að þess verður að geta sérstaklega.] Þegar skilgreiningarmengi vörpunar er óendanlegt kemur þessi aðferð til að tilgreina vörpun að sjálfsögðu ekki að gagni.

Þegar skilgreiningarmengið er tómt þarf enga töflu. Með sama hætti og við sáum að til er nákvæmlega ein fjölskylda með tómt skilgreiningarmengi sjáum við að fyrir sérhvert mengi Y er til nákvæmlega ein vörpun $f : \varnothing \to Y$. Við köllum hana ***tómu vörpunina***. Ef hins vegar $X \neq \varnothing$, þá er ekki til nein vörpun frá X í $\varnothing$. Til að skilgreina slíka vörpun þyrftum við fyrir sérhvert x úr X að tiltaka gildið $f(x)$ sem stak í $\varnothing$, en $\varnothing$ hefur ekkert stak, svo að það er ekki hægt. Því er engin slík vörpun til.

Algengt er að skilgreina varpanir með einhverri *reglu* sem lýsir hvernig finna skal gildi vörpunarinnar í gefnu staki úr skilgreiningarmenginu. Hér getur til dæmis verið um *formúlu* að ræða sem sýnir hvernig á að reikna gildið út. Þannig má til dæmis skilgreina vörpun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ frá mengi allra rauntalna í sjálft sig með því að setja

$$f(x) := \frac{x-1}{x^2+1}$$

fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$. Þessu er gjarnan lýst þannig að við séum að athuga vörpunina

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Hér sýnir örin „ $\mapsto$“ sambandið á milli almenns staks úr skilgreiningarmenginu og gildis þess. Til að skilgreina varpanir með þessum hætti notum við oft orðalag á borð við „látum f vera vörpunina $X \to Y, x \mapsto f(x)$“, þar sem við setjum í stað táknsins „$f(x)$“ einhverja formúlu sem sýnir hvert gildi vörpunarinnar í stakinu x á að vera. Tökum einfalt dæmi:

(2.9) Skilgreining. *Látum X og Y vera mengi. Við segjum að vörpun $f : X \to Y$ sé **föst** ef hún tekur sama gildið í öllum stökum úr X, með öðrum orðum þá og því aðeins að eftirfarandi skilyrði sé fullnægt:*

$$\textit{Ef } x, y \in X, \textit{ þá er } f(x) = f(y).$$

Fyrir sérhvert tiltekið stak c í Y getum við skilgreint fasta vörpun

$$f : X \to Y, x \mapsto c.$$

Þetta þýðir að vörpunin f er skilgreind með því að setja $f(x) := c$ fyrir sérhvert x úr X.

Fasta vörpunin sem tekur gildið c í sérhverju staki úr X er oft einnig táknuð með c ef það getur ekki valdið misskilningi.

Enn ein mikilvæg aðferð til að tilgreina vörpun $f : X \to Y$ er lýsa henni með tilteknu hlutmengi í mengjamargfeldinu $X \times Y$:

(2.10) Skilgreining. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun. Mengið*

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

er kallað ***varprit*** *eða* ***línurit*** *vörpunarinnar f. Ef Y er mengi af tölum, til dæmis $Y = \mathbb{R}$ eða $Y = \mathbb{C}$, þá er eins og áður sagði algengara að kalla vörpunina f* ***fall****, og þá segjum við líka að mengið $\Gamma(f)$ sé* ***fallrit*** *fallsins f.*

Mengið $\Gamma(f)$ fullnægir því skilyrði að fyrir sérhvert stak x úr menginu X er til nákvæmlega eitt stak y úr menginu Y þannig að $(x, y) \in \Gamma(f)$. Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að Γ sé hlutmengi í mengjamargfeldinu $X \times Y$ sem fullnægir sama skilyrði, nefnilega að fyrir sérhvert stak x úr menginu X sé til nákvæmlega eitt stak y úr menginu Y þannig að $(x, y) \in \Gamma$, þá er til nákvæmlega ein vörpun $f : X \to Y$ þannig að $\Gamma = \Gamma(f)$: Við getum skilgreint vörpunina f með skilyrðinu

$$y = f(x) \text{ þá og því aðeins að } (x, y) \in \Gamma.$$

Við höfum því sýnt:

(2.11) Setning. *Látum X og Y vera mengi. Hlutmengi Γ í mengjamargfeldinu $X \times Y$ er varprit vörpunar $f : X \to Y$ þá og því aðeins að fyrir sérhvert stak x úr menginu X sé til nákvæmlega eitt stak y úr menginu Y þannig að $(x, y) \in \Gamma$.* □

Þetta þýðir sér í lagi að vörpun $f : X \to Y$ ákvarðast fullkomlega af mengjunum X, Y og varpriti sínu.

(2.12) Dæmi. Táknum með $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ mengi allra rauntalna sem eru stærri eða jafnar núlli. Setjum $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : y \geq 0 \text{ og } x = y^2\}$. Í raunfallagreiningu er sannað að fyrir sérhvert stak x úr $\mathbb{R}_+$ er til nákvæmlega eitt stak y úr $\mathbb{R}$ þannig að $y \geq 0$ og $x = y^2$. Þetta þýðir að Γ er línurit vörpunar $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sem hefur þann eiginleika að fyrir sérhvert stak x úr $\mathbb{R}_+$ er $f(x) \geq 0$ og $(f(x))^2 = x$. Gildi vörpunarinnar f í tölunni x er yfirleitt táknað með $\sqrt{x}$ og kallað ***ferningsrót*** eða ***önnur rót*** tölunnar x.

(2.13) Skilgreining. (1) *Látum X vera mengi. Fyrir hlutmengi Y í menginu X kallast vörpunin*

$$i : Y \to X, x \mapsto x$$

ívarpið *frá menginu Y í mengið X; það er oft gefið til kynna með tákninu*

$$i : Y \hookrightarrow X.$$

Ívarpið frá X í X, það er að segja vörpunin $X \to X, x \mapsto x$, kallast ***samsemdarvörpun*** *mengisins X og er táknuð*

$$\mathrm{id}_X.$$

Með öðrum orðum er vörpunin $\mathrm{id}_X : X \to X$ skilgreind með því að setja

$$\mathrm{id}_X(x) := x$$

fyrir sérhvert stak x úr menginu X.

(2) *Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ vera varpanir.* ***Samskeyting*** *varpananna f og g er vörpunin*

$$g \circ f : X \to Z$$

sem skilgreind er með

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

(2.14) Athugasemd. Tökum eftir að samskeyting $g \circ f$ tveggja varpana f og g er aðeins skilgreind ef aðmengi vörpunarinnar f og frámengi vörpunarinnar g séu sama mengið.

(2.15) Dæmi. (1) Látum $X := \{0, 1, 2, 3\}$, $Y := \{4, 5, 6\}$ og $Z := \{7, 8, 9\}$. Skilgreinum varpanir $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ með

$$f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Við sjáum að $f(0) = 5$ og að $g(5) = 9$. Þar með er $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(5) = 9$. Með sama hætti má reikna út $(g \circ f)(x)$ fyrir sérhvert x úr X. Við sjáum að vörpunin $g \circ f : X \to Z$ er gefin með

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 9 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

(2) Látum varpanirnar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera gefnar með $f(x) := x^2$ og $g(x) := x + 1$ fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$. Þá er vörpunin $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gefin með $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$, en vörpunin $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gefin með $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$ fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$.

(2.16) Setning. (1) *Fyrir sérhverja vörpun $f : X \to Y$ er*

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \textit{og} \qquad \mathrm{id}_Y \circ f = f.$$

(2) *Látum $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ og $h : Z \to T$ vera varpanir. Þá er*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Sönnun: (1) Fyrir sérhvert x úr X er

$$(f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x)$$

og

$$(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x).$$

(2) Fyrir sérhvert x úr X er

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x). \quad \square$$

(2.17) Skilgreining. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun.*

(1) *Fyrir sérhvert hlutmengi $A \subset X$ kallast hlutmengið*

$$f[A] := \{f(a) : a \in A\}$$

í bakmenginu Y ***mynd mengisins A með tilliti til vörpunarinnar f, mynd vörpunarinnar f af menginu A*** *eða einfaldlega* ***f-mynd mengisins A****. Oft er ritað*

$$f(A)$$

í stað $f[A]$ ef ekki er hætta á misskilningi. Mynd alls frámengisins, með öðrum orðum mengið

$$\operatorname{Im} f := f[X],$$

kallast ***myndmengi vörpunarinnar f****.*

(2) *Fyrir sérhvert hlutmengi $B \subset Y$ kallast hlutmengið*

$$f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

í formenginu X ***frummynd mengisins B með tilliti til vörpunarinnar f****, eða einfaldlega* ***öfuga myndin af menginu B****. Einnig er oft ritað*

$$f^{-1}(B)$$

í stað $f^{-1}[B]$ ef ekki er hætta á misskilningi. Ef mengið B hefur aðeins eitt stak, $B = \{y\}$, þá skrifum við einnig

$$f^{-1}[y] \quad \text{og stundum} \quad f^{-1}(y)$$

í stað $f^{-1}[\{y\}]$, og við köllum mengið $f^{-1}[y]$ ***trefju vörpunarinnar f yfir stakinu y úr Y****.*

(2.18) Athugasemdir. (1) Rithátturinn „$f(A)$“ í stað „$f[A]$“ getur aðeins valdið misskilningi ef mengið A er *bæði* hlutmengi í X *og* stak í X; það getur til dæmis gerzt ef $X = A \cup \{A\}$. Þá er ekki ljóst hvort „$f(A)$“ á að tákna f-mynd hlutmengisins A eða gildi vörpunarinnar f í stakinu A. Þar sem ekki er algengt í hversdagslegri stærðfræði að mengi sé bæði hlutmengi og stak í öðru mengi (þótt það komi vissulega fyrir í mengjafræði) er rithátturinn $f(A)$ mun algengari. Með sama hætti gæti rithátturinn $f^{-1}[y]$ í stað $f^{-1}[\{y\}]$ orðið tvíræður ef y er bæði hlutmengi í Y og stak í Y. Og hvað getur gerst ef y er hlutmengi í Y *og* að auki eru bæði y og $\{y\}$ stök í Y? Sem betur fer þarf ekki oft að hafa áhyggjur af slíku. Sjá einnig athugasemd (2.27).

(2) Látum $f : X \to Y$ vera vörpun og $y \in Y$. Fyrir $x \in X$ er skilyrðið $f(x) \in \{y\}$ jafngilt skilyrðinu $f(x) = y$. Trefja vörpunarinnar f í stakinu y er því samkvæmt skilgreiningu mengið

$$f^{-1}[y] = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Með öðrum orðum er trefjan *mengi allra lausna x jöfnunnar*

$$f(x) = y,$$

þar sem y er eitthvert tiltekið stak í menginu Y. Að leysa jöfnuna er því jafngilt því að gefa lýsingu á trefjunni. (Ef jafnan hefur aðeins endanlega margar lausnir mætti til dæmis gera það með því að telja stökin í trefjunni upp.)

(2.19) Dæmi. Látum $X := \{0, 1, 2, 3\}$, $Y := \{4, 5, 6\}$ og vörpunina $f : X \to Y$ vera gefna með

$$f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Setjum $A := \{0, 2\} \subset X$. Þá er $f[A] = \{f(0), f(2)\} = \{5, 4\}$. Setjum $B := \{5, 6\}$. Þá er $f^{-1}[B] = \{0, 3\}$. Trefjar vörpunarinnar f eru mengin $f^{-1}[4] = \{1, 2\}$, $f^{-1}[5] = \{0, 3\}$ og $f^{-1}[6] = \varnothing$.

Í næstu setningu eru nokkrar reiknireglur um myndir og frummyndir.

(2.20) Setning. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun.*

(1) *Ef A_1 og A_2 eru hlutmengi í X, þá er*

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2],$$
$$f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2]$$

og

$$f[A_1] \setminus f[A_2] \subset f[A_1 \setminus A_2].$$

(2) *Ef B_1 og B_2 eru hlutmengi í Y, þá er*

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2],$$
$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$$

og

$$f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2] = f^{-1}[B_1 \setminus B_2].$$

(3) *Fyrir hlutmengi A í menginu X og hlutmengi B í menginu Y gildir*

$$f[A] \subset B \quad \text{þá og því aðeins að} \quad A \subset f^{-1}[B].$$

(4) *Fyrir sérhvert hlutmengi A í menginu X er*

$$A \subset f^{-1}[f[A]].$$

(5) *Fyrir sérhvert hlutmengi B í menginu Y er*

$$f[f^{-1}[B]] \subset B.$$

Sönnun: (1) Látum $y \in f[A_1 \cup A_2]$. Þá er til x úr $A_1 \cup A_2$ þannig að $f(x) = y$. Vegna $x \in A_1 \cup A_2$ er annaðhvort $x \in A_1$ eða $x \in A_2$. Í fyrra tilvikinu, þegar $x \in A_1$, þá er $y = f(x) \in f[A_1]$ og þar með $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$, því að $f[A_1]$ er hlutmengi í $f[A_1] \cup f[A_2]$. Í síðara tilvikinu, þegar $x \in A_2$, þá er $y = f(x) \in f[A_2]$ og því $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$, því að $f[A_2]$ er hlutmengi í $f[A_1] \cup f[A_2]$. Því er $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$ í báðum tilvikum. Við höfum því sýnt að $f[A_1 \cup A_2] \subset f[A_1] \cup f[A_2]$.

Látum nú $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$. Þá er annaðhvort $y \in f[A_1]$ eða $y \in f[A_2]$. Í fyrra tilvikinu er til x úr A_1 þannig að $y = f(x)$; en þar sem $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ er þá $x \in A_1 \cup A_2$, svo að $y = f(x) \in f[A_1 \cup A_2]$. Í síðara tilvikinu er til x úr A_2 þannig að $y = f(x)$; en þar sem $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ er þá $x \in A_1 \cup A_2$, svo að $y = f(x) \in f[A_1 \cup A_2]$. Við höfum því sýnt að einnig gildir $f[A_1] \cup f[A_2] \subset f[A_1 \cup A_2$. Þar með er sýnt að $f[A_1] \cup f[A_2] = f[A_1 \cup A_2]$.

Látum $y \in f[A_1 \cap A_2]$. Þá er til x úr $A_1 \cap A_2$ þannig að $y = f(x)$. Þar sem $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ er $x \in A_1$, svo að $y = f(x) \in f[A_1]$. Líka er $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, svo að $x \in A_2$ og þá $y = f(x) \in f[A_2]$. En þá er bæði $y \in f[A_1]$ og $y \in f[A_2]$, svo að $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$.

Gerum að lokum ráð fyrir að $y \in f[A_1] \setminus f[A_2]$. Þá er $y \in f[A_1]$ og $y \notin f[A_2]$. Vegna $y \in f[A_1]$ er til stak x úr A_1 þannig að $y = f(x)$. Stakið x getur ekki verið stak í A_2, því að þá fengist $y \in f[A_2]$, sem er ekki rétt. Því er $x \in A_1 \setminus A_2$, svo að $y = f(x) \in f[A_1 \setminus A_2]$.

(2) Skilyrðið að $x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2]$ þýðir að $f(x) \in B_1 \cup B_2$, sem jafngildir því annaðhvort sé $f(x) \in B_1$ eða $f(x) \in B_2$. Það er aftur jafngilt því að annaðhvort sé $x \in f^{-1}[B_1]$ eða $x \in f^{-1}[B_2]$, og það þýðir einmitt að $x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$. Við höfum því sýnt að $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$.

Skilyrðið að $x \in f^{-1}[B_1 \cap B_2]$ þýðir að $f(x) \in B_1 \cap B_2$, sem jafngildir því bæði sé $f(x) \in B_1$ og $f(x) \in B_2$. Það er aftur jafngilt því að bæði sé $x \in f^{-1}[B_1]$ og $x \in f^{-1}[B_2]$, og það þýðir einmitt að $x \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$. Við höfum því sýnt að $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

Loks sjáum við að skilyrðið $x \in f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$ þýðir að $x \in f^{-1}[B_1]$ og $x \notin f^{-1}[B_2]$. En það er jafngilt því að $f(x) \in B_1$ og $f(x) \notin B_2$, sem aftur þýðir að $f(x) \in B_1 \setminus B_2$ eða með öðrum orðum að $x \in f^{-1}[B_1 \setminus B_2]$.

(3) Þetta er augljóst, því að bæði skilyrðin þýða að $f(x) \in B$ fyrir sérhvert stak x úr menginu A.

Liður (4) fæst nú úr lið (3) með því að taka $B := f(A)$, og liður (5) fæst úr lið (3) með því að taka $A := f^{-1}[B]$. $\square$

(2.21) Dæmi. Látum f vera vörpunina úr dæmi (2.19) og setjum $A_1 := \{0, 2\}$ og $A_2 := \{0, 1, 3\}$. Þá er $A_1 \cap A_1 = \{0\}$, $f[A_1] = \{4, 5\}$, $f[A_2] = \{4, 5\}$, svo að $f[A_1 \cap A_2] = \{5\}$ og $f[A_1] \cap f[A_2] = \{4, 5\}$. Því þurfa mengin $f[A_1 \cap A_2]$ og $f[A_1] \cap f[A_2]$ almennt ekki að vera sama mengið. Einnig er $A_1 \setminus A_2 = \{2\}$, svo að $f[A_1] \setminus f[A_2] = \varnothing$ og $f[A_1 \setminus A_2] = \{4\}$, Því þurfa mengin $f[A_1] \setminus f[A_2]$ og $f[A_1 \setminus A_2]$ almennt ekki að vera sama mengið.

Setjum einnig $A := \{0, 1\}$ og sjáum að $f[A] = \{4, 5\}$ og að $f^{-1}[f[A]] = \{0, 1, 2, 3\}$, og því þurfa mengin A og $f^{-1}[f[A]]$ almennt ekki að vera sama mengið. Setjum að lokum $B := \{5, 6\}$ og sjáum að $f^{-1}[B] = \{0, 3\}$ og $f[f^{-1}[B]] = \{5\}$, og því þurfa mengin B og $f[f^{-1}[B]]$ almennt ekki að vera sama mengið.

Við skilgreinum nú þ rjú afar mikilvæg hugtök:

(2.22) Skilgreining. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun.*

(1) *Við segjum að vörpunin f sé **eintæk** ef hún varpar ólíkum stökum á ólík stök, með öðrum orðum ef*

$$x_1 \neq x_2 \quad \textit{hefur í för með sér að} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(2) *Við segjum að vörpunin f sé **átæk** ef sérhvert stak í menginu Y er gildi einhvers staks í X, með öðrum orðum ef*

$$f[X] = Y.$$

(3) *Við segjum að vörpunin f sé* ***gagntæk*** *ef hún er bæði eintæk og átæk.*

(4) *Gagntæk vörpun $f : X \to X$ frá mengi X í sjálft sig er kölluð* ***uppstokkun*** *mengisins X (einkum þó ef mengið X er endanlegt).*

(2.23) Athugasemdir. (1) Vörpunin $f : X \to Y$ er eintæk þá og því aðeins að

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{hafi í för með sér að} \quad x_1 = x_2.$$

Þannig skrifað er skilyrðið venjulega miklu þægilegra í notkun.

(2) Vörpunin $f : X \to Y$ er átæk þá og því aðeins að eftirfarandi skilyrði sé fullnægt:

$$\text{fyrir sérhvert } y \text{ í } Y \text{ er til stak } x \text{ í } X \text{ þannig að} \quad f(x) = y.$$

(3) Vörpunin $f : X \to Y$ er

(i) eintæk þá og því aðeins að fyrir sérhvert stak y úr Y hafi jafnan $f(x) = y$ *í hæsta lagi eina* lausn x úr X;

(ii) átæk þá og því aðeins að fyrir sérhvert stak y úr Y hafi jafnan $f(x) = y$ *að minnsta kosti eina* lausn x úr X;

(iii) gagntæk þá og því aðeins að fyrir sérhvert stak y úr Y hafi jafnan $f(x) = y$ *nákvæmlega eina* lausn x úr X.

(4) Látum $f : X \to Y$ vera vörpun. Það er stundum þægilegt að hugsa sér að stökin í Y séu „skúffur", að stökin í X séu hlutir sem við ætlum að setja í skúffurnar og að vörpunin f lýsi því í hvaða skúffu hver hlutur á að fara; með öðrum orðum er $f(x)$ skúffan sem hluturinn x er látinn í. Að vörpunin f sé eintæk þýðir þá að ekki má setja nema einn hlut í hverja skúffu. Að vörpunin f sé átæk þýðir að sérhver skúffa er notuð. Að vörpunin f sé gagntæk þýðir að nákvæmlega einn hlutur er settur í hverja skúffu.

(2.24) Dæmi. (1) Látum $X := \{0, 1, 2, 3\}$, $Y := \{4, 5, 6\}$ og $Z := \{7, 8, 9\}$. Vörpunin $f : X \to Y$ sem er skilgreind með

$$f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

er átæk, en hún er ekki eintæk, því að $f(1) = f(2)$. Vörpunin $g : Y \to X$ sem er skilgreind með

$$g := \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

er eintæk, en ekki átæk, því að $1 \notin g[Y]$. Vörpunin $h : Z \to Y$ sem er skilgreind með

$$h := \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

er gagntæk. Að lokum er vörpunin $k : X \to Z$ sem er skilgreind með

$$k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

hvorki eintæk né átæk.

(2) Látum $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sérhverja vörpun $f : X \to X$ má rita í töflu sem

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix}.$$

Uppstokkanir mengisins X eða með öðrum orðum *gagntæku* varpanirnar frá X í sjálft sig, einkennast af því að í neðri línu töflunnar kemur sérhver tala úr efri línunni fyrir *nákvæmlega einu sinni*, og það þýðir að í neðri línunni standa sömu tölurnar og í efri línunni, en venjulega í annarri röð (nema f sé samsemdarvörpun mengisins). Til dæmis er vörpunin $f : X \to X$ sem er skilgreind með

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

uppstokkun mengisins X.

(2.25) Setning. (1) *Samskeyting tveggja eintækra varpana er eintæk.*
(2) *Samskeyting tveggja átækra varpana er átæk.*
(3) *Samskeyting tveggja gagntækra varpana er gagntæk.*

Sönnun: Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ vera varpanir.

(1) Gerum ráð fyrir að varpanirnar f, g séu eintækar og sýnum að samskeytingin sé eintæk: Látum x_1, x_2 vera stök í X þannig að $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Það þýðir að $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Þar sem vörpunin g er eintæk fæst $f(x_1) = f(x_2)$. En af því leiðir að $x_1 = x_2$, vegna þess að vörpunin f er eintæk.

(2) Gerum ráð fyrir að varpanirnar f, g séu átækar og sýnum að samskeytingin $g \circ f$ er átæk: Látum $z \in Z$. Þar sem vörpunin g er átæk er til stak y úr Y þannig að $g(y) = z$, og þar sem vörpunin f er átæk er til stak x úr X þannig að $f(x) = y$. En þá er $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

Liður (3) er nú bein afleiðing af liðum (1) og (2). □

Ef $f : X \to Y$ er gagntæk vörpun, þá er fyrir sérhvert stak y úr Y til *nákvæmlega eitt* stak x þannig að $f(x) = y$. Við getum þá búið til nýja vörpun $g : Y \to X$ sem er þannig að fyrir $y \in Y$ er gildið $g(y)$ einmitt þetta stak x; með öðrum orðum gildir

$$g(y) = x \quad \text{þá og því aðeins að} \quad f(x) = y.$$

(2.26) Skilgreining. *Látum $f : X \to Y$ vera gagntæka vörpun. Vörpunin $g : Y \to X$ sem fullnægir því skilyrði að $g(y) = x$ þá og því aðeins að $f(x) = y$ kallast* ***andhverfa*** *vörpunarinnar f og er táknuð*

$$f^{-1} : Y \to X.$$

(2.27) Athugasemd. Látum $f : X \to Y$ vera gagntæka vörpun og $B \subset Y$. Þá táknar $f^{-1}[B]$ samkvæmt skilgreiningu (2.17) bæði frummynd mengisins B með tilliti til vörpunarinnar f og mynd mengisins B með tilliti til vörpunarinnar f^{-1}. Hins vegar er auðvelt að ganga úr skugga um að þessi mengi eru sama mengið, svo að rithátturinn getur ekki valdið misskilningi.

Ef f er gagntæk vörpun, þá getur hins vegar rithátturinn $f^{-1}(B)$ í stað $f^{-1}[B]$ orðið tvíræður ef B er bæði stak í Y og hlutmengi í Y. Þá er einnig fyrir sérhvert y úr Y trefja vörpunarinnar f í stakinu y mengið sem hefur nákvæmlega stakið $f^{-1}(y)$:

$$f^{-1}[y] = \{f^{-1}(y)\},$$

og því gæti það valdið misskilningi að tákna trefjuna með $f^{-1}(y)$.

(2.28) Viðvörun. Athugum að andhverfa vörpunar $f : X \to Y$ *er alls ekki skilgreind nema vörpunin f sé gagntæk.* Rithátturinn $f^{-1}[B]$ fyrir frummynd mengis er hinsvegar notaður hvort sem vörpunin er gagntæk eða ekki og af honum má ekkert álykta um tilvist nokkurrar andhverfu f^{-1}.

(2.29) Setning. (1) *Látum $f : X \to Y$ vera gagntæka vörpun. Þá er*

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{og} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y.$$

(2) *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun og gerum ráð fyrir að til sé vörpun $g : Y \to X$ þannig að*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{og} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Þá er vörpunin f gagntæk, og

$$g = f^{-1}.$$

(3) *Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ vera gagntækar varpanir. Þá er*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Sönnun: Liður (1) er bein afleiðing af skilgreiningu andhverfunnar f^{-1}.

(2) Gerum ráð fyrir að slík vörpun g sé til. Sýnum fyrst að f er eintæk: Gerum því ráð fyrir að $x_1, x_2 \in X$ séu þannig að $f(x_1) = f(x_2)$ og sýnum að $x_1 = x_2$. En það er augljóst, því að

$$x_1 = \mathrm{id}_X(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = \mathrm{id}_X(x_2) = x_2.$$

Sýnum næst að f er átæk: Gefum okkur stak y úr Y og sýnum að til sé stak x úr X þannig að $f(x) = y$. En það nægir að taka $x = g(y)$, því að þá fæst

$$f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_Y(y) = y.$$

Þar með er vörpunin f gagntæk. Að lokum fæst

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

(3) Við höfum

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_X,$$

og eins fæst

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_X.$$

En samkvæmt (2) er þá $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

(2.30) Skilgreining. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun og A vera hlutmengi í X. Þá má skilgreina vörpun $A \to Y, x \mapsto f(x)$, sem við köllum* ***einskorðun*** *vörpunarinnar f við mengið A og táknum með*

$$f \mid A.$$

Með öðrum orðum er vörpunin $f \mid A : A \to Y$ skilgreind með $(f \mid A)(x) := f(x)$ fyrir sérhvert stak x úr A, eða með enn öðrum orðum sem vörpunin $f \mid A := f \circ i$, þar sem $i : A \hookrightarrow X$ er ívarpið frá A í X.

Einskorðunin $f \mid A$ tekur því sömu gildi og f í öllum stökum þar sem hún er skilgreind, en hún er aðeins skilgreind á menginu A.

(2.31) Setning (*Skilgreining vörpunar með tilfellum*). *Látum X og Y vera mengi og gerum ráð fyrir að $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Gerum ráð fyrir að fyrir sérhvert i úr $[\![1, n]\!]$ höfum við gefna vörpun $f_i : A_i \to Y$ og að fyrir öll stök i, j úr $[\![1, n]\!]$ gildi*

$$f_i \mid A_i \cap A_j = f_j \mid A_i \cap A_j.$$

Þá er til nákvæmlega ein vörpun $f : X \to Y$ þannig að

$$f \mid A_i = f_i \text{ fyrir sérhvert } i \text{ úr } I.$$

Sönnun: Við getum skilgreint f sem hér segir: Látum $x \in X$. Vegna $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ er til stak i úr $[\![1, n]\!]$ þannig að $x \in A_i$. Við veljum slíkt stak i og skilgreinum $f(x)$ með

$$f(x) = f_i(x).$$

Til að sjá að þetta er skynsamlega skilgreind vörpun þurfum við að sýna að skilgreiningin á $f(x)$ sé óháð valinu á stakinu i. Gerum því ráð fyrir að j sé annað stak úr $[\![1, n]\!]$ þannig að $x \in A_j$. Þá er $x \in A_i \cap A_j$. Vegna $f_i \mid A_i \cap A_j = f_j \mid A_i \cap A_j$ gildir þá $f_i(x) = f_j(x)$. Því hefðum við allt eins getað valið j í staðinn fyrir i og sett $f(x) = f_j(x)$; það hefði gefið sömu útkomu. Því er skilgreiningin á f skynsamleg.

Ef nú $x \in A_i$, þá er samkvæmt skilgreiningu $f(x) = f_i(x)$, en það þýðir einmitt að $f \mid A_i = f_i$. Þetta gildir fyrir sérhvert i úr $[\![1, n]\!]$. Að lokum er ljóst að engin önnur vörpun getur fullnægt skilyrðinu í setningunni: Látum $g : X \to Y$ vera aðra vörpun þannig að $g \mid A_i = f_i$ fyrir sérhvert i úr I. Fyrir sérhvert x úr X er til stak i úr $[\![1, n]\!]$ þannig að $x \in A_i$ en þá er

$$g(x) = f_i(x) = f(x).$$

Þar sem þetta gildir fyrir sérhvert stak x úr X er $g = f$. □

(2.32) Athugasemd. Við segjum að vörpunin f í setningu (2.31) sé ***skilgreind með tilfellum***. Við skrifum þá gjarnan

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{ef } x \in A_1, \\ f_2(x) & \text{ef } x \in A_2, \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{ef } x \in A_n. \end{cases}$$

Til að sjá að slík skilgreining sé skynsamleg þarf að sjálfsögðu að ganga úr skugga um að skilyrðunum í setningu (2.31) sé fullnægt, nefnilega að $f_i \mid A_i \cap A_j = f_j \mid A_i \cap A_j$ fyrir öll i og j; en að sjálfsögðu nægir að athuga öll i og j þannig að $i < j$.

(2.33) Dæmi. Skilgreinum vörpun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ með

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0, \\ -x & \text{ef } x \leq 0. \end{cases}$$

Þetta þýðir að við skilgreinum f með skilyrðunum $f \mid A_1 = f_1$ og $f \mid A_2 = f_2$, þar sem $A_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $A_2 := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ og varpanirnar $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ og $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ eru skilgreindar með $f_1(x) := x$ og $f_2(x) := -x$. Til að sjá að skilgreiningin sé skynsamleg þurfum við samkvæmt setningu (2.31) að ganga úr skugga um að $f_1 \mid A_1 \cap A_2 = f_2 \mid A_1 \cap A_2$. En $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, og

$$f_1(0) = 0 = f_2(0),$$

svo að skilyrðinu er fullnægt, og vörpunin f er vel skilgreind. Gildi hennar í punktinum x er oftast táknað með $|x|$ og kallað ***algildi*** eða ***tölugildi*** rauntölunnar x. Skilgreiningin er því einnig oft skrifuð þannig:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0, \\ -x & \text{ef } x \leq 0. \end{cases}$$

§3. Endanleg mengi

Við höfum nokkrum sinnum talað óformlega um „endanleg mengi“ og „óendanleg mengi“ án þess að hafa skilgreint nákvæmlega hvað átt er við með því að mengi sé endanlegt. Nú er kominn tími til að bæta úr því. Við viljum segja að mengi X sé endanlegt og fjöldi staka í X sé náttúrlega talan n ef unnt er að *telja* stökin í X og útkoman úr talningunni sé n. Þá þurfum við að átta okkur á hvað það þýðir að telja stökin í X. Það þýðir að tölusetja þau með tölunum $1, 2, \ldots, n$ þannig að hvert stak í X sé tölusett með nákvæmlega einni tölu og þannig að sérhver af tölunum $1, 2, \ldots, n$ sé notuð. Þetta þýðir nákvæmlega hið sama og að búa til *gagntæka vörpun* $\{1, 2, \ldots, n\} \to X$. En til þess að þetta geti talizt skynsamleg skilgreining þurfum við fyrst að sýna að ávallt komi sami fjöldinn út hvernig sem við teljum. Með öðrum orðum þurfum við að sýna: Ef $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ og $g : \{1, 2, \ldots, m\} \to X$ eru gagntækar varpanir, þá er $n = m$. Setjum svo að við höfum slíkar varpanir f og g. Þá er $h := g^{-1} \circ f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ gagntæk vörpun. Það nægir því að sýna: Ef til er gagntæk vörpun $h : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$, þá er $n = m$.

Munum að mengið $\{1, 2, \ldots, n\}$ er einnig táknað með $[\![1, n]\!]$, og tökum eftir að $[\![1, 0]\!] = \varnothing$. Við sýnum nú fyrst:

(3.1) Setning. *Gerum ráð fyrir að $n, m \in \mathbb{N}$ og að til sé eintæk vörpun $h : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$. Þá er $n \leq m$.*

Sönnun: Við notum þrepun yfir n. Fullyrðingin er augljós ef $n = 0$. Gerum því ráð fyrir að $n \geq 1$ og að til sé eintæk vörpun $h : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$. Látum $k := h(n)$. Við getum nú skilgreint vörpun $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!]$ með

$$f(x) := \begin{cases} m & \text{ef } x = k, \\ k & \text{ef } x = m, \\ x & \text{annars.} \end{cases}$$

Vörpunin er augljóslega vel skilgreind óháð því hvort $k = m$ eða $k \neq m$: Ef $k = m$, þá er $f = \mathrm{id}_{[\![1,m]\!]}$, en ef $k \neq m$, þá víxlar vörpunin f stökunum k og m, en lætur hin óbreytt. Í báðum tilfellum er ljóst að f er gagntæk og þá sér í lagi eintæk vörpun. Því er vörpunin $f \circ h : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ eintæk og varpar stakinu n á stakið m. Vegna eintækni vörpunarinnar $f \circ h$ varpast ekkert stak annað en n á stakið m. Því getum við skilgreint vörpun $g : [\![1, n-1]\!] \to [\![1, m-1]\!]$ með því að setja $g(x) = (f \circ h)(x)$ fyrir sérhvert x úr $[\![1, n-1]\!]$, og þar sem $f \circ h$ er eintæk vörpun er ljóst að vörpunin g er líka eintæk. En samkvæmt þrepunarforsendu getum við nú ályktað að $n - 1 \leq m - 1$, sem þýðir að $n \leq m$, og sönnuninni er lokið. $\square$

Sem afleiðingu fáum við:

(3.2) Setning. *Látum X vera mengi, n og m vera náttúrlegar tölur og gerum ráð fyrir að til séu gagntækar varpanir $f : [\![1, n]\!] \to X$ og $g : [\![1, m]\!] \to X$. Þá er $n = m$.*

Sönnun: Varpanirnar $g^{-1} \circ f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ og $f^{-1} \circ g : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$ eru gagntækar og þá sér í lagi eintækar. Samkvæmt setningu (3.1) fæst því $n \leq m$ og $m \leq n$ og þar með $n = m$. $\square$

Við getum nú skilgreint:

(3.3) Skilgreining. *Mengi X kallast **endanlegt** ef til er náttúrleg tala n og gagntæk vörpun $a : [\![1, n]\!] \to X$. Talan n, sem þá er ákvörðuð ótvírætt samkvæmt setningu* (3.2), *er táknuð með*

$$\#(X) \qquad \text{eða} \qquad \#X$$

*og kölluð **fjöldatala** mengisins X eða **fjöldi staka** í menginu X. Við köllum fjölskylduna $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ **upptalningu** á menginu X.*

*Mengi kallast **óendanlegt** ef það er ekki endanlegt.*

Eftirfarandi staðreynd er augljós:

(3.4) Setning. *Látum X vera endanlegt mengi og Y vera mengi. Þá eru eftirfarandi tvö skilyrði jafngild:*

(i) *Til er gagntæk vörpun $X \to Y$.*

(ii) *Mengið Y er endanlegt og $\#Y = \#X$.* $\square$

(3.5) Dæmi. (1) Þar sem $[\![1,0]\!] = \varnothing$ er ljóst að tóma mengið $\varnothing$ er endanlegt og $\#\varnothing = 0$. Almennar gildir: Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n er mengið $[\![1,n]\!]$ endanlegt og $\#[\![1,n]\!] = n$, því að $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ er gagntæk vörpun.

(2) Ef x er stak, þá er mengið $\{x\}$ endanlegt og $\#\{x\} = 1$. Ef x og y eru stök og $x \neq y$, þá er mengið $\{x,y\}$ endanlegt og $\#\{x,y\} = 2$.

(3) Mengi allra náttúrlegra talna $\mathbb{N}$ er óendanlegt: Gerum ráð fyrir að til væri náttúrleg tala n og gagntæk vörpun $f : [\![1,n]\!] \to \mathbb{N}$. Látum $i : [\![1,n+1]\!] \hookrightarrow \mathbb{N}$ vera ívarpið; það er eintæk vörpun. Við gætum þá búið til eintæka vörpun $g := f^{-1} \circ i : [\![1,n+1]\!] \to [\![1,n]\!]$, en það er í mótsögn við setningu (3.1).

(3.6) Setning. *Látum X vera endanlegt mengi. Þá gildir:*

(1) *Ef x er stak þannig að $x \notin X$, þá er mengið $X \cup \{x\}$ endanlegt og $\#(X \cup \{x\}) = \#X + 1$.*

(2) *Sérhvert hlutmengi Y í X er endanlegt og $\#Y \leq \#X$. Ef að auki Y er eiginlegt hlutmengi í X, þá er $\#Y < \#X$.*

Sönnun: (1) Látum $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vera upptalningu á menginu X og setjum $a_{n+1} := x$. Þá er $(a_1, a_2, \ldots, a_n,\, a_{n+1})$ upptalning á menginu $X \cup \{x\}$.

(2) Látum $E(n)$ standa fyrir fullyrðinguna „ef X er endanlegt mengi, $\#X = n$ og $Y \subset X$, þá er mengið Y endanlegt og $\#Y \leq n$“, og sönnum $E(n)$ með þrepun. Fullyrðingin $E(0)$ er augljóslega sönn (mengin X og Y verða bæði að vera tóm). Gerum nú ráð fyrir að $E(n)$ gildi, að X sé endanlegt mengi, $\#X = n+1$ og að $Y \subset X$. Látum $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ vera upptalningu á X. Setjum $X' := X \setminus \{a_{n+1}\}$ og $Y' := Y \setminus \{a_{n+1}\}$. Þá er $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ upptalning á X', svo að X' er endanlegt og $\#X' = n$. Einnig er $Y' \subset X'$, svo að samkvæmt þrepunarforsendunni $E(n)$ er mengið Y' endanlegt og $\#Y' \leq n$. Nú er annaðhvort $a_{n+1} \in Y$ eða $a_{n+1} \notin Y$. Í fyrra tilfellinu er $Y = Y' \cup \{a_{n+1}\}$ og $a_{n+1} \notin Y'$, og samkvæmt lið (1) er þá mengið Y endanlegt og $\#Y = \#Y' + 1 \leq n+1$. Í seinna tilfellinu er $Y = Y'$, en þá er Y endanlegt og $\#Y = \#Y' \leq n < n+1$. Í báðum tilfellum fæst því að Y er endanlegt og $\#Y \leq n+1$. Við höfum því sýnt að fullyrðingin $E(n+1)$ er sönn.

Gerum nú ráð fyrir að Y sé *eiginlegt* hlutmengi í X. Þá er mengið Y endanlegt samkvæmt ofansögðu, og auk þess er til stak x úr $X \setminus Y$. Við höfum þá $Y \cup \{x\} \subset X$ og $x \notin Y$, svo að samkvæmt lið (1) er $\#Y + 1 = \#(Y \cup \{x\}) \leq \#X$ og því $\#Y < \#X$. $\square$

(3.7) Fylgisetning. *Látum X vera endanlegt mengi og $f : Y \to X$ vera eintæka vörpun. Þá er mengið Y endanlegt, og $\#Y \leq \#X$. Auk þess gildir $\#Y = \#X$ þá og því aðeins að vörpunin f sé einnig átæk (og því gagntæk).*

Sönnun: Þar sem vörpunin f er eintæk er vörpunin $Y \to f[Y], x \mapsto f(x)$ gagntæk. Samkvæmt (3.6) er mengið $f[Y]$ endanlegt og $\#f[Y] \leq \#X$. Samkvæmt (3.4) er þá mengið Y endanlegt og $\#Y = \#f[Y] \leq \#X$. Auk þess fæst samkvæmt (3.6) að $\#Y = \#X$ þá og því aðeins að $f[Y] = X$, en það þýðir einmitt að vörpunin f sé átæk. $\square$

(3.8) Fylgisetning. *Vörpun frá óendanlegu mengi í endanlegt mengi getur ekki verið eintæk.* □

Af (3.7) leiðir einnig beint:

(3.9) Fylgisetning (*Skúffuregla Dirichlets*). *Látum X og Y vera endanleg mengi, $n = \#X$, $m = \#Y$ og látum $f : Y \to X$ vera vörpun. Ef $m > n$, þá er vörpunin f ekki eintæk.* □

(3.10) Athugasemd. Skúffureglu Dirichlets má orða þannig: Setjum svo að við eigum að koma m hlutum fyrir í n skúffum. Ef $m > n$ þá lenda að minnsta kosti tveir hlutir í einhverri skúffunni.

(3.11) Fylgisetning. *Látum X vera endanlegt mengi og $g : X \to Y$ vera átæka vörpun. Þá er mengið Y endanlegt, og $\#Y \leq \#X$. Auk þess gildir $\#Y = \#X$ þá og því aðeins að vörpunin g sé einnig eintæk (og því gagntæk).*

Sönnun: Þar sem vörpuning g er átæk er trefjan $g^{-1}[y]$ ekki tóm fyrir sérhvert y úr Y. Því má finna vörpun $f : Y \to X$ með því að láta $f(y)$ vera eitthvert stak úr trefjunni $g^{-1}[y]$ (valið af handahófi). Þá er $g(f(y)) = y$ fyrir sérhvert y úr Y; með öðrum orðum er $g \circ f = \mathrm{id}_Y$. En þá er ljóst að vörpunin f er eintæk: Af $f(y_1) = f(y_2)$ leiðir $y_1 = g(f(y_1)) = g(f(y_2)) = y_2$. Við getum nú notað fylgisetningu (3.7) á vörpunina f og fáum að Y er endanlegt og $\#Y \leq \#X$. Auk þess gildir $\#Y = \#X$ þá og því aðeins að vörpunin f sé gagntæk. En vegna $g \circ f = \mathrm{id}_Y$ er augljóst að vörpunin f er gagntæk þá og því aðeins að vörpunin g sé gagntæk. □

(3.12) Athugasemd. Fylgisetningu (3.11) má lýsa þannig: Gerum ráð fyrir að við höfum endanlega marga hluti sem við setjum í skúffur, og að við notum hverja skúffu. Þá eru skúffurnar líka endanlega margar og ekki fleiri en hlutirnir. Þær eru jafnmargar og hlutirnir þá og því aðeins að í hverri skúffu lendi nákvæmlega einn hlutur.

Sem beina afleiðingu af fylgisetningum (3.7) og (3.11) fáum við eftirfarandi niðurstöðu:

(3.13) Setning. *Látum X og Y vera endanleg mengi með sömu fjöldatölu og $f : X \to Y$ vera vörpun. Þá eru eftirfarandi þrjú skilyrði jafngild:*

(i) *Vörpunin f er eintæk.*
(ii) *Vörpunin f er átæk.*
(iii) *Vörpunin f er gagntæk.* □

(3.14) Athugasemd. Setningu (3.13) má einnig orða svo: Gerum ráð fyrir að við eigum að dreifa endanlega mörgum hlutum í jafnmargar skúffur. Ef við setjum í hæsta lagi einn hlut í hverja skúffu, þá verðum við að nota allar skúffurnar. Öfugt ef við viljum hafa hlut í hverri skúffu, þá getum við ekki sett nema einn hlut í hverja þeirra.

(3.15) Viðvörun. Ef mengin X og Y eru endanleg en hafa ekki sömu fjöldatölu, þá eru skilyrðin í setningu (3.13) *ekki* jafngild. Sömuleiðis eru þau ekki jafngild ef annað af mengjunum X og Y er óendanlegt, eða þá bæði.

Sem afleiðingu af síðustu setningu fáum við:

(3.16) Setning. *Mengi allra náttúrlegra talna* $\mathbb{N}$ *er óendanlegt.*

Sönnun: Vörpunin $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sem er gefin með $f(n) := n + 1$ er augljóslega eintæk, en hún er ekki átæk, því að $n + 1 \geq 1 > 0$ fyrir sérhverja náttúrlega tölu n, svo að talan 0 er ekki í myndmengi vörpunarinnar f. □

(3.17) Setning. *Mengi* A *er óendanlegt þá og því aðeins að til sé eintæk vörpun* $f : \mathbb{N} \to A$.

Sönnun: Gerum fyrst ráð fyrir að til sé eintæk vörpun $f : \mathbb{N} \to A$, þá er mengið A óendanlegt; annars væri mengið $\mathbb{N}$ endanlegt samkvæmt setningu (3.7) í mótsögn við síðustu setningu. Gerum þá á hinn bóginn ráð fyrir að mengið A sé óendanlegt og búum til eintæka vörpun $f : \mathbb{N} \to A$ með þrepun þannig: Við veljum stak af handahófi úr menginu A og köllum það $f(0)$. Gerum þá ráð fyrir að við höfum þegar skilgreint stökin $f(0), \dots, f(n)$ þannig að vörpunin $[\![0, n]\!] \to A, k \mapsto f(k)$ sé eintæk. Hún getur ekki verið átæk, því að þá væri $f(0), \dots, f(n)$ upptalning mengisins A og það því endanlegt, Við veljum þá stak úr menginu $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ og köllum það $f(n+1)$. Ljóst er að með þessu móti fæst eintæk vörpun $f : \mathbb{N} \to A$. □

Sem afleiðingu fáum við eftirfarandi setningu, sem er athyglisverð vegna þess að hún gefur skilyrði sem er nauðsynlegt og nægjanlegt fyrir að mengi sé endanlegt og er auk þess þannig að í því er engin tilvísun til náttúrlegu talnanna. Því hefði mátt nota þetta skilyrði til að *skilgreina* endanleg mengi án tilvísunar til náttúrlegra talna og upptalninga:

(3.18) Setning. (1) *Mengi* A *er endanlegt þá og því aðeins að sérhver eintæk vörpun frá menginu* A *í sjálft sig sé gagntæk.*

(2) *Mengi* A *er óendanlegt þá og því aðeins að til sá gagntæk vörpun frá* A *á eiginlegt hlutmengi í sjálfu sér.*

Sönnun: Liður (2) í setningunni er í raun aðeins umorðun þess sem stendur í lið (1), því að eintæk vörpun frá einu mengi X í annað mengi Y gefur allaf af sér gagntæka vörpun frá X á myndmengið $f[X]$. Því er jafngilt að til sé eintæk vörpun frá mengi A í sjálft sig sem er ekki gagntæk og að til sé gagntæk vörpun frá A á eiginlegt hlutmengi í A.

Setning (3.13) sýnir að fyrir endanlegt mengi er sérhver eintæk vörpun frá menginu á sjálft sig gagntæk. Gerum þá ráð fyrir að mengið A sé óendanlegt. Samkvæmt (3.17) er til eintæk vörpun $f : \mathbb{N} \to A$. Skilgreinum þá vörpun $g : A \to A$ með því að setja

$$g(x) := \begin{cases} x, & \text{ef } x \in A \setminus f[\mathbb{N}], \\ f(n+1), & \text{ef } x = f(n), \text{ þar sem } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Þar sem vörpunin f er eintæk er ljóst að vörpunin g er vel skilgreind og eintæk. En hún er ekki átæk, því að $f(0) \notin g[A]$. □

(3.19) Setning. *Látum* X *og* Y *vera sundurlæg endanleg mengi. Þá er sammengið* $X \cup Y$ *endanlegt og*

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y.$$

Sönnun: Setjum $n := \#X$ og $m := \#Y$. Látum $a : [\![1, n]\!] \to X$ og $b : [\![1, m]\!] \to Y$ vera gagntækar varpanir. Þá fæst vörpun $c : [\![1, n+m]\!] \to X \cup Y$ með því að setja

$$c(k) := \begin{cases} a(k) & \text{ef } 1 \leq k \leq n, \\ b(k-n) & \text{ef } n+1 \leq k \leq n+m. \end{cases}$$

Vörpunin c er augljóslega átæk, og vegna $X \cap Y = \varnothing$ er hún einnig eintæk. Því er mengið $X \cup Y$ endanlegt og $\#(X \cup Y) = n + m$. □

(3.20) Fylgisetning. *Látum X og Y vera endanleg mengi. Þá eru mengin $X \cup Y$ og $X \cap Y$ endanleg, og*

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y).$$

Sönnun: Mengið $X \cup Y$ er sammengi sundurlægu mengjanna $X \setminus Y$ og Y, og mengið X er sammengi sundurlægu mengjanna $X \setminus Y$ og $X \cap Y$. Mengin $X \setminus Y$ og $X \cap Y$ eru bæði hlutmengi í endanlega menginu X og því endanleg. Samkvæmt ofansögðu er mengið $X \cup Y$ endanlegt, og við höfum $\#(X \cup Y) = \#(X \setminus Y) + \#Y$ og $\#X = \#(X \setminus Y) + \#(X \cap Y)$. En þar með er $\#(X \cup Y) - \#Y = \#(X \setminus Y) = \#X - \#(X \cap Y)$. □

Af setningu (3.19) leiðir auðveldlega með þrepun:

(3.21) Fylgisetning. *Látum X vera sammengi endanlegu mengjanna $X_1, X_2, \ldots, X_n$ og gerum ráð fyrir að þau séu sundurlæg tvö og tvö; með öðrum orðum er $X_i \cap X_j = \varnothing$ ef $i \neq j$. Þá er mengið X endanlegt og*

$$\#X = \#X_1 + \#X_2 + \cdots + \#X_n. \qquad \square$$

(3.22) Fylgisetning. *Látum A vera endanlegt hlutmengi í óendanlegu mengi X. Þá er fyllimengið $X \setminus A$ óendanlegt.*

Sönnun: Annars væri $X = A \cup (X \setminus A)$ sammengi tveggja endanlegra mengja og því endanlegt. □

(3.23) Setning. *Ef X og Y eru endanleg mengi, $\#X = n$ og $\#Y = m$, þá er margfeldið $X \times Y$ endanlegt og*

$$\#(X \times Y) = n \cdot m.$$

Sönnun: Látum $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vera upptalningu á menginu X. Þá er $X \times Y$ sammengi mengjanna $\{a_1\} \times Y, \{a_2\} \times Y, \ldots, \{a_n\} \times Y$, og þau eru sundurlæg tvö og tvö. Fyrir sérhvert k er vörpunin $Y \to \{a_k\} \times Y, y \mapsto (a_k, y)$ gagntæk, svo að $\{a_k\} \times Y$ er endanlegt og $\#(\{a_k\} \times Y) = m$. Samkvæmt (3.21) er þá $X \times Y$ endanlegt og

$$\#(X \times Y) = \#(\{a_1\} \times Y) + \cdots + \#(\{a_n\} \times Y) = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ sinnum}} = n \cdot m. \qquad \square$$

Með þrepun fæst:

(3.24) Fylgisetning. *Ef $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ og mengin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eru öll endanleg, þá er mengið X endanlegt og*

$$\#X = \#X_1 \cdot \#X_2 \cdot \cdots \cdot \#X_n. \qquad \square$$

(3.25) Skilgreining. *Látum X og Y vera mengi. Við táknum með*

$$Y^X$$

mengi allra varpana $f : X \to Y$.

Þessi sérkennilegi ritháttur skýrist að nokkru leyti af næstu setningu:

(3.26) Setning. *Ef X og Y eru endanleg mengi, $\#X = n$ og $\#Y = m$, þá er mengið Y^X endanlegt og*

$$\#(Y^X) = m^n.$$

Sönnun: Látum $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vera upptalningu á menginu X. Vörpun $f : X \to Y$ ákvarðast þá fullkomlega af n-dinni $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) \in Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$, þar sem $Y_i = Y$ fyrir sérhvert i, og öfugt ákvarðar slík n-d vörpun frá X til Y. Með (3.24) fæst nú:

$$\#(Y^X) = \#(\underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{n \text{ sinnum}}) = \underbrace{m \cdot \cdots \cdot m}_{n \text{ sinnum}} = m^n. \qquad \square$$

(3.27) Skilgreining. *Fyrir sérhvert mengi X táknum við með*

$$\mathcal{P}(X)$$

mengi allra hlutmengja í X, þ. e. a. s.

$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$$

*Mengið $\mathcal{P}(X)$ er kallað **veldismengi** mengisins X.*

(3.28) Athugasemd. Í frumsendumengjafræði þarf sérstaka frumsendu til að tryggja að veldismengi gefins mengis sé til; hún kallast einfaldlega ***frumsendan um veldismengi***.

(3.29) Setning. *Ef X er endanlegt mengi og $\#X = n$, þá er veldismengið $\mathcal{P}(X)$ endanlegt, og*

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^n.$$

Sönnun: Við fáum gagntæka vörpun

$$\{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X), f \mapsto f^{-1}[1],$$

svo að setningin er bein afleiðing af setningu (3.26). $\square$

(3.30) Skilgreining. *Fyrir sérhverja náttúrlega tölu skilgreinum við **aðfeldi** tölunnar n, táknað*

$$n!$$

og stundum lesið „n hrópmerkt“, með þrepun þannig að

$$0! := 1,$$

$$(n+1)! := n! \cdot (n+1).$$

Við höfum þannig $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ o. s. frv.

(3.31) Setning. *Látum X og Y vera endanleg mengi, $\#X = n$ og $\#Y = m$, og gerum ráð fyrir að $n \leq m$. Þá hefur mengi allra eintækra varpana $f : X \to Y$ fjöldatöluna*

$$\frac{m!}{(m-n)!}.$$

Sönnun: Notum þrepun yfir n. Fullyrðingin er augljós fyrir $n = 0$, því að þá er $X = \varnothing$ og eina vörpunin $X \to Y$ er tóma vörpunin, sem er eintæk. Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin sé rétt fyrir tiltekna náttúrlega tölu n. Látum X og Y vera endanleg mengi þannig að $\#X = n+1$ og $\#Y = m$ og gerum ráð fyrir að $n+1 \leq m$. Þar sem $\#X \geq 1$ er mengið X ekki tómt og hefur því stak a. Setjum $X' := X \setminus \{a\}$. Þá er $X = X' \cup \{a\}$ og $\#X' = n$.

Ef nú $f : X \to Y$ er eintæk vörpun, þá er einskorðunin $f' := f \mid X'$ eintæk, og $f(a) \in Y \setminus f'[X']$. Öfugt ef við höfum eintæka vörpun $f' : X' \to Y$ og stak b úr $Y \setminus f'[X']$, þá má skilgreina eintæka vörpun $f : X \to Y$ með skilyrðinum $f \mid X' = f'$ og $f(a) = b$. Samkvæmt þrepunarforsendu er fjöldi slíkra eintækra varpana f' gefinn með

$$\frac{m!}{(m-n)!},$$

og fyrir hverja slíka vörpun f' er $\#f'[X'] = n$ og því $\#(Y \setminus f'[X']) = m - n$, og því má velja stakið $b = f(a)$ á $m - n$ vegu. Því er fjöldi eintækra varpana frá X til Y gefinn með

$$\frac{m!}{(m-n)!} \cdot (m-n) = \frac{m!}{(m-(n+1))!}.$$

Við höfum því sýnt að fullyrðingin er einnig rétt fyrir töluna $n+1$. □

Í sértilfellinu þegar X og Y hafa jafnmörg stök þá er eintæk vörpun frá X til Y sjálfkrafa gagntæk samkvæmt setningu (3.13), svo að við fáum:

(3.32) Setning. *Látum X og Y vera endanleg mengi með sömu fjöldatölu n. Þá hefur mengi allra gagntækra varpana frá X til Y fjöldatöluna $n!$.*

Sér í lagi hefur mengi allra uppstokkana endanlegs mengis X þannig að $\#X = n$ fjöldatöluna $n!$. □

(3.33) Skilgreining. *Látum X vera mengi, k vera náttúrlega tölu og táknum með $\mathcal{P}_k(X)$ mengi allra hlutmengja í X sem hafa nákvæmlega k stök. Ef X er endanlegt og $\#X = n$, þá setjum við*

$$\binom{n}{k} := \#\mathcal{P}_k(X),$$

*og við köllum $\binom{n}{k}$ **tvíliðustuðul** talnanna n og k.*

(3.34) Athugasemd. Ef X og Y eru tvö endanleg mengi með sömu fjöldatölu n, þá gefur sérhver gagntæk vörpun $f : X \to Y$ af sér gagntæka vörpun

$$\mathcal{P}_k(X) \to \mathcal{P}_k(Y), A \mapsto f[A].$$

Því er tvíliðustuðullinn $\binom{n}{k}$ aðeins háður tölunum n og k, en ekki menginu X. Sér í lagi er

$$\binom{n}{k} = \#\mathcal{P}_k([\![1,n]\!]).$$

Augljóslega gildir

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{ef} \quad k > n.$$

(3.35) Setning. *Ef $k, n \in \mathbb{N}$ og $k \leq n$, þá er*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Sönnun: Setjum $X := [\![1,k]\!]$ og $Y := [\![1,n]\!]$ og látum E vera mengi allra eintækra varpana $f : X \to Y$. Látum A vera hlutmengi í Y þannig að $\#A = k$ og táknum með j_A ívarpið $A \hookrightarrow Y$. Ef $g : X \to A$ er gagntæk vörpun, þá er $f := j_A \circ g : X \to Y$ eintæk vörpun með myndmengi A, og þannig fæst gagntæk samsvörun milli gagntækra varpana $g : X \to A$ og eintækra varpana $f : X \to Y$ með myndmengi A. Samkvæmt (3.32) er þá fjöldi eintækra varpana $f : X \to Y$ með myndmengi A jafn $k!$.

Látum nú $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ vera upptalningu allra hlutmengja í Y sem hafa fjöldatölu k. Þá er að sjálfsögðu $N = \binom{n}{k}$. Fyrir sérhvert $j = 1, 2, \ldots, N$ látum við E_j vera mengi allra eintækra varpana $f : X \to Y$ með myndmengi A_j. Þá er mengið E sammengi mengjanna $E_1, E_2, \ldots, E_N$, og þau eru sundurlæg tvö og tvö. Samkvæmt fylgisetningu (3.21) er $\#E = \#E_1 + \#E_2 + \cdots + \#E_N = N \cdot k!$. Ef nú $k \leq n$, þá er $\#E = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ samkvæmt setningu (3.31), svo að $N \cdot k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. En það þýðir að

$$\binom{n}{k} = N = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \qquad \square$$

(3.36) Athugasemd. Af setningu (3.35) leiðir sér í lagi að fyrir k og n úr $\mathbb{N}$ þannig að $k \leq n$ gengur talan $k! \cdot (n-k)!$ upp í tölunni $n!$.

(3.37) Setning. *Fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Sönnun: Setjum $X := [\![1,n]\!]$. Veldismengið $\mathcal{P}(X)$ er sammengi mengjanna $\mathcal{P}_0(X)$, $\mathcal{P}_1(X)$, ..., $\mathcal{P}_n(X)$, og þau eru sundurlæg tvö og tvö. Fullyrðingin er nú bein afleiðing af (3.21) og (3.29). $\square$

Eftirfarandi setning leyfir okkur að reikna tvíliðustuðlana út hvern af öðrum með tiltölulega einföldum hætti:

(3.38) Setning. *Fyrir allar náttúrlegar tölur n og k gildir*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Sönnun: Þetta fæst með einföldum reikningi úr setningu (3.35). En einnig má sjá það með eftirfarandi hætti: Menginu $\mathcal{P}_{k+1}([\![1, n+1]\!])$ af $(k+1)$-staka hlutmengjum í $[\![1, n+1]\!]$ má skipta í tvö sundurlæg hlutmengi Q og R, þar sem Q er mengi þeirra $(k+1)$-staka hlutmengja sem innihalda töluna $n+1$ sem stak og R mengi þeirra $(k+1)$-staka hlutmengja sem innihalda hana ekki sem stak. Stökin í Q eru af gerðinni $A \cup \{n+1\}$, þar sem A er k-staka hlutmengi í $[\![1, n]\!]$ og því jafnmörg og slík mengi A, svo að Q hefur fjöldatöluna $\binom{n}{k}$. En R er ekkert annað en $\mathcal{P}_{k+1}([\![1, n]\!])$, svo að R hefur fjöldatöluna $\binom{n}{k+1}$. □

Við getum nú sett tvíliðustuðlana upp í „þríhyrnda töflu“, sem er oftast kölluð ***þríhyrningur Pascals***:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\multicolumn{11}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

Formúlan í (3.38) segir þá að sérhver stuðull sem er ekki fyrst eða síðast í línu sé summa þeirra tveggja sem standa næst honum í næstu línu fyrir ofan hann í töflunni. Þar sem

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

fyrir sérhvert n byrjar og endar sérhver lína á tölunni 1. Nú auðvelt að reikna tvíliðustuðlana út: Taflan byrjar þannig:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

§4. Fjölskyldur af mengjum

Byrjum á að sýna hvernig útvíkka má skilgreiningarnar á sammengi og sniðmengi tveggja mengja þannig að við getum einnig talað um sammengi og sniðmengi *óendanlega margra* mengja:

(4.1) Skilgreining. *Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af mengjum A_i.*

(1) ***Sammengi*** *fjölskyldunnar $(A_i)_{i\in I}$ er skilgreint sem mengið*

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x : \text{til er } i \text{ úr } I \text{ þannig að } x \in A_i\}.$$

(2) *Ef $I \neq \varnothing$, þá er* ***sniðmengi*** *fjölskyldunnar $(A_i)_{i\in I}$ skilgreint sem mengið*

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x : \text{fyrir sérhvert } i \text{ úr } I \text{ er } x \in A_i\}.$$

(4.2) Athugasemdir. (1) Í frumsendumengjafræði er sérstök frumsenda sem tryggir tilvist sammengis fjölskyldu af mengjum. Hún kallast ***frumsenda um sammengi*** og segir einfaldlega að fyrir sérhverja gefna fjölskyldu $(A_i)_{i\in I}$ sé til mengi sem inniheldur sem stök nákvæmlega þau stök x sem fullnægja því skilyrði að til sé stak i úr I þannig að $x \in A_i$. Tilvist sniðmengis fjölskyldu sem er ekki tóm er hins vegar afleiðing af frumsendunni um hlutmengi.

(2) Skilgreiningin á sniðmengi og sammengi tveggja mengja í (1.9) er sértilfelli af skilgreiningu (4.1). Við höfum

$$A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i\in\{1,2\}} A_i \qquad \text{og} \qquad A_1 \cap A_2 = \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i.$$

(3) Ef $I = [\![m,n]\!]$, þar sem m og n eru heilar tölur, þá eru sammengið $\bigcup_{i\in I} A_i$ og sniðmengið $\bigcap_{i\in I} A_i$ oft táknuð með

$$\bigcup_{i=m}^{n} A_i := \bigcup_{i\in[\![m,n]\!]} A_i \qquad \text{og} \qquad \bigcap_{i=m}^{n} A_i := \bigcap_{i\in[\![m,n]\!]} A_i.$$

Minnumst einnig á að algengt er að nota sérstakan rithátt fyrir sniðmengi og sammengi fjölskyldna af mengjum ef vísamengið er annaðhvort mengi allra náttúrlegra talna $\mathbb{N}$ eða mengi allra heilla talna $\mathbb{Z}$: Ritað er

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \qquad \text{og} \qquad \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Sömuleiðis er ritað

$$\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} A_i := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i \qquad \text{og} \qquad \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} A_i := \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} A_i.$$

(4) Látum $\mathcal{C}$ vera mengi af mengjum. VIð getum þá búið til fjölskylduna $(C)_{C\in\mathcal{C}}$ af mengjum, sem er skilgreind þannig að gildi hennar í stakinu C úr $\mathcal{C}$ er einmitt mengið C, og síðan myndað sammengið $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$; það er stundum táknað

$$\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\} \quad \text{eða einfaldlega} \quad \bigcup\mathcal{C}.$$

Þetta er þá sammengi allra mengjanna sem eru stök í menginu $\mathcal{C}$. Ef $\mathcal{C} \neq \varnothing$ getum við einnig myndað sniðmengið $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$; það er stundum táknað

$$\bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\} \quad \text{eða einfaldlega} \quad \bigcap\mathcal{C}.$$

Þetta er sniðmengi allra mengjanna sem eru stök í menginu $\mathcal{C}$. Með þessum rithætti væri til dæmis

$$\bigcup\{A, B, C\} = A \cup B \cup C \quad \text{og} \quad \bigcap\{A, B, C\} = A \cap B \cap C.$$

En ritháttturinn er oftar notaður þegar mengið $\mathcal{C}$ er óendanlegt.

(5) Ef $I = \varnothing$, með öðrum orðum ef $(A_i)_{i\in I}$ er tóma fjölskyldan, þá er sammengið vel skilgreint; við höfum

$$\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing.$$

Hins vegar er sniðmengi tómu fjölskyldunnar ekki skilgreint. Ef við athugum hvað skilgreiningin hér að framan mundi þýða í þessu tilfelli, þá sjáum við að skilyrðið „fyrir sérhvert i úr $\varnothing$ er $x \in A_i$“ er í raun og veru ekkert skilyrði, því að ekki er til neitt i sem er stak í menginu $\varnothing$; skilyrðinu er því sjálfkrafa fullnægt fyrir *sérhvert* stak x. Sniðmengi tómu fjölskyldunnar yrði því að innihalda öll stök. En sýna má að ekki er til neitt mengi sem inniheldur öll stök (eins og sýnt verður í næsta kafla), svo að sniðmengi tómu fjölskyldunnar getur ekki verið til.

Við látum okkur nægja að gefa eftirfarandi reiknireglur fyrir sammengi og sniðmengi af fjölskyldum:

(4.3) Setning. (1) (*Almennar tengireglur*) *Látum* $(A_i)_{i\in I}$ *vera fjölskyldu af mengjum og* $I = \bigcup_{k\in K} J_k$. *Þá er*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K}(\bigcup_{i\in J_k} A_i).$$

Ef að auki $K \neq \varnothing$ *og* $J_k \neq \varnothing$ *fyrir sérhvert* k *úr* K, *þá er*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in K}(\bigcap_{i\in J_k} A_i).$$

(2) (*Reglur de Morgans*) *Ef* X *er mengi,* $(A_i)_{i\in I}$ *er fjölskylda af mengjum og* $I \neq \varnothing$, *þá er*

$$X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$$

og

$$X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i).$$

Sönnun: (1) Við sönnum fyrri regluna og eftirlátum lesanda að sanna hina síðari. Gerum ráð fyrir að $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Þá er til i úr I þannig að $x \in A_i$. Vegna $I = \bigcup_{k\in K} J_k$ er til k úr K þannig að $i \in J_k$. En þar með er $x \in \bigcup_{i\in J_k} A_i$ og því $x \in \bigcup_{k\in K}(\bigcup_{i\in J_k} A_i)$. Öfugt ef $x \in \bigcup_{k\in K}(\bigcup_{i\in J_k} A_i)$, þá er til k úr K þannig að $x \in \bigcup_{i\in J_k} A_i$. En þá er líka til i úr J_k þannig að $x \in A_i$. Vegna $I = \bigcup_{k\in K} J_k$ er $i \in I$ og því $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

(2) Sönnum aftur aðeins fyrri regluna. Gerum ráð fyrir að $x \in X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. Þá er $x \in X$ og $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$. En $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ þýðir að x er ekki í neinu af mengjunum A_i, með öðrum orðum er $x \notin A_i$ fyrir sérhvert i úr I. Vegna $x \in X$ og $x \notin A_i$ gildir $x \in X \setminus A_i$ fyrir sérhvert i úr I, og það þýðir einmitt að $x \in \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$. Öfugt ef $x \in \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$, þá er $x \in X \setminus A_i$ fyrir sérhvert i úr I. Því er $x \in X$ og $x \notin A_i$ fyrir sérhvert i úr I. Það þýðir að $x \in X$ og $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ eða $x \in X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. □

(4.4) Athugasemd. Til að sjá samband almennu tengireglnanna í lið (1) í setningu setningu (4.3) við venjulegu tengireglurnar í lið (8) í setningu (1.11) skulum við sýna hvernig líta má á venjulegu tengiregluna fyrir sammengi sem sértilfelli af almennu tengireglunni fyrir sammengi. Látum $I = \{1, 2, 3\}$, $K = \{1, 2\}$, $J_1 = \{1, 2\}$ og $J_2 = \{3\}$. Þá er $I = J_1 \cup J_2 = \bigcup_{k\in K} J_k$. Almenna tengireglan segir þá í þessu tilfelli að

$$\bigcup_{i\in\{1,2,3\}} A_i = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

Látum hins vegar $I = \{1,2,3\}$, $K = \{1,2\}$, $J_1 = \{1\}$ og $J_2 = \{2,3\}$. Þá er aftur $I = J_1 \cup J_2$, og almenna tengireglan segir að

$$\bigcup_{i \in \{1,2,3\}} A_i = A_1 \cup (A_2 \cup A_3).$$

Af almennu tengireglunni leiðir því að $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$.

Við fáum líka hliðstæður við reglur um myndir og frummyndir sniðmengja og sammengja sem samsvara reglum í setningu (2.20):

(4.5) Setning. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun.*

(1) *Ef $(A_i)_{i \in I}$ er fjölskylda af hlutmengjum í X, þá er*

$$f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i].$$

Ef að auki $I \neq \varnothing$, þá er

$$f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i].$$

(2) *Ef $(B_i)_{i \in I}$ er fjölskylda af hlutmengjum í Y, þá er*

$$f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i].$$

Ef að auki $I \neq \varnothing$, þá er

$$f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i].$$

Sönnun: (1) Gerum ráð fyrir að $y \in f[\bigcup_{i \in I} A_i]$. Þá er til stak x í $\bigcup_{i \in I} A_i$ þannig að $f(x) = y$. Vegna $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ er til stak i úr I þannig að $x \in A_i$. En þá er $y = f(x) \in f[A_i]$ og því $y \in \bigcup_{i \in I} f[A_i]$. Gerum á hinn bóginn ráð fyrir að $y \in \bigcup_{i \in I} f[A_i]$. Þá er til i úr I þannig að $y \in f[A_i]$ og því til x úr A_i þannig að $y = f(x)$. En þá er $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ og því $y \in f[\bigcup_{i \in I} A_i]$.

Gerum næst ráð fyrir að $I \neq \varnothing$ og að $y \in f[\bigcap_{i \in I} A_i]$. Þá er til stak x úr $\bigcap_{i \in I} A_i$ þannig að $f(x) = y$. Fyrir sérhvert i úr I er þá $x \in A_i$ og því $y = f(x) \in f[A_i]$. En þar með er $y \in \bigcap_{i \in I} f[A_i]$.

(2) Gerum ráð fyrir að $x \in f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i]$. Þá er $f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i$ og því til stak i úr I þannig að $f(x) \in B_i$. En þá er $x \in f^{-1}[B_i]$ og því $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$. Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$. Þá er til i úr I þannig að $x \in f^{-1}[B_i]$ eða með öðrum orðum þannig að $f(x) \in B_i$. Þá er einnig $f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i$ og því $x \in f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i]$.

Gerum næst ráð fyrir að $I \neq \varnothing$. Að $x \in f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i]$ er jafngilt því að $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$, og það er aftur jafngilt því að $f(x) \in B_i$ fyrir sérhvert i úr I. En það þýðir einmitt að $x \in f^{-1}[B_i]$ fyrir sérhvert i úr I eða með öðrum orðum að $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$. □

Við getum einnig skilgreint *margfeldi* óendanlega margra mengja líkt og við skilgreindum margfeldi endanlega margra mengja í (2.7):

(4.6) Skilgreining. *Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af mengjum.* ***Margfeldi*** *fjölskyldunnar $(A_i)_{i\in I}$ er skilgreint sem mengi allra fjölskyldna $(a_i)_{i\in I}$ þannig að $a_i \in A_i$ fyrir sérhvert i úr I. Það er táknað með*

$$\prod_{i\in I} A_i := \{(a_i)_{i\in I} : a_i \in A_i \text{ fyrir sérhvert } i \text{ úr } I\}.$$

(4.7) Athugasemd. Tökum eftir að skilgreining (2.7) á margfeldi endanlega margra mengja er sértilfelli af þessari skilgreiningu. Við höfum

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i\in [\![1,n]\!]} A_i.$$

Þetta endanlega margfeldi er einnig oft táknað

$$\prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Einnig er sérstakur ritháttur viðhafður þegar $I = \mathbb{N}$ er mengi náttúrlegu talnanna; við skrifum

$$\prod_{i=0}^{+\infty} A_i := \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Við getum nú sett fram ***frumsenduna um val*** eða ***valfrumsenduna***, sem minnst var á í §1. Gerum ráð fyrir að við höfum fjölskyldu $(A_i)_{i\in I}$ af mengjum þannig að $A_i \neq \varnothing$ fyrir sérhvert i úr I. Frumsendan um val segir að þá getum við búið til fjölskyldu $(a_i)_{i\in I}$ af stökum með því að *velja* (af handahófi) eitt stak a_i úr sérhverju mengi A_i:

> **Frumsenda um val.** Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af mengjum þannig að $A_i \neq \varnothing$ fyrir sérhvert i úr I. Þá er til fjölskylda af stökum $(a_i)_{i\in I}$ þannig að $a_i \in A_i$ fyrir sérhvert i úr I.

Með öðrum orðum segir frumsendan: Ef $(A_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af mengjum þannig að $A_i \neq \varnothing$ fyrir sérhvert i úr I, þá er $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

(4.8) Athugasemd. Frumsendan um val hefur jafnan verið umdeildust af öllum frumsendum mengjafræðinnar. Andstæðingar hennar segja að ekki sé unnt að velja af handahófi óendanlega mörg stök í einu án þess að setja fram einhverja reglu um hvernig valið skuli fara fram. Sýnum hins vegar til gamans dæmi um einfalda setningu í mengjafræði, þar sem nauðsynlega þarf á frumsendunni að halda.

(4.9) Setning. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun.*

(1) *Gerum ráð fyrir að $X \neq \varnothing$. Vörpunin f er eintæk þá og því aðeins að til sé vörpun $g : Y \to X$ þannig að*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

(2) *Vörpunin f er átæk þá og því aðeins að til sé vörpun $g : Y \to X$ þannig að*

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Sönnun: (1) Gerum fyrst ráð fyrir að til sé vörpun $g : Y \to X$ þannig að $g \circ f = \mathrm{id}_X$ og sýnum að vörpunin f er eintæk: Látum því x_1, x_2 vera stök í X þannig að $f(x_1) = f(x_2)$. Þá er

$$x_1 = \mathrm{id}_X(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = \mathrm{id}_X(x_2) = x_2,$$

og við höfum sýnt að vörpunin f er eintæk.

Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að f sé eintæk. Þar sem $X \neq \varnothing$ hefur X að minnsta kosti eitt stak. Látum a vera eitthvert stak í X. Við skilgreinum nú vörpun $g : Y \to X$ með eftirfarandi hætti: Látum fyrst $y \in f[X]$. Þar sem vörpunin f er eintæk er til *nákvæmlega eitt* stak x í X þannig að $y = f(x)$, og við setjum $g(y) := x$. Látum næst $y \in Y \setminus f[X]$; þá setjum við $g(y) := a$. Við höfum þá skilgreint g með tilfellum. Nú er ljóst að fyrir sérhvert x úr X er $g(f(x)) = x$. Þar með er $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(2) Gerum fyrst ráð fyrir að til sé vörpun $g : Y \to X$ þannig að $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ og sýnum að vörpunin f átæk. Látum því eitthvert stak y úr Y vera gefið. Setjum $x := g(y)$. Þá er

$$f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_Y(y) = y,$$

og við höfum sýnt að vörpunin f er átæk.

Gerum nú ráð fyrir að vörpunin g sé átæk. Það þýðir að fyrir sérhvert stak y úr Y er til stak x þannig að $f(x) = y$, eða með öðrum orðum þannig að $x \in f^{-1}[y]$; þetta þýðir að trefjan f^{-1} er ekki tóm fyrir sérhvert stak y úr Y. Samkvæmt frumsendunni um val er $\prod_{y \in Y} f^{-1}[y] \neq \varnothing$; og það þýðir að til er fjölskylda $(a_y)_{y \in Y}$ þannig að $a_y \in f^{-1}[y]$ fyrir sérhvert y úr Y. Skilgreinum nú vörpun $g : Y \to X$ með því að setja $g(y) := a_y$ fyrir sérhvert stak y úr Y. Þar sem $a_y \in f^{-1}[y]$ fæst $f(g(y)) = f(a_y) = y$ fyrir sérhvert y úr Y, og það þýðir einmitt að $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. $\square$

(4.10) Athugasemdir. (1) Forsendan $X \neq \varnothing$ í lið (1) í síðustu setningu er nauðsynleg: Ef $X = \varnothing$, þá er $f : X \to Y$ tóma vörpunin, og hún er eintæk, hvert svo sem mengið Y er; en ekki er þá til *nein* vörpun $g : Y \to X$, nema mengið Y sé líka tómt.

(2) Tökum eftir að við þurftum ekki á frumsendunni um val að halda til að sanna lið (1) í síðustu setningu. Hins vegar er *nauðsynlegt* að nota hana til að sanna lið (2) í setningunni; raunar er auðvelt að sjá að fullyrðingin í lið (2) er *jafngild* frumsendunni um val (að öðrum frumsendum mengjafræðinnar gefnum).

(3) Látum $f : X \to Y$ vera vörpun.

Vörpun $g : Y \to X$ þannig að $g \circ f = \mathrm{id}_X$ er kölluð ***vinstri andhverfa*** vörpunarinnar f. Liður (1) í síðustu setningu segir þá að fyrir $X \neq \varnothing$ sé vörpun $f : X \to Y$

eintæk þá og því aðeins að hún hafi vinstri andhverfu. Vinstri andhverfa þarf ekki að vera ákvörðuð ótvírætt.

Vörpun $g : Y \to X$ þannig að $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ er kölluð ***hægri andhverfa*** vörpunarinnar f. Liður (2) í síðustu setningu segir þá að vörpun $f : X \to Y$ sé átæk þá og því aðeins að hún hafi hægri andhverfu. Hægri andhverfan þarf ekki að vera ákvörðuð ótvírætt.

Nú sjáum við að vörpun $f : X \to Y$ er gagntæk þá og því aðeins að hún hafi bæði vinstri andhverfu og hægri andhverfu. Í því tilviki eru þessar vinstri og hægri andhverfur ákvarðaðar ótvírætt og eru sama vörpunin, nefnilega andhverfan f^{-1}.

§5. Venzl

Oft þurfum við að segja að tilteknir hlutir eða fyrirbæri standi í tilteknu sambandi við aðra hluti eða fyrirbæri, til dæmis „Jón er bróðir Sigurðar“ eða „Jón og Gunna eru hjón“. Í mengjafræði viljum við helzt koma því þannig fyrir að allt sem við tölum um séu mengi. Við útbúum því nokkuð sem kalla mætti „bræðravenzl“; það á að vera mengið B af öllum tvenndum (x, y) þannig að x sé bróðir y; í stað þess að segja að Jón sé bróðir Sigurðar getum við þá sagt að tvenndin $(\text{Jón}, \text{Sigurður})$ sé stak í menginu B. Eins getum við búið til „hjónavenzl“.

Við skilgreinum nú:

(5.1) Skilgreining. *Mengi af tvenndum kallast* ***venzl****; nánar tiltekið* ***tvístæð venzl****. Ef σ er venzl, þá skrifum við oftast*

$$x \, \sigma \, y$$

í stað $(x, y) \in \sigma$ og segjum að ***stakið*** *x* ***sé*** *σ****-venzlað stakinu*** *y. Ef A og B eru mengi, þá er sérhvert hlutmengi í mengjamargfeldinu $A \times B$ venzl; við segjum að slík venzl séu* ***venzl milli mengjanna*** *A* ***og*** *B eða* ***venzl frá menginu*** *A* ***til mengisins*** *B. Ef $B = A$, með öðrum orðum ef σ er hlutmengi í mengjamargfeldinu $A \times A$, þá segjum við að σ sé* ***(tvístæð) venzl á menginu*** *A.*

(5.2) Athugasemdir og dæmi. (1) Í skilgreiningu (5.1) notuðum við gríska bókstafinn „σ“ til að tákna einhver ótiltekin venzl, því að venjulega við notum bókstafi sem heiti þegar við erum að tala um einhverja ótiltekna hluti. Hins vegar er venja að tákna venzl með *sérstökum táknum*, til dæmis táknum á borð við

„$<$“, „$\leq$“, „$\sim$“, „$\div$“, „$\pitchfork$“, „$|$“, „$\|$“, „$\perp$“, „$\cong$“, „$\propto$“, „$\asymp$“, „$\bowtie$“, „$\circeq$“,

svo að örfá dæmi séu tekin.

(2) Við ætlum í þessari grein einkum að ræða um *tvístæð venzl á einhverju tilteknu mengi A*. Nefnum þó tvö dæmi um venzl frá einu mengi til annars: Í rúmfræði er gjarnan talað um að punktur liggi á línu eða ekki; ef P er mengi allra punkta og L er

mengi allra lína, þá fást venzl I frá P til L þannig að $p\,\mathrm{I}\,l$ þá og því aðeins að punkturinn p liggi á línunni l; slík venzl kallast ***leguvenzl***. Annað dæmi er ***varprit*** vörpunar $f : X \to Y$, sem er samkvæmt skilgreiningu mengið $\Gamma(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)$. Við höfum þá $(x, y) \in \Gamma(f)$ þá og því aðeins að $x \in X, y \in Y$ og $y = f(x)$.

(3) Nefnum einnig að almennar má skilgreina ***þrístæð*** venzl sem mengi af þrenndum, ***fjórstæð venzl*** sem mengi af ferndum o. s. frv. Sem dæmi um þrístæð venzl og fjórstæð venzl sem eru notuð í rúmfræði má annarsvegar nefna venzlin af öllum þrenndum (p, q, r) af punktum þannig að punkturinn q liggi milli punktanna p og r; hinsvegar venzlin af öllu ferndum (p, q, r, s) af punktum þannig að strikið frá p til q sé jafnlangt strikinu frá r til s. Tvístæð venzl eru hinsvegar miklu algengari.

Venzl geta haft ýmsa eiginleika, og sumir eru það mikilvægir að búin hafa verið til sérstök lýsingarorð til að lýsa þeim. Hér eru þau nokkur af þeim mikilvægstu:

(5.3) Skilgreining. *Látum σ vera venzl á mengi A.*

(1) *Við segjum að venzlin σ séu* ***spegilvirk*** *eða* ***sjálfhverf*** *(á menginu A) ef*

$$a\;\sigma\;a$$

fyrir sérhvert stak a úr menginu A.

(2) *Við segjum að venzlun σ séu* ***samhverf*** *ef fyrir öll stök a og b úr menginu A gildir að*

$$a\;\sigma\;b \quad \text{hefur í för með sér að} \quad b\;\sigma\;a.$$

(3) *Við segjum að venzlun σ séu* ***andsamhverf*** *ef fyrir öll stök a og b úr menginu A gildir að*

$$a\;\sigma\;b \quad \text{og} \quad b\;\sigma\;a \quad \text{hefur í för með sér að} \quad a = b.$$

(4) *Við segjum að venzlun σ séu* ***missamhverf*** *eða bara* ***mishverf*** *ef fyrir öll stök a og b úr menginu A gildir að*

$$a\;\sigma\;b \quad \text{hefur í för með sér að ekki gildir} \quad b\;\sigma\;a.$$

(5) *Við segjum að venzlun σ séu* ***gegnvirk*** *ef fyrir öll stök a, b og c úr menginu A gildir að*

$$a\;\sigma\;b \quad \text{og} \quad b\;\sigma\;a \quad \text{hefur í för með sér að} \quad a\;\sigma\;c.$$

Þótt til séu ótal gerðir venzla eru tvær þó langmikilvægastar, annarsvegar svokölluð *jafngildisvenzl*; hins vegar svokölluð *raðvenzl*, og það eru þau sem við ætlum að fjalla um í þessari grein. Hér á eftir notum við orðið „venzl“ einungis um tvístæð venzl á einhverju tiltöknu mengi A.

(5.4) Skilgreining. ***Jafngildisvenzl*** *á mengi A eru spegilvirk, samhverf og gegnvirk venzl á menginu A; með öðrum orðum venzl $\sim$ á A þannig að fyrir öll a, b, c úr A gildi:*

$$\begin{gathered} a \sim a; \\ \text{ef} \quad a \sim b, \quad \text{þá} \quad b \sim a; \\ \text{ef} \quad a \sim b \quad \text{og} \quad b \sim a, \quad \text{þá} \quad a \sim c. \end{gathered}$$

(5.5) Dæmi. (1) Látum A vera mengi og skilgreinum venzl $=_A$ á A með því að setja

$$a =_A b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad a \in A, \quad b \in A \quad \text{og} \quad a = b.$$

Þá er $=_A$ jafngildisvenzl á A, sem við getum kallað ***samsemdarvenzlin á menginu*** A. Sem hlutmengi í A eru þau ekkert annað en það sem kallað er ***hornalína*** mengisins A, en það er samkvæmt skilgreiningu mengið

$$\Delta_A := \{(a, a) : a \in A\}.$$

Samsemdarvenzlin eru *minnstu jafngildisvenzlin* á menginu A í þeim skilningi að sem hlutmengi í $A \times A$ eru þau innihaldin í sérhverjum öðrum jafngildisvenzlum á A. Raunar er ljóst að venzl eru spegilvirk þá og því aðeins að þau innihaldi hornalínuna (þegar við lítum á þau sem hlutmengi í $A \times A$), svo að samsemdarvenzlin eru líka minnstu spegilvirku venzlin á menginu A.

(2) Látum $f : A \to B$ vera vörpun og skilgreinum venzl $\sim_f$ á menginu A með því að setja

$$a \sim_f b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad f(a) = f(b).$$

Þá er auðséð að venzlin $\sim_f$ eru jafngildisvenzl á menginu A, sem við segjum að séu ***jafngildisvenzlin sem vörpunin*** f ***gefur af sér***.

(5.6) Skilgreining. *Látum $\sim$ vera jafngildisvenzl á mengi A. Fyrir sérhvert stak a úr A setjum við*

$$[a]_\sim := \{x \in A : x \sim a\}$$

og köllum mengið $[a]_\sim$ ***jafngildisflokk staksins*** a ***með tilliti til jafngildisvenzlanna*** $\sim$. *Við táknum með*

$$A/{\sim} := \{[a]_\sim : a \in A\}$$

mengi allra jafngildisflokka staka úr menginu A og köllum vörpunina

$$\pi : A \to A/{\sim}$$

sem fæst með því að setja

$$\pi(a) := [a]_\sim$$

fyrir sérhvert a úr A ***náttúrlega ofanvarpið*** *frá A á mengið $A/{\sim}$.*

(5.7) Athugasemd. Enginn samræmdur ritháttur er til fyrir jafngildisflokk staks a með tilliti til einhverra gefinna jafngildisvenzla. Við skrifum oft „$[a]$“ í stað „$[a]_\sim$“, ef ljóst er af samhenginu hver jafngildisvenzlin eru sem um er að ræða.

(5.8) Setning. *Látum $\sim$ vera jafngildisvenzl á mengi A og látum $[a]$ vera jafngildisflokk staksina A úr menginu A.*

(1) *Fyrir sérhvert stak a úr A er*

$$a \in [a].$$

(2) *Fyrir öll stök a, b gildir*

$$a \sim b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad [a] = [b].$$

(3) *Ef tveir jafngildisflokkanna hafa sama stak, þá eru þeir sami jafngildisflokkurinn; með ððrum orðum gildir fyrir öll stök a og b úr A:*

$$\textit{Ef} \quad [a] \cap [b] \neq \varnothing, \quad \textit{þá er} \quad [a] = [b].$$

Sönnun: Liður (1) er augljós, því að $a \in [a]$ þýðir að $a \sim a$, og venzlin $\sim$ eru spegilvirk.

(2) Látum a, b vera stök í A. Ef $[a] = [b]$, þá er $a \in [b]$ og því $a \sim b$. Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að $a \sim b$. Þá er einnig $b \sim a$, af því að venzlin $\sim$ eru samhverf. Látum nú $x \in [a]$. Þá er $x \sim a$ og $a \sim b$, og vegna gegnvirkni venzlanna $\sim$ er $x \sim b$, svo að $x \in [b]$. Eins ef $x \in [b]$, þá er $x \sim b$ og $b \sim a$ og því $x \sim a$, svo að $x \in [a]$. Þar með er $[a] = [b]$.

(3) Gerum ráð fyrir að sniðmengið $[a] \cap [b]$ sé ekki tómt. Þá hefur það stak c, og við höfum bæði $c \sim a$ og $c \sim b$. En af $c \sim a$ leiðir $a \sim c$, svo að við höfum bæði $a \sim c$ og $c \sim b$ og þar með einnig $a \sim b$. En þá er $[a] = [b]$ samkvæmt lið (2). $\square$

(5.9) Athugasemd. Látum $\sim$ vera jafngildisvenzl á mengi A og $\pi : A \to A/\!\sim, a \mapsto [a]$ vera náttúrlega ofanvarpið. Liður (2) í setningu (5.8) segir þá að $a \sim b$ þá og því aðeins að $\pi(a) = \pi(b)$. Það þýðir að venzlin $\sim$ eru einmitt jafngildisvenzlin $\sim_\pi$ sem vörpunin π gefur af sér. Þar með eru *öll* jafngildisvenzl fengin eins og í dæmi (2) í (5.5).

(5.10) Skilgreining. ***Deildaskipting*** *mengis A er mengi $\mathcal{D}$ af hlutmengjum í A, sem kallast* ***deildir*** *deildaskiptingarinnar, þannig aö eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Engin deildanna er tóm; með öðrum orðum er $X \neq \varnothing$ fyrir öll X úr $\mathcal{D}$.*
(ii) *Ef $X, Y \in \mathcal{D}$ og $X \neq Y$, þá er $X \cap Y = \varnothing$.*
(iii) *Við höfum $A = \bigcup\{X : X \in \mathcal{D}\}$; með öðrum orðum er sérhvert stak í A innihaldið í einhverri deild deildaskiptingarinnar $\mathcal{D}$.*

Við segjum þá einnig að mengið $\mathcal{D}$ sé ***deildamengi*** *mengisins A.*

Við höfum nú:

(5.11) Setning. *Látum $\sim$ vera jafngildisvenzl á menginu A. Þá er mengið $A/\!\sim$ af jafngildisflokkunum deildamengi mengisins A. Ef á hinn bóginn $\mathcal{D}$ er deildamengi mengisins A, þá eru til nákvæmlega ein jafngildisvenzl $\sim$ á menginu A þannig að $\mathcal{D} = A/\!\sim$. Þannig fæst gagntæk samsvörun milli jafngildisvenzla á menginu A og deildaskiptinga mengisins A.*

Sönnun: Fyrri fullyrðingin er bein afleiðing af setningu (5.8). Ef á hinn bóginn $\mathcal{D}$ er deildaskipting mengisins A, þá má skilgreina jafngildisvenzl $\sim$ á menginu A með því að segja að $a \sim b$ þá og því aðeins að a og b séu í sömu deild; með öðrum orðum skilgreinum við

$$a \sim b \quad \text{þá og því aðeins að til sé } X \text{ úr } \mathcal{D} \text{ þannig að} \quad a \in X \quad \text{og} \quad b \in X.$$

Þá er augljóst að $A/\!\sim\, = \mathcal{D}$ og að venzlin $\sim$ eru einu jafngildisvenzlin á A sem hafa þann eiginleika. $\square$

(5.12) Skilgreining. *Venzl $\leq$ á mengi A kallast* **raðvenzl** *(eða einfaldlega* **röðun***) á menginu A ef þau eru spegilvirk, andsamhverf og gegnvirk; með öðrum orðum ef þau fullnægja eftirfarandi skilyrðum fyrir öll stök a, b, c úr menginu A:*

$$\begin{array}{lllll} & & a \leq a, & & \\ \text{ef} \quad a \leq b & \text{og} & b \leq a, & \text{þá er} & a = b; \\ \text{ef} \quad a \leq b & \text{og} & b \leq c, & \text{þá er} & a \leq c. \end{array}$$

Ef $\leq$ er röðun á menginu A og a, b eru stök í A þannig að $a \leq b$, þá segjum við að stakið a sé **minna eða jafnt stakinu** *b og jafnframt að stakið b sé* **stærra eða jafnt stakinu** *a með tilliti til röðunarinnar $\leq$.*

Raðað mengi *eða* ***raðmengi*** *er tvennd $(A, \leq)$, þar sem A er mengi og $\leq$ er röðun á menginu A.*

Í beinu framhaldi skilgreinum við:

(5.13) Skilgreining. *Látum $\leq$ vera röðun á mengi A.*

(1) *Við segjum að stök a og b úr menginu A séu* **sambærileg** *ef annaðhvor $a \leq b$ eða $b \leq a$.*

(2) *Við segjum að röðunin $\leq$ sé* **línuleg** *ef sérhver tvö stök í menginu A eru sambærileg.* **Línulega raðað mengi** *er raðað mengi þannig að röðun þess sé línuleg.*

(5.14) Viðvörun. Það sem hér (og víða annarsstaðar) er kallað *röðun* kalla sumir höfundar *hlutröðun*, og þeir sömu nota þá gjarnan orðið *röðun* um það sem hér er kallað *línuleg röðun*.

(5.15) Dæmi. (1) Við gerum ráð fyrir að lesandinn kannist við *venjulegu röðunina á mengi allra rauntalna*; hún er línuleg. Við getum notað hana til að búa til dæmi um ýmis önnur raðvenzl. Til dæmis getum við skilgreint raðvenzl $\leq_1$ á mengjamargfeldinu $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ með því að setja

$$(x, y) \leq_1 (u, v) \quad \text{þá og því aðeins að} \quad x \leq u \quad \text{og} \quad y \leq v.$$

Þessi venzl eru *ekki* línuleg: Stökin $(0, 1)$ og $(1, 0)$ eru ekki sambærileg í þessari röðun. Við getum einnig skilgreint önnur raðvenzl $\leq_2$ á $\mathbb{R}^2$ með því að setja

$$(x, y) \leq_2 (u, v) \quad \text{þá og því aðeins að} \quad x < u \quad \text{eða} \quad (x = u \quad \text{og} \quad y \leq v).$$

Þessi raðvenzl, sem við gætum kallað „stafrófsröðina“ á $\mathbb{R}^2$, eru línuleg.

(2) Látum X vera mengi og táknum með $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ mengi allra raunfalla $f : X \to \mathbb{R}$. Við getum skilgreint röðun á $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ með því að setja

$$f \leq g \quad \text{þá og því aðeins að} \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{fyrir öll } x \text{ úr } X.$$

Þessi röðun er ekki línuleg ef mengið X hefur fleiri stök en eitt.

(3) Látum C vera mengi af mengjum. Við fáum þá raðvenzl $\subset_{\mathcal{C}}$ á $\mathcal{C}$ með því að setja

$$X \subset_{\mathcal{C}} Y \quad \text{þá og því aðeins að} \quad X, Y \in \mathcal{C} \quad \text{og} \quad X \subset Y.$$

Við getum kallað þessi venzl ***hlutmengjavenzlin á menginu*** $\mathcal{C}$. Við leyfum okkur að skrifa einfaldlega „$X \subset Y$“ í stað „$X \subset_{\mathcal{C}} Y$“ ef ljóst er af samhenginu hvaða mengi $\mathcal{C}$ við erum að tala um. Hlutmengjavenxlin á menginu $\mathcal{C}$ eru venjulega ekki línuleg.

Sér í lagi ef X er etthvert mengi, þá getum við talað um hlutmengjavenzlin á menginu $\mathcal{P}(X)$ af öllum hlutmengjum í menginu X. Ef X hefur að minnsta kosti tvö ólík stök, til dæmis stökin x og y þannig að $x \neq y$, þá eru hlutmengjavenzlin á $\mathcal{P}(X)$ ekki línuleg, því að mengin $\{x\}$ og $\{y\}$ eru þá ekki sambærileg með tilliti til hlutmengjavenzlanna: Hvorugt er hlutmengi í hinu.

[Það er freistandi að segja að hlutmengjavenzlin séu raðvenzl á mengi allra mengja, en það getum við ekki gert, því að ekki er til neitt mengi sem inniheldur öll mengi sem stök. Þess vegna verðum við að láta okkur nægja að athuga þau á einhverju fyrirfram gefnu mengi af mengjum.]

(5.16) Skilgreining. ***Ströng raðvenzl*** *(eðe einfaldlega* ***ströng röðun****) á mengi A eru missamhverf og gegnvirk venzl á menginu A; með öðrum orðum venzl $<$ á A þannig að fyrir öll stök a, b, c úr menginu A gildi*

$$\begin{aligned} &\text{ef} \quad a < b, \quad \text{þá er ekki} \quad b < a; \\ &\text{ef} \quad a < b \quad \text{og} \quad b < c, \quad \text{þá er} \quad a < c. \end{aligned}$$

Ef $\leq$ er röðun á menginu A og a, b eru stök í A þannig að $a < b$, þá segjum við að stakið a sé ***minna en stakið*** *b og jafnframt að stakið b sé* ***stærra en stakið*** *a með tilliti til ströngu röðunarinnar $<$.*

Ströng röðun er í vissum skilningi aðeins önnur útgáfa á röðun. Það má segja að þær séu tvær hliðar á sama peningnum. Það er innihaldið í næstu setningu:

(5.17) Setning. *Fyrir sérhverja röðun $\leq$ á mengi A fæst ströng röðun $<$ á menginu A með því að setja*

$$a < b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad a \leq b \quad \text{og} \quad a \neq b.$$

Fyrir sérhverja stranga röðun $<$ á mengi A fæst röðun $\leq$ á menginu A með því að setja

$$a \leq b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad a < b \quad \text{eða} \quad a \neq b.$$

Ef við byrjum með röðun á mengi A, myndum samsvarandi stranga röðun og úr henni samsvarandi röðun, þá fáum við aftur upphaflegu röðunina. Eins ef við byrjum með stranga röðun á mengi A, myndum samsvarandi röðun og úr henni samsvarandi stranga röðun, þá fáum við aftur upphaflegu ströngu röðunina. Þannig fæst gagntæk samsvörun milli raðana og strangra raðana á sérhverju gefnu mengi A.

Sönnun: Þetta er næsta augljóst og nákvæm sönnun því eftirlátin lesanda. □

(5.18) Skilgreining. *Látum σ vera tvístæð venzl á mengi A og skilgreinum vensl τ á A með því að setja*

$$a \,\tau\, b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad b \,\sigma\, a.$$

Við köllum τ ***öfugu venzlin við venzlin*** *σ.*

Eftirfarandi er augljóst:

(5.19) Setning. *Látum A vera mengi. Öfugu venzlin við raðvenzl á menginu A eru einnig raðvenzl á menginu A. Öfugu venzlin við ströng raðvenzl á menginu A eru einnig ströng raðvenzl á menginu A.*

(5.20) Athugasemdir. (1) Öfugu venzlin við tvístæð venzl σ eru gjarnan táknuð með σ^{-1}, ef verið er að skrifa um venzl almennt og bókstafir (breytur) notaðar sem heiti venzlanna. En ef venzlin eru gefin með sérstökum táknum, eins og til dæmis „$\leq$“, þá eru öfugu venzlin oft gefin til kynna með tákni sem er spegilmynd táknsins fyrir upphaflegu venzlin. Ef við til dæmis höfum gefin raðvenzl $\leq$, þá er táknið „$\geq$“ yfirleitt notað fyrir öfugu raðvenzlin, og við skrifum

$$b \geq a \quad \text{þá og því aðeins að} \quad a \leq b.$$

Eins ef $<$ eru ströng raðvenzl, þá skrifum við

$$b > a \quad \text{þá og því aðeins að} \quad a < b.$$

Sérhver raðvenzl $\leq$ gefa af sér þrenn önnur venzl: Öfugu raðvenzlin $\geq$, ströngu raðvenzlin $<$ og öfugu ströngu raðvenzlin $>$. Það nægir okkur að þekkja ein af þessum fernum venzlum, og þá þekkjum við um leið hin þrjú.

(2) Mengi A sem er hvorki tómt né einstökungur hefur alltaf fleiri en eina röðun. Við gerum A að röðuðu mengi með því að velja eina þeirra og getum þá sagt að raðað mengi sé mengi A *ásamt* tiltekinni röðun $\leq$ á menginu A; þetta gefum við til kynna með því að skilgreina raðað mengi sem *tvenndina* $(A, \leq)$. Það er svo hins vegar alsiða í stærðfræði að nota lauslegt orðalag þegar rætt er um slíka hluti. Í stað þess að segja „látum $(A, \leq)$ vera raðað mengi“ er til dæmis miklu oftar sagt „látum A vera raðað mengi með röðun $\leq$“, og jafnvel er því alveg sleppt nefna röðunina og segja bara „látum A vera raðað mengi“. Venjan er þá að nota táknið „$\leq$“ fyrir röðunina, hver svo sem hún er, nema einhver sérstök ástæða sé til annars, og þá er yfirleitt þegjandi samkomulag um að við getum notað samsvarandi stranga röðun $<$, öfugu röðununa $\geq$ og öfugu ströngu röðunina $>$ án þess að gera grein fyrir því sérstaklega.

(5.21) Skilgreining. *Gerum ráð fyrir að A sé raðað mengi með röðun $\leq_A$ og samsvarandi strangri röðun $<_A$ og að B sé raðað mengi með röðun $\leq_B$ og samsvarandi strangri röðun $<_B$. Við segjum að vörpun $f : A \to B$ sé*

(i) ***vaxandi*** *ef $a_1 \leq_A a_2$ hefur í för með sér $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ fyrir öll stök a_1, a_2 úr A;*
(ii) ***stranglega vaxandi*** *ef $a_1 <_A a_2$ hefur í för með sér $f(a_1) <_B f(a_2)$ fyrir öll stök a_1, a_2 úr A;*
(iii) ***fallandi*** *ef $a_1 \leq_A a_2$ hefur í för með sér $f(a_1) \geq_B f(a_2)$ fyrir öll stök a_1, a_2 úr A;*
(iv) ***stranglega fallandi*** *ef $a_1 <_A a_2$ hefur í för með sér $f(a_1) >_B f(a_2)$ fyrir öll stök a_1, a_2 úr A.*

Við segjum einnig að vörpunin f sé ***einhalla*** *ef hún er annaðhvort vaxandi eða fallandi, og við segjum að hún sé* ***stranglega einhalla*** *ef hún er annaðhvort stranglega vaxandi eða stranglega fallandi.*

Við segjum að vörpun $f : A \to B$ sé ***einsmótun raðaðra mengja*** *ef hún er vaxandi og gagntæk og andhverfa hennar er einnig vaxandi, og við segjum að röðuðu mengi A og B séu* ***einsmóta (sem röðuð mengi)*** *ef til er einsmótun raðaðra mengja $f : A \to B$.*

(5.22) Athugasemdir og dæmi. (1) Stundum eru orðin „***hækkandi***“ eða „***stækkandi***“ notuð í stað orðsins „vaxandi“, og eins eru orðin „***lækkandi***“ eða „***minnkandi***“ notuð í stað orðsins „fallandi“.

(2) Föst vörpun $f : A \to B$ milli raðaðra mengja er bæði vaxandi og fallandi, en ef til eru stök a_1 og a_2 úr menginu A þannig að $a_1 < a_2$, þá er hún hvorki stranglega vaxandi né stranglega fallandi.

(3) Látum X vera mengi og látum veldismengið $\mathcal{P}(X)$ hafa hlutmengjaröðunina. Vörpunin $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), Y \mapsto X \setminus Y$ er stranglega fallandi.

(4) Látum A og B vera röðuð mengi og $f : A \to B$ vera *eintæka* og vaxandi vörpun. Þá er f *stranglega* vaxandi: Látum $a_1, a_2 \in A$ vera þannig að $a_1 < a_2$ eða með öðrum orðum þannig að $a_1 \leq a_2$ og $a_1 \neq a_2$. Þar sem vörpunin f er vaxandi er $f(a_1) \leq f(a_2)$, og þar sem hún er eintæk er $f(a_1) \neq f(a_2)$, og þar með er $f(a_1) < f(a_2)$. Af þessu leiðir svo: Ef $f : A \to B$ er einsmótun raðaðra mengja, með öðrum orðum gagntæk vörpun þannig að bæði f og andhverfan f^{-1} séu vaxandi, þá eru varpanirnar f og f^{-1} báðar *stranglega* vaxandi.

(5) Á hinn bóginn þarf stanglega vaxandi vörpun alls ekki að vera eintæk, því að hún getur hugsanlega varpað ósambærilegum stökum á sama stakið. Látum til dæmis $A := \mathcal{P}(\{a, b\})$, þar sem a, b eru einhver ólík stök, gefum A hlutmengjaröðunina og skilgreinum vörpun $f : A \to A$ með því að setja $f(\varnothing) := \varnothing$, $f(\{a\}) := f(\{b\}) := \{a\}$ og $f(\{a, b\}) := \{a, b\}$. Þá er vörpunin f stranglega vaxandi, en ekki eintæk.

Ef hins vegar A er *línulega* raðað mengi og $f : A \to B$ er stranglega vaxandi vörpun frá A í raðað mengi B, þá er f eintæk vörpun: Fyrir $a_1, a_2 \in A$ þannig að $a_1 \neq a_2$ er annaðhvort $a_1 < a_2$ eða $a_2 < a_1$ og því annaðhvort $f(a_1) < f(a_2)$ eða $f(a_2) < f(a_1)$, og í báðum tilvikum er $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(5.23) Setning. *Sérhvert raðað mengi er einsmóta (sem raðað mengi) mengi af mengjum sem er raðað með hlutmengjavenzlunum.*

Sönnun: Látum A vera raðað mengi. Fyrir stak a úr A setjum við

$$f(a) := \{x \in A : x \leq a\}$$

og síðan

$$\mathcal{C} := \{f(a) : x \leq a\}.$$

Mengið $\mathcal{C}$ er hlutmengi í veldismenginu $\mathcal{P}(A)$ og við röðum því með hlutmengjavenzlunum. Við fáum nú vörpun

$$f : A \to \mathcal{C}, a \mapsto f(a),$$

sem er augljóslega átæk. Sýnum að hún sé eintæk: Vegna $a \leq a$ er $a \in f(a)$ fyrir sérhvert a í A. Ef nú $a_1, a_2 \in A$ og $f(a_1) = f(a_2)$, þá fæst $a_1 \in f(a_2)$ og $a_2 \in f(a_1)$; en það þýðir að $a_1 \leq a_2$ og $a_2 \leq a_1$ og því $a_1 = a_2$. Við höfum þá sýnt að vörpunin f er gagntæk.

Látum $a_1, a_2 \in A$ og gerum ráð fyrir að $a_1 \leq a_2$ Fyrir sérhvert x úr $f(a_1)$ er $x \leq a_1$ og vegna $a_1 \leq a_2$ er þá $x \leq a_2$, svo að $x \in f(a_2)$. Það þýðir að $f(a_1) \subset f(a_1)$, og við höfum sýnt að vörpunin f er vaxandi. Ef á hinn bóginn $f(a_1) \subset f(a_1)$, þá fæst $a_1 \in f(a_2)$, sem aftur þýðir að $a_1 \leq a_2$; og þetta sýnir að andhverfan f^{-1} er vaxandi. Þar með er f einsmótun raðaðra mengja. $\square$

(5.24) Skilgreining. *Stak a í röðuðu mengi A kallast **hástak** í A eða **óstækkanlegt stak** í A ef ekki er til neitt stærra stak í A; með öðrum orðum ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt:*

$$\text{Ef } x \in A \text{ og } a \leq x, \text{ þá er } x = a.$$

*Stak b í röðuðu mengi A kallast **lágstak** í A eða **óminnkanlegt stak** í A ef ekki er til neitt minna stak í A; með öðrum orðum ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt:*

$$\text{Ef } x \in A \text{ og } x \leq b, \text{ þá er } x = b.$$

(5.25) Athugasemd. Raðað mengi þarf hvorki að hafa hástak né lágstak. En einnig getur raðað mengi haft mörg hástök eða mörg lágstök. Látum til dæmis X vera mengi með nákvæmlega þremur stökum, $X = \{a, b, c\}$, þar sem $a \neq b$, $a \neq c$ og $b \neq c$, og látum A vera mengi allra eiginlegra hlutmengja í X sem eru ekki tóm, raðað með hlutmengjavenzlunum. Mengið A hefur sex stök. Þrjú þeirra, mengin $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ og $\{b, c\}$, eru hástök, en hin þrjú, mengin $\{a\}$, $\{b\}$ og $\{c\}$, eru lágstök. Tökum eftir að þessi röðun er ekki línuleg.

(5.26) Skilgreining. *Stak a í röðuðu mengi A kallast **hæsta stak** (eða **stærsta stak**, eða **efsta stak**) í menginu A ef $x \leq a$ fyrir sérhvert stak x í A.*

*Stak b í röðuðu mengi A kallast **neðsta stak** (eða **minnsta stak**, eða **lægsta stak**) í menginu A ef $a \leq x$ fyrir sérhvert stak x í A.*

(5.27) Athugasemd. Raðað mengi þarf ekki að hafa neitt hæsta stak. En hafi það hæsta stak, þá er hæsta stakið aðeins eitt: Ef a_1 og a_2 eru hæstu stök í menginu A, þá er $a_1 \leq a_2$ og $a_2 \leq a_1$ og því $a_1 = a_2$. Eins getur raðað mengi í mesta lagi haft eitt neðsta stak. Við getum því skilgreint:

(5.28) Skilgreining. *Látum A vera raðað mengi. Ef mengið A hefur hæsta stak, þá er þetta hæsta stak táknað með*

$$\max A.$$

Ef mengið A hefur neðsta stak, þá er þetta neðsta stak táknað með

$$\min A.$$

(5.29) Athugasemdir. (1) Ef raðað mengi A hefur hæsta stak, þá er það augljóslega hástak í A og jafnframt *eina* hástakið í A: Látum a vera hæsta stak í A. Þá er $x \leq a$ fyrir sérhvert stak x í A. Ef nú x er hástak, þá fæst $x = a$. Eins sést að lægsta stak í A, ef til er, er lágstak og eina lágstakið í A.

(2) Ef A er *línulega* raðað mengi sem hefur hástak a, þá er a hæsta stak í A: Fyrir sérhvert stak a í A er $x \leq a$ eða $a \leq x$, af því að röðunin er línuleg. En þar sem a er hástak leiðir $a \leq x$ af sér $a = x$, svo að $x \leq a$ fyrir sérhvert stak x í A.

Gerum ráð fyrir að B sé hlutmengi í röðuðu mengi A. Röðunin á menginu A gefur af sér röðun á B með því að einskorða hana við stökin í B. Nánar tiltekið fáum við röðun $\leq_B$ á menginu B úr röðuninni $\leq$ á menginu A með því að láta $a \leq_B b$ gilda þá og því aðeins að $a \in B$, $b \in B$ og $a \leq b$. Venjulega skrifum við einfaldlega „$\leq$“ í stað „$\leq_B$“, nema einhver sérstök ástæða sér til annars. Við getum þá talað um hástök, hæsta stak, lágstök og lægsta stak í menginu B, ef þau eru fyrir hendi, með því að líta á B sjálft sem raðað mengi með tilliti til þessarar röðunar.

(5.30) Setning. (1) *Látum A vera endanlegt raðað mengi sem er ekki tómt. Þá hefur A bæði hástak og lágstak.*

(2) *Látum A vera endanlegt línulega raðað mengi með fjöldatölu n. Þá er til nákvæmlega ein upptalning $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ á menginu A þannig að $a_i < a_{i+1}$ fyrir öll $i = 1, \ldots, n-1$.*

Sönnun: (1) Gerum ráð fyrir að raðaða mengið A sé ekki tómt og hafi ekkert hástak. Þá má fyrir sérhvert stak í A finna stærra stak í A. Búum þá til vörpun $f : \mathbb{N} \to A$ með þrepun þannig: Veljum eitt stak úr menginu A af handahófi og köllum það $f(0)$. Gerum þá ráð fyrir að stökin $f(0), \ldots, f(n)$ hafi þegar verið búin til þannig að $f(0) < f(1) < \cdots < f(n)$. Þar sem $f(n)$ getur ekki verið hástak er til stærra stak í A; veljum eitt þeirra, köllum það $f(n+1)$ og höfum þá $f(0) < f(1) < \cdots < f(n) < f(n+1)$. Þannig fæst vörpun $f : \mathbb{N} \to A$ þannig að $f(j) < f(k)$ hvenær sem j, k eru úr $\mathbb{N}$ og $j < k$. En af því leiðir að vörpunin f er eintæk og þar með að mengið A er óendanlegt í mótsögn við forsendu. Því hlýtur A að hafa hástak.

Hliðstæð röksemdafærsta sýnir að A hljóti að hafa lágstak.

(2) Sönnum fullyrðinguna með þrepun yfir fjöldatölu menginsins A Ef A er tóma mengið, þá er tóma fjölskyldan upptalning sem fullnægrir skilyrðinu í skilgreiningunni. Gerum því ráð fyrir að fullyrðingin sé rétt ef fjöldatala mengisins sé gefin tala n úr $\mathbb{N}$ og látum A vera mengi með fjöldatölu $n + 1$. Samkvæmt lið (1) hefur A hástak. Þar sem röðunin er línuleg er það *hæsta stak* í menginu A; köllum þetta hæsta stak b. Þá er $A \setminus \{b\}$ endanlegt mengi með fjöldatölu n, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er til upptalning $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ á menginu $A \setminus \{b\}$ þannig að $a_i < a_{i+1}$ fyrir öll $i = 1, \ldots, n-1$. Setjum svo $a_{n+1} := b$ og höfum þá fengið upptalningu $(a_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ á menginu A þannig að $a_i < a_{i+1}$ fyrir öll $i = 1, \ldots, n$. □

Næstu hugtök sem við skilgreinum eru hins vegar „afstæð“ í þeim skilningin að þau eiga aðeins við hlutmengi í gefnu röðuðu mengi:

(5.31) Skilgreining. *Látum A vera raðað mengi og B vera hlutmengi í menginu A.*

(1) *Stak a í menginu A kallast* ***yfirstak*** *hlutmengisins B ef $b \leq a$ fyrir sérhvert stak b úr menginu B. Við segjum að hlutmengið B sé* ***takmarkað að ofan (í menginu A)*** *ef til er yfirstak fyrir mengið B í menginu A.*

(2) *Stak a í menginu A kallast* ***undirstak*** *hlutmengisins B ef $a \leq b$ fyrir sérhvert stak b úr menginu B. Við segjum að hlutmengið B sé* ***takmarkað að neðan (í menginu A)*** *ef til er yfirstak fyrir mengið B í menginu A.*

(3) *Við segjum að hlutmengið B sé* ***takmarkað (í menginu A)*** *ef það er bæði takmarkað að ofan í A og takmarkað að neðan í A.*

(5.32) Skilgreining. *Látum A vera raðað mengi og B vera hlutmengi í menginu A.*

(1) *Stak a í menginu A er kallað* **efra mark** *hlutmengisins B (í menginu A) ef það er lægsta stakið í mengi allra yfirstaka mengisins B. Efra markið, ef til er, er táknað með*

$$\sup_A B \quad \textit{eða einfaldlega} \quad \sup A.$$

(2) *Stak a í menginu A er kallað* **neðra mark** *hlutmengisins B (í menginu A) ef það er hæsta stakið í mengi allra undirstaka mengisins B. Neðra markið, ef til er, er táknað með*

$$\inf_A B \quad \textit{eða einfaldlega} \quad \inf A.$$

(5.33) Athugasemdir. (1) Hlutmengi í röðuðu mengi þarf ekki að hafa neitt efra mark; en ef efra markið er á annað borð til, þá ákvarðast það ótvírætt. Sama gildir um neðra mark.

(2) Að stak a úr röðuðu mengi A sé efra mark hlutmengis B í A þýðir að a fullnægir eftirfarandi tveimur skilyrðum:

(i) Fyrir sérhvert stak b úr B er $b \leq a$.
(ii) Ef $c \in A$ og $b \leq c$ fyrir sérhvert stak b úr B, þá er $a \leq c$.

Fyrra skilyrðið segir að a sé yfirstak mengisins B, og seinna skilyrðið að a sé minna eða jafnt öllum yfirstökum mengisins B. Þetta eru þau tvö skilyrði sem þarf að ganga úr skugga um ef við viljum sýna að eitthvert tiltekið stak a sé efra mark mengisins B.

Hliðstæð skilyrði fást fyrir neðra mark hlutmengis.

(3) Hlutmengi í röðuðu mengi getur ekki haft efra mark nema það sé takmarkað að ofan; en það dugar ekki til, því að mengi sem er takmarkað að ofan þarf ekki nauðsynlega að hafa efra mark. Eins getur hlutmengi í röðuðu mengi ekki haft neðra mark nema það sé takmarkað að neðan; en mengi sem er takmarkað að neðan þarf ekki nauðsynlega að hafa neðra mark.

(4) Gerum ráð fyrir að a sé efra mark hlutmengis B í röðuðu mengi A. Þá getur hvort tveggja gerzt að a sé stak í B eða ekki. Ef $a \in B$, þá er a nauðsynlega hæsta stak í menginu B; með öðrum orðum er þá $a = \max B$. Og á hinn bóginn gildir: Ef B hefur hæsta stak, þá er það jafnframt efra mark menginsins B. Hins vegar getur B haft efra mark án þess að hafa hæsta stak, nefnilega ef $\sup B \notin B$.

(5) Sérhvert stak í röðuðu mengi A er yfirstak tóma mengisins $\varnothing$. Þar með er ljóst að $\varnothing$ hefur efra mark í menginu A þá og því aðeins að A hafi lægsta stak, og þá er $\sup_A \varnothing = \min A$. Eins hefur tóma mengið $\varnothing$ neðra mark í menginu A þá og því aðeins að A hefi hæsta stak, og þá er $\inf_A \varnothing = \max A$.

(4) Ef A er raðað mengi og $(a_i)_{i \in I}$ er fjölskylda af stökum í menginu A, þá skrifum við oft

$$\max_{i \in I} a_i, \quad \min_{i \in I} a_i, \quad \sup_{i \in I} a_i, \quad \inf_{i \in I} a_i$$

í stað $\max\{a_i : i \in I\}$, $\min\{a_i : i \in I\}$, $\sup\{a_i : i \in I\}$, $\inf\{a_i : i \in I\}$.

(5) Skammstafanirnar „max“, „min“, „sup“ og „inf“ standa fyrir latnesku heitin „maximum“, „minimum“, „supremum“ og „infimum“, og latnesku heitin eru gjarnan notuð þegar lesið er úr skammstöfununum.

Gerum ráð fyrir að mengið $\{x, y\}$ sé hlutmengi í röðuðu mengi A. Ef stökin x og y eru sambærileg, þá hefur mengið $\{x, y\}$ bæði hæsta og lægsta stak, og við höfum $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$ og $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$. Ef stökin x og y eru ekki sambærileg, þá hefur mengið $\{x, y\}$ hvorki hæsta stak né lægsta stak, en það gæti hugsanlega haft efra mark í menginu A eða neðra mark í menginu A (eða hvort tveggja).

(5.34) Dæmi.. (1) Látum X vera mengi og $\mathcal{P}(X)$ vera veldismengi þess, raðað með hlutmengjavenzlunum. Stök A, B í $\mathcal{P}(X)$ þurfa ekki að vera sambærileg, en hlutmengið $\{A, B\}$ hefur bæði efra mark og neðra mark, nefnilega

$$\sup\{A, B\} = A \cup B \quad \text{og} \quad \inf\{A, B\} = A \cap B.$$

(2) Látum X vera mengi og $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ vera mengi allra raunfalla $f : X \to \mathbb{R}$ með röðuninni sem lýst var í dæmi (2) í (5.15). Stök f, g þurfa ekki að vera sambærileg, en mengið $\{f, g\}$ hefur ávallt efra mark og neðra mark: Við höfum $\sup\{f, g\} = f \vee g$ og $\inf\{f, g\} = f \wedge g$, þar sem föllin $f \vee g$ og $f \wedge g$ eru skilgreind með því að setja

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{og} \quad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

fyrir sérhvert stak x úr menginu X.

Stundum koma upp dæmi um venzl sem eru dálítið almennari en raðvenzl í þeim skilningi að þau fullnægja ekki skilyrðinu um andsamhverfni. Í margskonar samanburði sem kemur upp í daglegu lífi er þessu skilyrði alls ekki fullnægt: Við getum borið fólk saman með tilliti til ýmissa eiginleika, til dæmis hæðar eða skemmtilegheita, og það er ekkert því til fyrirstöðu að menn geti verið jafnháir (að minnsta kosti eftir þeirri nákvæmni sem mælitæki leyfa) eða jafnskemmtilegir án þess að vera sami maðurinn.

(5.35) Skilgreining. ***Forröðun*** *á mengi A er venzl $\sqsubseteq$ á menginu A sem eru spegilvirk og gegnvirk; með öðrum orðum ef þau fullnægja eftirfarandi skilyrðum fyri öll stök a, b, c úr menginu A:*

$$\begin{gathered} a \sqsubseteq a, \\ \textit{ef} \quad a \sqsubseteq b \quad \textit{og} \quad b \sqsubseteq c, \quad \textit{þá er} \quad a \sqsubseteq c. \end{gathered}$$

(5.36) Dæmi. Við skilgreinum venzl $|$ á mengi heilla talna $\mathbb{Z}$ þannig að $a \mid b$ þá og því aðeins að til sé tala c úr $\mathbb{Z}$ þannig að $b = ac$; við segjum þá að talan a ***gangi upp*** í tölunni b. Ljóst er að þessi venzl eru forröðun á menginu $\mathbb{Z}$. En þau eru ekki röðun: Af $a \mid b$ og $b \mid a$ getum við ekki dregið þá ályktun að $a = b$, heldur einungis að annaðhvort sé $a = b$ eða $a = -b$.

(5.37) Setning. *Látum $\sqsubseteq$ vera forröðun á mengi A og skilgreinum venzl $\sim$ á menginu A með því að setja*

$$a \sim b \quad \textit{þá og því aðeins að} \quad a \sqsubseteq b \quad \textit{og} \quad b \sqsubseteq a.$$

Þá eru venzlin $\sim$ jafngildisvenzl á menginu A, og til eru nákvæmlega ein venzl $\leq$ á menginu $A/\sim$ af jafngildisflokkunum þannig að

$$[a] \leq [b] \quad \textit{þá og því aðeins að} \quad a \sqsubseteq b,$$

og þessi venzl $\leq$ eru raðvenzl. (Hér er $[a]$ jafngildiflokkur staksins a úr menginu A með tilliti til jafngildisvenzlanna $\sim$).

Sönnun: Augljóst er að venzlin $\sim$ eru jafngildisvenzl. Látum a, b, c, d vera þannig að $a \sim c$ og $b \sim d$. Það þýðir að $a \sqsubseteq c$, $c \sqsubseteq a$, $b \sqsubseteq d$ og $d \sqsubseteq a$. Gerum nú ráð fyrir að $a \sqsubseteq b$. Af $c \sqsubseteq a$ og $a \sqsubseteq b$ leiðir að $c \sqsubseteq b$; og af $c \sqsubseteq b$ og $b \sqsubseteq d$ leiðir að $c \sqsubseteq d$. Ef við á hinn bóginn gerum ráð fyrir að $c \sqsubseteq d$, þá fæst með sama hætti að $a \sqsubseteq b$. Við sjáum því: Ef $[a] = [c]$ og $[b] = [d]$, þá gildir

$$a \sqsubseteq b \quad \text{þá og því aðeins að} \quad c \sqsubseteq d.$$

En það þýðir eimnitt að við getum *skilgreint* venzl $\leq$ á menginu $A/\sim$ með því að setja $[a] \leq [b]$ þá og því aðeins að $a \sqsubseteq b$. Nú er ljóst að venzlin $\leq$ eru raðvenzl á menginu $A/\sim$: Við höfum $[a] \leq [a]$ fyrir sérhvert a úr A vegna $a \sqsubseteq a$. Ef $[a] \leq [b]$ og $[b] \leq [a]$, þá er $a \sqsubseteq b$ og $b \sqsubseteq a$, og það þýðir að $a \sim b$, sem aftur þýðir að $[a] = [b]$. Ef að lokum $[a] \leq [b]$ og $[b] \leq [c]$, þá er $a \sqsubseteq b$ og $b \sqsubseteq c$ og því $a \sqsubseteq c$ og þar með $[a] \leq [c]$. $\square$

Kafli II

Zermelo-Fraenkel-mengjafræði

§1. Fullyrðingar mengjafræðinnar

Í kafla I voru einföldustu hugtök mengjafræðinnar sett fram með óformlegum hætti, og lausleg grein var gerð fyrir frumsendum hennar. Í þessum viðauka er ætlunin að bæta úr því með því að gefa nákvæmari framsetningu á frumsendunum. Ekki er ætlunin að endurtaka það sem gert var í fyrsta kaflanum, heldur er markmiðið að leggja traustari grunn undir það sem það var gert og sýna að frumsendur mengjafræðinnar nægja til að tryggja tilvist þeirra mengja sem á þarf að halda.

Í kafla I sögðum við að sérhver sá hlutur sem stærðfræðin fjallar um kallist *stak*, og að stök megi taka saman í *mengi*. Þar var einnig bent á að mengi væru hlutir sem stærðfræðin fjallar um, og þar með eru öll mengi jafnframt stök. Nú er rétt að benda á aðra merkilega staðreynd, sem er alls ekki augljós fyrirfram. Hún er sú að *öll stök sem tala þarf um í mengjafræði eru mengi.* Þetta virðist kannski fráleitt við fyrstu sýn. Til dæmis kynni okkur strax að detta í hug að venjulegar tölur, svo sem tölurnar 1 og 2, séu ekki mengi. En í frumsendumengjafræði er talnakerfið byggt upp með því að ganga útfrá mengjafræðinni, og þá eru tölur *skilgreindar* sem tiltekin mengi. Þannig er náttúrlega talan 1 *skilgreind* sem mengið

$$1 := \{\varnothing\},$$

og náttúrlega talan 2 er *skilgreind* sem mengið

$$2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Þess má þó geta að mengjafræði má setja fram með fleiri en einum hætti. Bæði má gera ráð fyrir að öll stök séu mengi, en einnig má gera ráð fyrir að til séu stök sem eru ekki mengi. Við veljum hér fyrri kostinn, bæði vegna þess að hann er einfaldari og líka vegna þess að hann er algengari. Þegar mengjafræði er sett fram með þessum hætti þarf ekki að gera neinn greinarmun á stökum og mengjum. Raunar þyrfti aldrei að nota þessi orð, vegna þess að allir hlutir sem við tölum um eru mengi, og þess vegna þarf ekki sífellt að vera að taka það fram. Við munum samt sem áður til þæginda nota orðin „stak“ og „mengi“ eftir hentugleikum til að gera framsetninguna læsilegri.

Frumsendumengjafræði byggist á því að setja fram tilteknar *fullyrðingar*, svokallaðar ***frumsendur***, og leiða útfrá þeim allar aðrar niðurstöður mengjafræðinnar með rökréttum ályktunum. Við höfum talað um margar af frumsendum mengjafræðinnar í kafla I. Meðal þeirra var *frumsendan um hlutmengi*, sem sagði að fyrir sérhvert mengi A og sérhverja „skynsamlega fullyrðingu“ $E(x)$ sé til mengi sem inniheldur nákvæmlega þau stök úr A þannig að fullyrðingin $E(x)$ sé sönn. Áður en frumsendurnar eru settar fram þarf að gera grein fyrir hvað átt er við með „skynsamlegri fullyrðingu“.

Ástæðan er sú, að talsverðrar aðgætni er þörf þegar ákveðið er hvaða fullyrðingar eiga að teljast leyfilegar í stærðfræði. Það dugar til dæmis ekki að leyfa allar venjulegar fullyrðingar á einhverju venjulegu tungumáli, til dæmis íslenzku. Við sýnum þetta með frægu dæmi:

Gerum ráð fyrir að við viljum leyfa allar „venjulegar fullyrðingar“ á íslenzku. Sumar slíkar fullyrðingar má nota til að skilgreina tölur, aðrar ekki. Til dæmis skilgreinir fullyrðingin „talan x er það sem kemur út þegar við leggjum töluna einn við töluna tvo“ ákveðna tölu x, nefnilega töluna 3.[1] Hins vegar skilgreinir fullyrðingin „talan x er talan sem kemur út þegar okkur leiðist“ ekki neina ákveðna tölu. Nú er kannski ekki ljóst hve mörg orð eru í „venjulegri íslenzku“, en okkur er örugglega óhætt að ganga útfrá því að ekkert orð í „venjulegri íslenzku“ sé lengra en til að mynda milljón bókstafir. Þar sem íslenzka stafrófið er endanlegt leiðir af því að „venjuleg íslenzka“ hefur ekki nema endanlega mörg orð. Af því leiðir svo aftur að ekki eru til nema endanlega margar „fullyrðingar á venjulegri íslenzku“ með tiltekinn orðafjölda. Þar með eru ekki til nema endanlega margar „fullyrðingar á venjulegri íslenzku“ sem hafa nítján orð eða færri. Sumar þessara fullyrðinga má nota til að skilgreina tilteknar náttúrlegar tölur, og þær náttúrlegu tölur sem þannig eru skilgreindar geta þá ekki verið nema endanlega margar. En nú eru náttúrlegu tölurnar óendanlega margar, svo að til hlýtur að vera náttúrleg tala sem er ekki unnt að skilgreina með nítján orðum eða færri á íslenzku. Ein þeirra hlýtur að vera minnst. Við getum þá skilgreint hana með eftirfarandi fullyrðingu:

> *Talan x er minnsta náttúrlega tala sem er ekki unnt að skilgreina með nítján orðum eða færri á íslenzku.*

Töluna x er samkvæmt skilgreiningu ekki unnt að skilgreina með nítján orðum eða færri á íslensku. En skilgreinin sjálf hefur einmitt nítján orð (ef við teljum breytistærðina „x“ sem eitt orð), og við höfum því skilgreint töluna með nítján orðum. Þetta er augljós mótsögn, sem er ekki auðvelt skýra eða komast hjá með einföldum hætti.

Einfaldasta leiðin til að komast hjá þessum vanda er að takmarka verulega þær fullyrðingar sem við leyfum í stærðfræði. Það er gert með því að gefa strangar reglur um

[1] Við leyfum okkur að útvíkka „venjulega íslensku“ þannig að breytistærðir, svo sem bókstafurinn „x“, séu leyfileg (nafn)orð.

hvernig leyfilegar fullyrðingarnar eru myndaðar. Við snúum okkur þá að því verkefni.

Fyrst þurfum við að gera grein fyrir hvað átt er við með ***heiti***. Eins og sagt var í inngangi eru stökum gefin heiti. Við getum lauslega skipt þeim í tvennt.

(1) *Ákveðin heiti.* Það eru nöfn á ákveðnum hlutum, svo sem

$$„\varnothing“,\quad „1“,\quad „\frac{1}{2}“,\quad „\{1,2\}\cup\{3,4\}“,\quad „\text{hringurinn með miðju í 0 og geisla 1}“.$$

Í rökfræði eru ákveðin heiti kölluð ***fastar***.

(2) *Óákveðin heiti.* Það eru í fyrsta lagi svokallaðar *breytistærðir* eða *breytur*, en orðið ***breyta*** er haft í rökfræði um bókstaf sem er notaður sem nafn á hlut (og er farið með sem nafnorð), og í öðru lagi geta óákveðin heiti verið samsett tákn sem innihalda breytur. Dæmi um slík samsett tákn eru

$$„\{x\}“,\quad „A\cap B“,\quad „x^2+1“,\quad „e^x“,\quad „f(x,y)“.$$

Í stærðfræði þarf að gera ráð fyrir að til umráða séu *óendanlega margar* breytur. Almennt samkomulag er um að leyfa alla bókstafi úr latnesku og grísku stafrófunum sem breytur. En þeir eru endanlega margir, svo að við lítum einnig á ýmis samsett tákn sem breytur (eða „nýja bókstafi“). Til dæmis má fá óendanlega margar breytur með því að bæta einu eða fleiri merkjum („strikum“) við venjulegan bókstaf; þannig lítum við á

$$x, x', x'', x''', \dots \text{ og svo framvegis}$$

sem sjálfstæðar breytur. Þetta mundi nægja, en af hagkvæmniástæðum eru fleiri merkingar á bókstöfum leyfðar, til dæmis

$$x_1, y_5, z_8.$$

Hver eru þá heiti mengjafræðinnar? Fyrsta reglan er einföld:

> *Heiti mengjafræðinnar eru (til að byrja með) allar breytur, og engin önnur heiti.*

Orðin „til að byrja með“ þarfnast frekari skýringar. Strax og við höfum sett fram fyrstu frumsendur mengjafræðinnar tökum við til við að sanna ýmsar *setningar*, eða með öðrum orðum afleiðingar af frumsendunum[2]. Sumar af þessum setningum leyfa okkur að *skilgreina nýja hluti*. Þeim eru þá *gefin ný heiti*. Til dæmis er sannað í setningu (2.6) hér á eftir að *til er nákvæmlega eitt mengi z þannig að z hafi ekkert stak*. Þessi niðurstaða leyfir okkur að skilgreina nýjan hlut, *tóma mengið*, og gefa honum nýtt (ákveðið) heiti „$\varnothing$“ með eftirfarandi *skilgreiningu*: *„Við látum $\varnothing$ vera það mengi z þannig að z hafi ekkert stak.“* Svo að annað dæmi sé tekið sýnum við hér á eftir að fyrir mengi A og B má búa til nýtt mengi $A\cup B$. Þetta leyfir að líta á táknasamstæðuna „$A\cup B$“ sem nýtt (óákveðið) heiti.

[2]Í stærðfræði og rökfræði er orðið „setning“ einungis haft um fullyrðingar sem má sanna útfrá gefnum frumsendum; það þýðir því hið sama og „sönnuð fullyrðing“. Þetta er ástæðan til að í þessum viðauka verðum við allsstaðar að tala um „fullyrðingar“ þar sem í daglegu máli væri talað um „setningar“.

Til að skýra þetta betur göngum við um stundarsakir út frá að við höfum þegar gert grein fyrir hverjar fullyrðingar mengjafræðinnar eru. Setjum svo að **P** sé slík fullyrðing og að við getum sannað setninguna „*Til er nákvæmlega eitt stak x þannig að fullyrðingin* **P** *sé sönn.*“ Þá getum við skilgreint nýtt stak og gefið því nýtt heiti **a** með því að skilgreinina: „*Látum* **a** *vera stakið x þannig að fullyrðingin* **P** *sé sönn.*“ Með þessu móti fjölgum við smátt og smátt þeim heitum sem eru leyfileg. Og eins og brátt verður ljóst fjölgum við jafnframt leyfilegum fullyrðingum.

Við skilgreinum nú fyrst hverjar eru *grunnfullyrðingar* mengjafræðinnar:

(1.1) Skilgreining. ***Grunnfullyrðingar mengjafræðinnar*** *kallast þær fullyrðingar sem má mynda úr heitum mengjafræðinnar með eftirfarandi tveimur* ***myndunarreglum****:*

(1) *Ef* **a** *og* **b** *eru heiti, þá er*

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

grunnfullyrðing.

(2) *Ef* **a** *og* **b** *eru heiti, þá er*

$$\mathbf{a} \in \mathbf{b}$$

grunnfullyrðing.

(1.2) Athugasemd. Þegar verið er að tala um tungumálið sem stærðfræðin er skrifuð á þarf að tala um „hluti“ svo sem bókstafi, tákn, fullyrðingar eða hluta af fullyrðingum. Til að tala um þessa hluti þurfum við að hafa nöfn á þessum hlutum, með öðrum orðum „breytur“. En það þarf að gera greinarmun á þessum nýju breytum og breytunum í sjálfu tungumáli stærðfræðinnar. Við köllum breyturnar sem eru heiti á „hlutum“ í tungumáli stærðfræðinnar ***málskipanarbreytur*** til aðgreiningar frá venjulegum breytum. Við komum okkur saman um að málskipanarbreyturnar skuli vera feitletraðir bókstafir, en breytur stærðfræðinnar skáletraðir bókstafir. Sér í lagi getum við notað málskipanarbreytur sem *heiti á heitum stærðfræðinnar*. Skýrum þetta nánar.

Tungumál stærðfræðinnar er samsett úr bókstöfum og fleiri táknum. Bókstafirnir mega til dæmis vera allir bókstafir latneska stafrófsins, svo sem „A“, „a“, „B“, „b“, „C“, „c“ o. s. frv. Nú viljum við geta sett fram reglur sem fjalla meðal annars um þessa bókstafi. Við þurfum þá að geta talað um *hvaða bókstafi sem er*, og til þess notum við málskipanarbreytur, svo sem „**x**“ eða „**y**“. Við getum til dæmis sagt: „Látum **x** og **y** vera bókstafi og táknum með $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ táknasamstæðuna sem fæst með því að rita fyrst bókstafinn **x**, þar næst táknið „=“ og síðast bókstafinn **y**.“ Hér gæti **x** til dæmis staðið fyrir bókstafinn „a“ og **y** fyrir bókstafinn „B“; og þá stendur $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ fyrir táknasamstæðuna „$a = B$“. En líka gæti **x** staðið fyrir bókstafinn „y“ og **y** fyrir bókstafinn „x“; og þá stendur $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ fyrir táknasamstæðuna „$y = x$“. Og eins gætu **x** og **y** bæði staðið fyrir bókstafinn „z“, og þá stendur $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ fyrir táknasamstæðuna „$z = z$“.

Á þessu stigi málsins eru heitin sem við höfum til umráða einungis bókstafir, eða með öðrum orðum breytur. Myndunarreglurnar í síðustu skilgreiningu leyfa okkur nú til dæmis að sjá að eftirfarandi fullyrðingar eru grunnfullyrðingar:

„$x = y$“, „$x = t$“, „$x = x$“, „$A = B$“, „$x \in A$“, „$A \in x$“, „$x \in x$“, „$A \in B$“.

Þegar við höfum sannað setningar sem leyfa okkur að skilgreina ný heiti, til dæmis heitið „$\varnothing$“, þá bætast nýjar grunnfullyrðingar við, svo sem

$$„x \in \varnothing“, \quad „\varnothing \in A“, \quad „\varnothing \in \varnothing“.$$

Nú getum við sagt hverjar eru fullyrðingar mengjafræðinnar.

(1.3) Skilgreining. Fullyrðingar mengjafræðinnar *eru þær fullyrðingar sem unnt er að mynda samkvæmt eftirfarandi* **myndunarreglum***:*
(1) *Sérhver grunnfullyrðing er fullyrðing.*
(2) *Ef* **P** *er fullyrðing, þá er*

(ekki **P**)

fullyrðing.
(3) *Ef* **P** *og* **Q** *eru fullyrðingar, þá er*

(**P** eða **Q**)

fullyrðing.
(4) *Ef* **P** *og* **Q** *eru fullyrðingar, þá er*

(**P** og **Q**)

fullyrðing.
(5) *Ef* **P** *og* **Q** *eru fullyrðingar, þá er*

(ef **P**, þá **Q**)

fullyrðing.
(6) *Ef* **P** *og* **Q** *eru fullyrðingar, þá er*

(**P** þá og því aðeins að **Q**)

fullyrðing.
(7) *Ef* **x** *er breyta og* **P** *er fullyrðing, þá er*

til er **x** *þannig að* **P**

fullyrðing.
(8) *Ef* **x** *er breyta og* **P** *er fullyrðing, þá er*

fyrir sérhvert **x** *er* **P**

fullyrðing.

Sýnum með dæmi hvernig nota má þessar myndunarreglur. Samkvæmt skilgreiningu (1.1) eru fullyrðingarnar „$x \in A$“, „$x \in B$“ og „$A = B$“ grunnfullyrðingar, og þar með einnig fullyrðingar samkvæmt myndunarreglu (1) í skilgreiningu (1.3). Nú getum við notað myndunarreglu (5) á fullyrðingarnar „$x \in A$“ og „$x \in B$“ og sjáum að

„(ef $x \in A$, þá $x \in B$)“

er fullyrðing. Einnig getum við notað myndunarreglu (5) á fullyrðingarnar „$x \in B$“ og „$x \in A$“ og sjáum að

$$„(\text{ef } x \in B, \text{ þá } x \in A)“$$

er fullyrðing. Næst notum við myndunarreglu (4) á fullyrðingarnar „(ef $x \in A$, þá $x \in B$)“ og „(ef $x \in B$, þá $x \in A$)“ og sjáum að

$$„((\text{ef } x \in A, \text{ þá } x \in B) \text{ og } (\text{ef } x \in B, \text{ þá } x \in A))“$$

er fullyrðing. Notum næst myndunarreglu (8) á breytuna „x“ og þessa síðustu fullyrðingu, og sjáum að

$$„\text{fyrir sérhvert } x \text{ er } ((\text{ef } x \in A, \text{ þá } x \in B) \text{ og } (\text{ef } x \in B, \text{ þá } x \in A))“$$

er fullyrðing. Að lokum notum við myndunarreglu (5) á þessa síðustu fullyrðingu og fullyrðinguna „$A = B$“ og sjáum að

$$„\text{ef fyrir sérhvert } x \text{ er } ((\text{ef } x \in A, \text{ þá } x \in B) \text{ og } (\text{ef } x \in B, \text{ þá } x \in A)), \text{ þá } A = B“$$

er fullyrðing.

Svigarnir í myndunarreglunum eru hafðir til að tryggt sé að rétt sé lesið úr fullyrðingunum, en við leyfum okkur oft að sleppa þeim ef það veldur engum misskilningi. Við leyfum okkur einnig til þæginda að umrita fullyrðingar mengjafræðinnar í samræmi við reglur íslenskrar málfræði þannig að þær verði læsilegri, og skrifum þá síðustu fullyrðingu til dæmis þannig: „Ef fyrir sérhvert x gildir að $x \in A$ leiði til $x \in B$ og að $x \in B$ leiði til $x \in A$, þá er $A = B$.“. Eða jafnvel þannig: „Ef fyrir sérhvert x gildir að $x \in A$ leiði til $x \in B$ og öfugt, þá er $A = B$.“

Við leyfum okkur einnig að nota ýmsar skammstafanir. Tvær þægilegar skammstafanir minnumst við þegar á: Látum **a** og **b** vera heiti. Við skrifum

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \quad \text{sem skammstöfun fyrir} \quad (\text{ekki } \mathbf{a} = \mathbf{b})$$

og

$$\mathbf{a} \notin \mathbf{b} \quad \text{sem skammstöfun fyrir} \quad (\text{ekki } \mathbf{a} \in \mathbf{b}).$$

(1.4) Athugasemd. Í kafla I settum við fram fjórar reglur úr rökfræði sem fjalla um jafnaðarmerkið. Þrjár þeirra eru einfaldar, nefnilega

$$x = x;$$
$$\text{ef } x = y, \text{ þá er } y = x;$$
$$\text{ef } x = y \text{ og } y = z, \text{ þá er } x = z.$$

Fjórða reglan var hins vegar nokkru flóknari. Í kafla I orðuðum við hana þannig:

> *Setjum svo að $E(x)$ sé einhver fullyrðing um almennt stak x. Ef $a = b$, þá er fullyrðingin $E(a)$ sönn þá og því aðeins að fullyrðingin $E(b)$ sé sönn.*

Nú getum við gefið nákvæmari framsetningu á þessari reglu. Hún krefst hins vegar talsverðs tæknilegs undirbúnings, og þeim sem vilja ekki leggja á sig dálitlar rökflækjur er ráðlegt að hlaupa yfir afganginn af þessari löngu athugasemd.

Spyrjum í fyrsta lagi: Hvað er átt við með „fullyrðingu um almennt stak x“? Við getum strax sagt hvað er átt með „almennu staki“; það er stak þannig að heiti þess sé breyta. Dæmi um „fullyrðingar um almennt stak x“ gætu verið fullyrðingin „$x \in A$“ eða fullyrðingin „x er rauntala og $x^2 = 2$“. Við gætum nú freistast til að segja að fullyrðing um almennt stak x sé einfaldlega fullyrðing þar sem breytan „x“ kemur fyrir. Þetta er hins vegar ekki alveg rétt, því að auðvelt er að setja fram fullyrðingar þar sem breytan „x“ kemur fyrir en er samt ekki hægt að kalla fullyrðingu um stakið x. Einfalt dæmi er fullyrðingin „til er rauntala x þannig að $x^2 = 2$“. Þetta er ekki fullyrðing um neina tölu x, og það sést best á því að auðveldlega má umorða hana þannig (á venjulegri íslenzku) að breytan „x“ komi hvergi fyrir; fullyrðingin segir greinilega sama hlutinn og íslenzka fullyrðingin „til er rauntala sem margfölduð með sjálfri sér gefur töluna 2“. Önnur leið til að sjá sama hlut er að það skiptir greinilega engu máli hvaða breyta er notuð í fullyrðingunni; fullyrðingin „til er rauntala x þannig að $x^2 = 2$“ segir greinilega sama hlutinn og fullyrðingarnar „til er rauntala y þannig að $y^2 = 2$“ og „til er rauntala t þannig að $t^2 = 2$“. Með sama hætti sjáum við að fullyrðingin „fyrir sérhverja rauntölu x gildir $x^2 \geq 0$“ segir greinilega sama hlutinn og fullyrðingarnar „fyrir sérhverja rauntölu b gildir $b^2 \geq 0$“ og „fyrir sérhverja rauntölu z gildir $z^2 \geq 0$“, og jafnframt hið sama og íslenzka fullyrðingin „ef rauntala er margfölduð með sjálfri sér, þá er útkoman stærri eða jöfn núlli“, en í þeirri fullyrðingu kemur engin breyta fyrir.

Látum $\mathbf{x}$ vera breytu. Þær aðgerðir að skeyta orðasamböndunum „til er $\mathbf{x}$ þannig að“ og „fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er“ fyrir framan einhverja fullyrðingu $\mathbf{P}$ hafa það að verkum að fullyrðingin sem út kemur er ekki lengur fullyrðing um neitt stak sem breytan $\mathbf{x}$ er heiti á. Við segjum að þessar aðgerðir ***bindi*** breytuna $\mathbf{x}$ í allri fullyrðingunni „til er $\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{P}$“ eða „fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er $\mathbf{P}$“. Við verðum nú að gefa nákvæma skilgreiningu á þessu hugtaki.

Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðingu. Ef $\mathbf{P}$ er mynduð úr öðrum fullyrðingum $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ samkvæmt myndunarreglunum hér að ofan, þá segjum við að $\mathbf{Q}$ og $\mathbf{R}$ séu ***hlutfullyrðingar*** í $\mathbf{P}$. Þannig er $\mathbf{Q}$ hlutfullyrðing í fullyrðingunum „ef $\mathbf{Q}$, þá $\mathbf{R}$“ og „til er $\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{Q}$“. Við komum okkur einnig saman um að sérhver fullyrðing sé hlutfullyrðing í sjálfri sér, að hlutfullyrðing í hlutfullyrðingu sé hlutfullyrðing o. s. frv. Þannig er $\mathbf{Q}$ líka hlutfullyrðing í fullyrðingunni „$\mathbf{R}$ eða til er $\mathbf{x}$ þannig að ($\mathbf{S}$ og ($\mathbf{T}$ eða $\mathbf{Q}$))“.

Látum nú $\mathbf{P}$ vera fullyrðingu og $\mathbf{x}$ vera breytu. Nú getur breytan $\mathbf{x}$ komið fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$, og það oftar en einu sinni. Þegar $\mathbf{x}$ kemur fyrir á einhverjum stað í hlutfullyrðingu í fullyrðingunni $\mathbf{P}$ sem er af gerðinni „til er $\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{Q}$“ eða „fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er $\mathbf{Q}$“, þar sem $\mathbf{Q}$ er fullyrðing (sem getur innihaldið breytuna $\mathbf{x}$), þá segjum við að breytan $\mathbf{x}$ sé ***bundin*** á þeim stað í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Þegar $\mathbf{x}$ kemur fyrir á stað sem er ekki í slíkum hluta af fullyrðingunni $\mathbf{P}$, þá segjum við að breytan $\mathbf{x}$ sé ***frjáls*** á þeim stað. Breyta getur verið frjáls á einum stað og bundin á öðrum stað í fullyrðingu. Í eftirfarandi fullyrðingu sýnum við með örvum hvar breytan „x“ er frjáls og hvar hún er bundin:

$$\begin{array}{cccc} x \in A \text{ og (til er } & x \text{ þannig að (} & x \in B \text{ eða } & x \in C)) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \textit{frjáls} & \textit{bundin} & \textit{bundin} & \textit{bundin} \end{array}$$

Nú getum við svarað upphaflegu spurningunni: Látum **x** vera breytu. Fullyrðing um **x** er fullyrðing **P** þannig að breytan **x** komi fyrir frjáls á að minnsta kosti einum stað í fullyrðingunni **P**.

Í útgáfu okkar á reglunni um samsemd sem var tilefnið til þessara hugleiðinga var ekki einungis talað um fullyrðingu $E(x)$ um „almennt stak“ x, heldur var einnig talað um fullyrðingarnar $E(a)$ og $E(b)$, þar sem a og b eru stök. Án þess það hafi beinlínis verið skýrt út ætti að vera ljóst að $E(a)$ á að vera fullyrðing sem segir sama hlut um stakið a og fullyrðingin $E(x)$ segir um „almenna stakið“ x. Fullyrðingin $E(a)$ ætti því að vera fullyrðingin sem fæst með því að setja heiti staksins a inn í staðinn fyrir breytuna „x“ á hverjum þeim stað þar sem breytan „x“ er *frjáls*. En hér þarf enn að hafa gát á, og við þurfum að huga nánar að hvað það þýðir að setja heiti inn í staðinn fyrir breytu í einhverri fullyrðingu.

Nú geta fleiri en ein breyta komið fyrir frjálsar í tiltekinni fullyrðingu, og það borgar sig að taka upp ritһátt sem sýnir hvaða breytu er verið að setja inn fyrir. Við skilgreinum því:

> *Látum* **x** *vera breytu,* **a** *vera heiti og* **P** *vera fullyrðingu. Við táknum með* $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ *fullyrðinguna sem fæst úr fullyrðingunni* **P** *með því að setja heitið* **a** *inn í stað breytunnar* **x** *á sérhverjum stað í fullyrðingunni* **P** *þar sem breytan* **x** *er frjáls.*

Sem dæmi getum við látið **P** vera fullyrðinguna „$x \in A$ og (til er x þannig að ($x \in B$ eða $x \in C$))“. Ef **x** er breytan „x“ og **a** er heitið „3“, þá er $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ fullyrðingin „$3 \in A$ og (til er x þannig að ($x \in B$ eða $x \in C$))“. Ef **x** er breytan „B“ og **a** er heitið „$D \cup E$“, þá er $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ fullyrðingin „$x \in A$ og (til er x þannig að ($x \in D \cup E$ eða $x \in C$))“. Ef **x** er breytan „z“ og **a** er heitið „t“, þá er $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ fullyrðingin „$x \in A$ og (til er x þannig að ($x \in B$ eða $x \in C$))“; með öðrum orðum er $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ upphaflega fullyrðingin **P**. Þetta síðasta dæmi sýnir: Ef breytan **x** kemur ekki fyrir frjáls í fullyrðingunni **P**, þá er $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ ekkert annað en fullyrðingin **P**.

Það mætti ætla að nú sé málið loksins leyst, en svo er þó ekki alveg. Ætlun okkar var sú að fullyrðingin $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ segði hið sama um hlutinn sem ber heitið **a** og fullyrðingin **P** segir um hlutinn sem ber heitið **x**. En á því getur orðið misbrestur, nefnilega þegar heitið **a** er breyta eða inniheldur breytu. [Dæmi um heiti sem inniheldur breytur er til dæmis heitið „$A \cup B$“, sem inniheldur breyturnar „A“ og „B“.] Látum til dæmis **P** vera fullyrðinguna „til er heil tala y þannig að $x = 2y$“. Breytan „x“ kemur fyrir frjáls í þessari fullyrðingu, þannig að **P** er fullyrðingin um stakið x, og augljóslega segir hún einfaldlega „x er jöfn tala“. Setjum nú heitið „$y + 1$“ inn í stað breytunnar „x“ í fullyrðingunni **P**, það er að segja myndum fullyrðinguna $\mathbf{P}_x[y+1]$. Það er fullyrðingin „til er heil tala y þannig að $y + 1 = 2y$“. En nú bregður svo við að þessi fullyrðing segir alls ekki að $y + 1$ sé jöfn tala. Raunar er hún ekki nein fullyrðing um y eða um

$y+1$, því að breytan „y“ kemur ekki fyrir frjáls í fullyrðingunni $\mathbf{P}_x[y+1]$. Fullyrðingin $\mathbf{P}_x[y+1]$ segir að jafnan $y+1=2y$ hafi heila tölu sem lausn (og er augljóslega sönn, því að talan 1 er lausn jöfnunnar, og raunar eina heila talan sem er lausn). Ástæða þess að $\mathbf{P}_x[y+1]$ segir alls ekki það sem við bjuggumst við, nefnilega að $y+1$ sé jöfn tala, er sú að breytan „y“ í heitinu „$y+1$“ verður bundin þegar heitið „$y+1$“ er sett inn í fullyrðingu af gerðinni „til er y þannig að $\mathbf{Q}$“ eða „fyrir sérhvert y er $\mathbf{Q}$“. Þetta getum við ekki leyft.

Við segjum nú að heiti $\mathbf{a}$ sé ***innsetjanlegt fyrir breytuna* $\mathbf{x}$ *í fullyrðingunni*** $\mathbf{P}$ ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt: Ef $\mathbf{y}$ er breyta sem kemur fyrir í heitinu $\mathbf{a}$, þá inniheldur fullyrðingin $\mathbf{P}$ enga hlutfullyrðingu af gerðinni „til er $\mathbf{y}$ þannig að $\mathbf{Q}$“ eða „fyrir sérhvert $\mathbf{y}$ er $\mathbf{Q}$“, þar sem $\mathbf{Q}$ er fullyrðing þar sem breytan $\mathbf{x}$ kemur fyrir með þeim hætti að hún sé frjáls á þeim stað í fullyrðingunni $\mathbf{P}$.

Við verðum nú að taka upp þá reglu að aldrei megi setja heiti inn fyrir breytu í fullyrðingu nema heitið sé innsetjanlegt fyrir breytuna í fullyrðingunni.

Loksins getum við sett fram rökregluna um samsemd:

> *Gerum ráð fyrir að* $\mathbf{P}$ *sé fullyrðing, að* $\mathbf{x}$ *sé breyta og að* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *séu heiti sem hvort um sig er innsetjanlegt fyrir breytuna* $\mathbf{x}$ *í fullyrðingunni* $\mathbf{P}$. *Þá er fullyrðingin „ef* $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, *þá* $(\mathbf{P_x}[\mathbf{a}]$ *þá og því aðeins að* $\mathbf{P_x}[\mathbf{b}])$*“ sönn.*

Tökum eftir að það er óþarfi að setja það skilyrði að $\mathbf{P}$ sé fullyrðing um $\mathbf{x}$, eða með öðrum orðum að breytan $\mathbf{x}$ komi fyrir frjáls í fullyrðingunni $\mathbf{P}$: Ef breytan $\mathbf{x}$ kemur ekki fyrir frjáls í $\mathbf{P}$, þá eru fullyrðingarnar $\mathbf{P_x}[\mathbf{a}]$ og $\mathbf{P_x}[\mathbf{b}]$ ekkert annað en fullyrðingin $\mathbf{P}$, og fullyrðingin „ef $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, þá $(\mathbf{P_x}[\mathbf{a}]$ þá og því aðeins að $\mathbf{P_x}[\mathbf{b}])$“ er þá sjálfkrafa sönn.

(1.5) Athugasemdir. (1) Reglurnar um jafnaðarmerkið eru venjulega taldar tilheyra reglum rökfræðinnar. Við ætlum ekki hér að gera neina almenna grein fyrir öðrum rökreglum, en notum samt tækifærið til að minnast hér á eina þeirra.

Setjum svo að $\mathbf{P}$ sé fullyrðing og að $\mathbf{x}$ sé breyta sem kemur fyrir frjáls í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé *sönn* á að þýða að hún sé sönn fyrir *sérhvert* $\mathbf{x}$. Þegar við segjum að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn, þá meinum við með öðrum orðum hið sama og þegar við segjum að fullyrðingin „fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er $\mathbf{P}$“ sé sönn.

Af því leiðir að hvaða heiti sem við setjum inn fyrir $\mathbf{x}$ í sannri fullyrðingu $\mathbf{P}$, þá fáum við sanna fullyrðingu. Við getum orðað þetta þannig:

> *Látum* $\mathbf{P}$ *vera sanna fullyrðingu, látum* $\mathbf{x}$ *vera breytu og* $\mathbf{a}$ *vera heiti sem er innsetjanlegt fyrir breytuna* $\mathbf{x}$ *í fullyrðingunni* $\mathbf{P}$. *Þá er fullyrðingin* $\mathbf{P_x}[\mathbf{a}]$ *sönn.*

(2) Notum einnig tækifærið til að minnast á algenga skammstöfun: Við lítum á fullyrðinguna „*til er nákvæmlega eitt* $\mathbf{x}$ *þannig að* $\mathbf{P}$“ sem skammstöfun fyrir fullyrðinguna „*til er* $\mathbf{x}$ *þannig að* $\mathbf{P}$ *og fyrir sérhvert* $\mathbf{x}$ *og sérhvert* $\mathbf{y}$ *er* (*ef* $\mathbf{P}$ *og* $\mathbf{P_x}[\mathbf{y}]$, *þá* $\mathbf{x}=\mathbf{y}$)“. Hér er $\mathbf{y}$ einhver breyta önnur en breytan $\mathbf{x}$ sem er innsetjanleg fyrir $\mathbf{x}$ í fullyrðingunni $\mathbf{P}$.

§2. Fyrstu frumsendur mengjafræðinnar

Við byrjum nú á að setja fram frumsendur mengjafræðinnar. Þær eiga að sjálfsögðu að vera fullyrðingar í skilningi skilgreiningar (1.3). Við byrjum á að setja fram frumsenduna um umtak, sem við ræddum ítarlega í kafla I:

F1. Frumsenda um umtak. Ef fyrir sérhvert x gildir ($x \in A$ þá og því aðeins að $x \in B$), þá $A = B$.

Komum okkur saman um að nota ritháttinn „$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$" sem skammstöfun fyrir fullyrðinguna „fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er (ef $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ þá $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$)". Hér eru $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ hvaða heiti sem er, og $\mathbf{x}$ er breyta sem er valin þannig að hún komi ekki fyrir í heitunum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Þá má setja frumsenduna um umtak þannig fram:

$$\text{Ef } A \subset B \text{ og } B \subset A, \text{ þá } A = B.$$

Í kafla I orðuðum við frumsenduna um umtak dálítið öðruvísi, nefnilega í stórum dráttum þannig: „*$A = B$ þá og því aðeins að $A \subset B$* og $B \subset A$". En þessar tvær framsetningar eru í raun jafngildar, því að fullyrðingin „ef $A = B$, þá $A \subset B$ og $B \subset A$" er afleiðing af rökreglu um jafnaðarmerkið.

Næst viljum við setja fram það sem við í kafla I kölluðum „frumsendu um hlutmengi" og orðuðum þannig að *„fyrir sérhverja „skynsamlega fullyrðingu" $E(x)$ og sérhvert mengi A megi skilgreina hlutmengi allra staka í menginu A sem hafa eiginleikann $E(x)$*". En nú kemur í ljós að það var villandi að tala hér um *eina* frumsendu: Í raun þurfum við á *óendanlega mörgum* frumsendum að halda, einni fyrir sérhverja „skynsamlega fullyrðingu". Í staðinn fyrir eina frumsendu þurfum við að setja fram það sem kallað er ***frumsendugrip***, en það er forskrift sem leyfir okkur að búa til frumsendur samkvæmt tiltekinni reglu. Þetta er raunar meginástæðan til að við höfum þurft að tala ítarlega um málskipanarbreytur: Stakar frumsendur má setja fram með venjulegum breytum, en til að setja fram frumsendugrip þurfum við á málskipanarbreytum að halda.

F2. Frumsendugrip um hlutmengi. Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðingu og $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera ólíkar breytur þannig að breyturnar $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ komi ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Þá er fullyrðingin „til er $\mathbf{B}$ þannig að fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er ($\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ þá og því aðeins að ($\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ og $\mathbf{P}$))" frumsenda.

Frumsenda um hlutmengi eða ***hlutmengisfrumsenda*** er frumsenda sem er búin til með því að nota frumsendugripið um hlutmengi.

Tökum dæmi: Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „$x \in B$". Breyturnar „A" og „C" koma ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Þá segir frumsendugripið **F2** að fullyrðingin

> *til er C þannig að fyrir sérhvert x er ($x \in C$ þá og því aðeins að ($x \in A$ og $x \in B$))*

sé hlutmengisfrumsenda. Látum nú $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „$y \in B$ og $y \in C$". Breyturnar „A" og „D" koma ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$, og frumsendugripið **F2** segir að fullyrðingin

> *til er D þannig að fyrir sérhvert y er ($y \in D$ þá og því aðeins að ($y \in A$ og $y \in B$ og $y \in C$))*

sé hlutmengisfrumsenda.

Það er ljóst að frumsendugripið **F2** leyfir okkur að búa til *óendanlega margar* hlutmengisfrumsendur. En einnig er ljóst að við getum auðveldlega gengið úr skugga um hvort tiltekin fullyrðing er hlutmengisfrumsenda eða ekki.

(2.1) Skilgreining. *Látum* $\mathbf{P}$ *vera fullyrðingu og* $\mathbf{x}, \mathbf{A}$ *vera ólíkar breytur þannig að breytan* $\mathbf{A}$ *komi ekki fyrir í fullyrðingunni* $\mathbf{P}$. *Við segjum að fullyrðingin* $\mathbf{P}$ ***skilgreini mengi með tilliti til breytunnar*** $\mathbf{x}$ *ef fullyrðingin „til er* $\mathbf{A}$ *þannig að fyrir sérhvert* $\mathbf{x}$ *er (ef* $\mathbf{P}$*, þá* $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$*)“ er sönn.*

Að fullyrðingin $\mathbf{P}$ skilgreini mengi með tilliti til breytunnar $\mathbf{x}$ segir með öðrum orðum að til sé mengi sem inniheldur öll stök með heitið $\mathbf{x}$ þannig að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn.

Frumsendugripið um hlutmengi segir að fullyrðing af gerðinni „$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ og $\mathbf{P}$“, þar sem $\mathbf{x}, \mathbf{A}$ eru ólíkar breytur og breytan $\mathbf{A}$ kemur ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$, skilgreini mengi.

Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin $\mathbf{P}$ skilgreini mengi með tilliti til breytunnar $\mathbf{x}$. Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera ólíkar breytur og frábrugðnar breytunni $\mathbf{x}$ þannig að breyturnar $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ komi ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Samkvæmt skilgreiningu er fullyrðingin „til er $\mathbf{A}$ þannig að fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er (ef $\mathbf{P}$, þá $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$)“ sönn. Því er til mengi með heiti $\mathbf{A}$ þannig að fyrir sérhvert stak með heiti $\mathbf{x}$ sé fullyrðingin

$$\text{(1)} \qquad \textit{ef } \mathbf{P}, \textit{ þá } \mathbf{x} \in \mathbf{A}$$

sönn. Samkvæmt frumsendugripinu **F2** er til mengi með heiti $\mathbf{B}$ þannig að fyrir sérhvert stak með heiti $\mathbf{x}$ sé fullyrðingin

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B} \textit{ þá og því aðeins að } (\mathbf{x} \in \mathbf{A} \textit{ og } \mathbf{P})$$

sé sönn. En vegna (1) er fullyrðing (2) jafngild fullyrðingunni

$$\mathbf{x} \in \mathbf{B} \textit{ þá og því aðeins að } \mathbf{P}.$$

Við ályktum því að fullyrðingin

$$\textit{til er } \mathbf{B} \textit{ þannig að fyrir sérhvert } \mathbf{x} \textit{ er } (\mathbf{x} \in \mathbf{B} \textit{ þá og því aðeins að } \mathbf{P})$$

sé sönn. Með öðrum orðum er til mengi með heiti $\mathbf{B}$ sem hefur sem stök nákvæmlega þau stök með heiti $\mathbf{x}$ sem fullnægja skilyrðinu $\mathbf{P}$. Samkvæmt frumsendunni um umtak **F1** ákvarðast þetta mengi ótvírætt af skilyrðinu. Við getum því skilgreint:

(2.2) Skilgreining. *Látum* $\mathbf{P}$ *vera fullyrðingu og* $\mathbf{x}, \mathbf{B}$ *vera ólíkar breytur þannig að breytan* $\mathbf{B}$ *komi ekki fyrir í fullyrðingunni* $\mathbf{P}$. *Mengið sem ber heitið* $\mathbf{B}$ *og hefur þann eiginleika að fullyrðingin „fyrir sérhvert* $\mathbf{x}$ *er (*$\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ *þá og því aðeins að* $\mathbf{P}$*)“ er sönn er táknað með*

$$\{\mathbf{x} : \mathbf{P}\}.$$

Við skrifum einnig

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{A} : \mathbf{P}\}$$

í stað $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{A}$ *og* $\mathbf{P}\}$, *þar sem* $\mathbf{A}$ *er breyta frábrugðin breytunni* $\mathbf{x}$ *þannig að* $\mathbf{A}$ *komi ekki fyrir í fullyrðingunni* $\mathbf{P}$.

(2.3) Athugasemd. Þetta er fyrsta dæmi okkar um *skilgreint heiti.* Til þessa gátum við aðeins notað skilgreiningu (1.1) á heiti sem eru breytur, en nú getum við einnig notað hana á heiti af gerðinni $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A} : \mathbf{P}\}$, þar sem $\mathbf{x}$ og $\mathbf{A}$ eru ólíkar breytur þannig að breytan $\mathbf{A}$ komi ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$, því að frumsendugripið **F2** um hlutmengi tryggir tilvist allra slíkra mengja. Til dæmis má mynda grunnfullyrðinguna $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} : \mathbf{P}\}$. Við höfum:

$$\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} : \mathbf{P}\} \text{ þá og því aðeins að } (\mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ og } \mathbf{P}).$$

(2.4) Skilgreining. *Mengi kallast* ***tómt*** *ef það inniheldur ekkert stak.*

Látum $\mathbf{A}$ vera breytu. Fullyrðingin „mengið $\mathbf{A}$ er tómt“ er samkvæmt skilgreiningu skammstöfun fyrir eftirfarandi fullyrðingu á máli mengjafræðinnar: „Fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ er $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$“; hér er $\mathbf{x}$ einhver breyta frábrugðin breytunni $\mathbf{A}$.

(2.5) Setning. *Ef A er tómt mengi og B er mengi, þá er $A \subset B$.*

Sönnun: Annars væri til x þannig að $x \in A$ og $x \notin B$. Sér í lagi er þá $x \in A$ í mótsögn við að $x \notin A$ fyrir sérhvert x. □

(2.6) Setning. *Til er nákvæmlega eitt tómt mengi.*

Sönnun: Breytan „A“ kemur ekki fyrir í fullyrðingunni „$x \neq x$“. Samkvæmt hlutmengisfrumsendu skilgreinir fullyrðingin „$x \in A$ og $x \neq x$“ mengi. Við getum því skilgreint mengið

$$B := \{x \in A : x \neq x\}.$$

Við sýnum nú að mengið B er tómt: Gerum ráð fyrir að svo sé ekki. Þá er til stak x þannig að $x \in B$. Samkvæmt skilgreiningu á menginu B gildir þá $x \in A$ og $x \neq x$. Sér í lagi er $x \neq x$. En það fær ekki staðizt, því að fyrir sérhvert x er $x = x$. Sú forsenda að B sé ekki tómt leiðir því til mótsagnar, og því er B tómt.

Gerum nú ráð fyrir að C sé einnig tómt mengi. Samkvæmt (2.5) er $B \subset C$ og líka $C \subset B$. Samkvæmt frumsendunni um umtak **F1** er þá $C = B$. □

Við getum nú skilgreint:

(2.7) Skilgreining. *Tóma mengið er táknað með*

$$\varnothing.$$

Setning (2.5) segir nú að $\varnothing \subset B$ fyrir sérhvert mengi B.

Við höfum séð að til er mengi sem hefur ekkert stak. Hins vegar gildir:

(2.8) Setning. *Ekki er til mengi sem inniheldur öll stök.*

Sönnun: Setningin segir að ekki sé til mengi A þannig að fullyrðingin „fyrir sérhvert x er $x \in A$" sé sönn. Gerum ráð fyrir að slíkt mengi A sé til. Samkvæmt frumsendu um hlutmengi skilgreinir skilyrðið „$x \in A$ og $x \notin x$" mengi með tilliti til breytunnar „x". Við getum því myndað mengið

$$R := \{x \in A : x \notin x\}.$$

Fyrir sérhvert x höfum við þá

$$x \in R \text{ þá og því aðeins að } x \in A \text{ og } x \notin x.$$

En samkvæmt forsendu er $x \in A$ fyrir sérhvert stak x. Því er fullyrðingin „$x \in A$ og $x \notin x$" er jafngild fullyrðingunni „$x \notin x$". Því gildir

$$x \in R \text{ þá og því aðeins að } x \notin x$$

fyrir sérhvert x. Þetta gildir þá sér í lagi ef x er mengið R. Því fæst

$$(*) \qquad R \in R \text{ þá og því aðeins að } R \notin R.$$

En nú gildir annaðhvort $R \in R$ eða $R \notin R$, og í báðum tilvikum leiðir af $(*)$ að fullyrðingarnar $R \in R$ og $R \notin R$ gilda samtímis, en það er augljós mótsögn. □

Lesandinn ætti strax að sjá að röksemdafærslan í síðustu sönnun byggist á *þversögn Russels*, sem við ræddum um í kafla I.

F3. Frumsenda um lítil mengi. Fyrir sérhvert a og fyrir sérhvert b er til A þannig að $a \in A$ og $b \in A$.

Frumsendan **F3** segir að fullyrðingin „$x = a$ eða $x = b$" skilgreini mengi með tilliti til breytunnar „x". Við getum því skilgreint:

(2.9) Skilgreining. *Látum a, b vera stök. Við setjum*

$$\{a, b\} := \{x : x = a \text{ eða } x = b\};$$

með öðrum orðum er $\{a, b\}$ mengið sem hefur stökin a og b, en engin önnur stök. Við setjum einnig

$$\{a\} := \{a, a\}.$$

Athugum að mengið $\{a\}$ hefur nákvæmlega eitt stak, nefnilega stakið a.

Eina mengið sem við höfum til þessa haft til umráða er tóma mengið $\varnothing$. Nú getum við hins vegar notað frumsenduna um lítil mengi til að búa til úr því mengi sem er ekki tómt. Við getum nefnilega myndað mengið $\{\varnothing\}$. Það er ekki tómt, því að tóma mengið $\varnothing$ er stak (og raunar eina stakið) í menginu $\{\varnothing\}$. Sér í lagi er $\{\varnothing\} \neq \varnothing$. Við getum síðan myndað mengið $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, sem hefur tvö stök.

F4. Frumsenda um sammengi. Ef C er mengi af mengjum, þá er til mengi sem inniheldur sem stak sérhvert stak sem er stak í einhverju af mengjunum í C.

Frumsenda **F4** segir að fullyrðingin „til er A þannig að $x \in A$ og $A \in C$“ skilgreini mengi með tilliti til breytunnar „x“. Við getum því skilgreint:

(2.10) Skilgreining. *Við setjum*

$$\bigcup C := \{x : \text{til er } A \text{ þannig að } x \in A \text{ og } A \in C\}$$

og köllum $\bigcup C$ ***sammengi mengjanna í*** C*. Við setjum einnig*

$$A \cup B := \bigcup \{A, B\}$$

og köllum $A \cup B$ ***sammengi mengjanna*** A ***og*** B*.*

Við eigum að hugsa um $\bigcup C$ sem sammengi allra þeirra mengja sem eru stök í menginu C. Þar sem $C = \{A : A \in C\}$ má einnig rita

$$\bigcup C = \bigcup \{A : A \in C\},$$

og mörgum þykir það þægilegra. Augljóslega gildir

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eða } x \in B\}.$$

Einnig er ljóst að $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

Tökum eftir að fyrir sérhvert x er $x \in \{a\} \cup \{b\}$ þá og því aðeins að $x = a$ eða $x = b$. Með öðrum orðum er

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

Við getum nú skilgreint

$$\begin{aligned} \{a, b, c\} &:= \{a, b\} \cup \{c\}, \\ \{a, b, c, d\} &:= \{a, b, c\} \cup \{d\}, \end{aligned}$$

o. s. frv. Ef við höfum endanlegan lista af stökum, þá getum við með þessum hætti myndað mengi sem inniheldur öll stök á listanum og engin önnur. Við getum sagt að við tilgreinum slíkt mengi með því að telja upp stökin sem það á að hafa. Þannig getum við nú myndað mörg ný mengi, svo sem mengin

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} \quad \text{og} \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}.$$

Við þurftum sérstaka frumsendu til að tryggja tilvist sammengis mengja. Hins vegar nægir frumsenda um hlutmengi til að tryggja tilvist sniðmengis og mismunar mengja. Sniðmengi og mismun *tveggja* mengja má einfaldlega skilgreina með

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \in A : x \in B\}, \\ A \setminus B &:= \{x \in A : x \notin B\}. \end{aligned}$$

Gerum nú ráð fyrir að við viljum skilgreina sniðmengi allra mengja sem eru stök í gefnu mengi C. Það þýðir að við viljum mynda mengi allra staka x þannig að fullyrðingin

„fyrir sérhvert A er (ef $A \in C$, þá $x \in A$)“ sé sönn. Ef $C \neq \varnothing$, þá skilgreinir þessi fullyrðing mengi með tilliti til x, því að þá er til B þannig að $B \in C$, og ef fullyrðingin er sönn fyrir x, þá er $x \in B$. Ef hins vegar $C = \varnothing$, þá skilgreinir fullyrðingin *ekki* mengi með tilliti til x, því að *sérhvert* x fullnægir skilyrðinu „ef $A \in \varnothing$, þá er $x \in A$“; annars væru til stak x og mengi A þannig að $x \notin A$ og $A \in \varnothing$, en það er fráleitt, því að fullyrðingin „$A \in \varnothing$“ er alltaf ósönn. Ef nú fullyrðingin skilgreindi mengi með tilliti til x, þá yrði það mengi að innihalda sérhvert stak, en það getur ekki gerzt samkvæmt setningu (2.8).

Niðurstaðan er þá sú að við getum skilgreint sniðmengi allra mengja sem eru stök í gefnu mengi C *þá og því aðeins að* $C \neq \varnothing$.

(2.11) Skilgreining. *Gerum ráð fyrir að $C \neq \varnothing$. Við setjum þá*

$$\bigcap C := \{x : \text{fyrir sérhvert } A \text{ úr } C \text{ er } x \in A\}$$

*og köllum $\bigcap C$ **sniðmengi mengjanna í** C. Við setjum einnig*

$$A \cap B := \bigcap\{A, B\}$$

*og köllum $A \cap B$ **sniðmengi mengjanna** A **og** B.*

Ef $C \neq \varnothing$, þá má rita

$$\bigcap C = \bigcap\{A : A \in C\}.$$

Augljóslega er

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ og } x \in B\}.$$

F5. Frumsenda um veldismengi. Fyrir sérhvert mengi A er til mengi sem hefur sem stak sérhvert hlutmengi í menginu A.

Frumsendan **F5** segir að skilyrðið $X \subset A$ skilgreini mengi með tilliti til breytunnar X. Við getum því skilgreint:

(2.12) Skilgreining. *Látum A vera mengi. Við setjum*

$$\mathcal{P}(A) := \{X : X \subset A\}$$

*og köllum $\mathcal{P}(A)$ **veldismengi** mengisins A.*

§3. Fjölskyldur og varpanir

Fyrir stök a og b er

$$\{a, b\} = \{b, a\},$$

því að mengin $\{a, b\}$ og $\{b, a\}$ hafa nákvæmlega sömu stökin, nefnilega stökin a og b. Það skiptir engu máli á hvaða röð stök í mengi eru tiltekin. Nú viljum við hins vegar skilgreina *tvenndir*, þar sem röð stakanna á að skipta máli. Við viljum að slík tvennd sé *mengi*, því að allir hlutir sem við tölum um í mengjafræði eiga að vera mengi.

Til eru fleiri en ein aðferð til að skilgreina tvenndir í mengjafræði, en allar hafa þær einhverja ókosti í för með sér. Við förum hér þá leið að skilgreina tvenndir *tvisvar sinnum*. Fyrst notum við skilgreiningu sem er kennd við rússneska stærðfræðinginn Andrej N. Kolmogorov. Við notum þá skilgreiningu síðan til að skilgreina *fjölskyldur* og *varpanir*. Síðar notum við fjölskyldur til að skilgreina *venjulegar tvenndir*. Þessi aðferð hefur þann kost að við getum skilgreint venjulegar tvenndir, þrenndir, ferndir o. s. frv. með sama hætti.

(3.1) Skilgreining. *Látum a og b vera stök. Mengið*

$$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

kallast ***Kolmogorov-tvenndin með** a **í fyrsta sæti og** b **í öðru sæti**.*

(3.2) Setning. *Látum a, b, c, d vera stök. Við höfum*

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \text{ þá og því aðeins að } a = c \text{ og } b = d.$$

Sönnun: Ef $a = c$ og $b = d$, þá er ljóst að $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$. Gerum því ráð fyrir að $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ og setjum $A := \langle a, b\rangle$. Þá er

$$\bigcap A = \bigcap\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}.$$

Vegna $A = \langle c, d\rangle$ fæst með sama hætti að $\bigcap A = \{c\}$. Þar með er $\{a\} = \{c\}$ og því $a = c$. Ennfremur er $\bigcup A = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$ og $\bigcup A = \{c\} \cup \{c, d\} = \{c, d\}$. Vegna $a = c$ er $\{c, d\} = \{a, d\}$. Því er $\{a, b\} = \{a, d\}$. Þar með er $b \in \{a, d\}$. Ef $b \neq a$, þá fæst $b = d$, eins og sanna átti. Ef hins vegar $b = a$, þá fæst $\{b\} = \{a, b\} = \{a, d\}$. En þá er $d \in \{b\}$ og því $b = d$ einnig í þessu tilviki. □

Í kafla I skilgreindum við fjölskyldu óformlega þannig að við sögðum að hún væri gefin með því að tiltaka mengi I og fyrir sérhvert stak i úr menginu I tiltekið stak a_i. Við getum hugsað um slíka fjölskyldu sem forskrift sem úthlutar sérhverju staki i úr menginu I tilteknu staki a_i. Nú viljum við hins vegar skilgreina fjölskyldu sem tiltekna tegund af *mengi*. Það gerum við með því að athuga mengið F sem inniheldur sem stök nákvæmlega allar Kolmogorov-tvenndirnar $\langle i, a_i\rangle$, þar sem $i \in I$. Það að sérhverju staki i úr I sé aðeins úthlutað *einu* tilteknu staki a_i þýðir að hvenær sem $\langle i, a_i\rangle \in F$, $\langle j, a_j\rangle \in F$ og $i = j$, þá sé $a_i = a_j$. Þessi hugleiðing leiðir nú til eftirfarandi skilgreiningar:

(3.3) Skilgreining. ***Fjölskylda** er mengi F þannig að eftirfarandi tveimur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Sérhvert stak í menginu F er Kolmogorov-tvennd.*
(ii) *Ef $\langle a, b\rangle \in F$ og $\langle a, c\rangle \in F$, þá er $b = c$.*

Látum F vera fjölskyldu. Við sýnum nú að skilyrðin „til er b þannig að $\langle x,b\rangle \in F$“ og „til er a þannig að $\langle a,x\rangle \in F$“ skilgreini mengi með tilliti til x. Tökum fyrst eftir að $\{a,b\} \in \{\{a\},\{a,b\}\} = \langle a,b\rangle$, svo að $\langle a,b\rangle \in F$ hefur í för með sér að $\{a,b\} \in \bigcup F$ og þar með að $a,b \in \bigcup\bigcup F$. En þá er ljóst að $\bigcup\bigcup F$ er mengi sem inniheldur sérhvert stak x sem fullnægir öðru hvoru af skilyrðunum „til er b þannig að $\langle x,b\rangle \in F$“ eða „til er a þannig að $\langle a,x\rangle \in F$“, og þar með skilgreinir hvort skilyrðið um sig mengi. Þetta leyfir okkur nú að setja fram eftirfarandi skilgreiningu, sem sýnir meðal annars að við getum tekið upp þann ritátt sem við notuðum fyrir fjölskyldur í kafla I:

(3.4) Skilgreining. *Látum F vera fjölskyldu.*

(1) *Mengið*

$$I := \{x : \text{til er } b \text{ þannig að } \langle x,b\rangle \in F\}$$

kallast ***skilgreiningarmengi*** *eða* ***vísamengi*** *fjölskyldunnar F. Fyrir sérhvert stak i úr skilgreiningarmenginu I táknum við með*

$$F_i \quad \text{eða} \quad F(i)$$

stakið sem fullnægir skilyrðinu $\langle i,F_i\rangle \in F$, og við köllum stakið F_i ***gildi fjölskyldunnar*** *F* ***í stakinu*** *i. Við táknum fjölskylduna F einnig með*

$$(F_i)_{i\in I}.$$

(2) *Mengið*

$$\{x : \text{til er } a \text{ þannig að } \langle a,x\rangle \in F\}$$

kallast ***seiling*** *eða* ***gildamengi*** *fjölskyldunnar F. Við táknum það einatt með*

$$\{F_i : i \in I\},$$

þar sem I er skilgreiningarmengi fjölskyldunnar.

(3) *Við skilgreinum*

$$\bigcup_{i\in I} F_i := \bigcup\{F_i : i \in I\}.$$

Ef $I \neq \varnothing$, þá setjum við einnig

$$\bigcap_{i\in I} F_i := \bigcap\{F_i : i \in I\}.$$

(3.5) Athugasemdir. (1) Við leyfðum okkur í síðustu skilgreiningu að nota orðalag sem tíðkast í venjulegum stærðfræðitextum, og það gerum við oftast framvegis. En hér skulum við staldra við og skýra betur hvað átt er við. Þegar við segjum að við „táknum fjölskylduna F með $(F_i)_{i\in I}$“ er átt við eftirfarandi: Látum $\mathbf{F}$ vera heiti einhverrar fjölskyldu; þetta heiti getur verið samsett, og í því geta komið fyrir breytur. Látum $\mathbf{I}$ vera heiti á skilgreiningarmengi fjölskyldunnar sem ber heitið $\mathbf{F}$; ef breytur koma fyrir í heiti fjölskyldunnar $\mathbf{F}$, þá er venjulegt að sömu breytur komi fyrir í heiti skilgreiningarmengisins $\mathbf{I}$. Látum svo $\mathbf{i}$ vera breytu sem kemur ekki fyrir í heitunum $\mathbf{F}$ og $\mathbf{I}$. Þá lítum við á táknasamstæðuna $(\mathbf{F_i})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ sem nýtt heiti fjölskyldunnar sem ber heitið **F**. Látum til dæmis k vera náttúrlega tölu og $F(k)$ vera fjölskylduna sem hefur sem stök nákvæmlega allar Kolmogorov-tvenndir $\langle n, \sqrt{n-k}\rangle$, þar sem n er náttúrleg tala þannig að $n \geq k$. Skilgreiningarmengi hennar er mengið $I(k)$, sem er mengi allra náttúrlegra talna n þannig að $n \geq k$. Fyrir sérhvert n úr $I(k)$ er gildi fjölskyldunnar $F(k)$ í stakinu n talan $F(k)_n = \sqrt{n-k}$. Nú er „n“ breyta sem kemur ekki fyrir í heitunum „$F(k)$“ og „$I(k)$“, og því er samkvæmt skilgreiningunni heitið „$(F(k)_n)_{n\in I(k)}$ annað heiti fjölskyldunnar $F(k)$. Vegna $F(k)_n = \sqrt{n-k}$ lítum við einnig á heitið „$(\sqrt{n-k})_{n\in I(k)}$“ sem heiti fjölskyldunnar $F(k)$. Einnig eru „i“ og „j“ breytur sem koma ekki fyrir í heitunum „$F(k)$“ og „$I(k)$“, svo að fjölskyldan $F(k)$ hefur einnig heitin „$(\sqrt{i-k})_{i\in I(k)}$“ og „$(\sqrt{j-k})_{j\in I(k)}$“. En við megum *alls ekki* gefa fjölskyldunni heitið „$(\sqrt{k-k})_{k\in I(k)}$“, því að breytan „k“ kemur fyrir í heitunum „$F(k)$“ og „$I(k)$“.

Samskonar athugasemd á við um heitið „$\{F_i : i \in I\}$“.

(2) Tóma mengið er fjölskylda: Sérhvert stak þess er Kolmogorov-tvennd (annars væri til stak í tóma menginu sem er ekki Kolmogorov-tvennd, og það er fjarstæða), og fyrir $\langle a, b\rangle \in \varnothing$ og $\langle a, c\rangle \in \varnothing$ er $a = c$ (annars væru til Kolmogorov-tvenndir $\langle a, b\rangle$ og $\langle a, c\rangle$ sem eru stök í tóma menginu þannig að $a \neq c$, og það er einnig fjarstæða). Við getum því einnig kallað tóma mengið ***tómu fjölskylduna***. Tökum eftir að fyrir sérhvert heiti **A** og sérhverja breytu **i** sem kemur ekki fyrir í heitinu **A** er $(\mathbf{A_i})_{\mathbf{i}\in\varnothing}$ heiti á tómu fjölskyldunni.

(3.6) Setning. *Fjölskyldur $F = (F_i)_{i\in I}$ og $G = (G_j)_{j\in J}$ eru sama fjölskyldan þá og því aðeins að $I = J$ og fyrir sérhvert i úr I sé $F_i = G_i$.*

Sönnun: Ef F og G eru fjölskyldur og $F = G$, þá er ljóst (samkvæmt rökreglu um jafnaðarmerkið) að F og G hafa sama skilgreiningarmengi og taka sama gildi í öllum stökum úr skilgreiningarmenginu. Gerum því á hinn bóginn ráð fyrir að $I = J$ og að fyrir sérhvert i úr I sé $F_i = G_i$. Látum nú $x \in F$. Þá er x Kolmogorov-tvennd, svo að skrifa má $x = \langle i, b\rangle$. Þá er $i \in I$ og $b = F_i$. En nú er $I = J$, svo að $i \in J$, og auk þess er $G_i = F_i$, svo að $x = \langle i, G_i\rangle \in G$. Við höfum því sýnt að $F \subset G$. Með sama hætti sést að $G \subset F$, og því er $F = G$ samkvæmt frumsendu um umtak. □

Í kafla I skilgreindum við *margfeldi* fjölskyldu af mengjum. Við sýnum nú að tilvist þess er afleiðing af frumsendunum okkar: Látum $A = (A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu. Margfeldi fjölskyldunnar A á að vera mengi allra fjölskyldna $(a_i)_{i\in I}$ þannig að fyrir sérhvert i úr I sé $a_i \in A_i$. Til að sýna að slíkt mengi sé til nægir að sýna að til sé mengi B þannig að sérhver slík fjölskylda $(a_i)_{i\in I}$ sé stak í menginu B. En slík fjölskylda $a = (a_i)_{i\in I}$ er mengi af Kolmogorov-tvenndum $\langle i, b\rangle = \{\{i\}, \{i, b\}\}$ þannig að $i \in I$ og $b \in A_i$. Ef nú $i \in I$ og $b \in A_i$, þá er $b \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Mengin $\{i\}$ og $\{i, b\}$ eru hlutmengi í menginu $I \cup \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ og því stök í veldismenginu $\mathcal{P}(I \cup \bigcup\limits_{i\in I} A_i)$. Þar með er Kolmogorov-tvenndin $\langle i, b\rangle = \{\{i\}, \{i, b\}\}$ hlutmengi í veldismenginu $\mathcal{P}(I \cup \bigcup\limits_{i\in I} A_i)$ og því stak í veldismenginu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(I \cup \bigcup\limits_{i\in I} A_i))$. Að lokum er fjölskyldan a mengi af slíkum Kolmogorov-tvenndum og því hlutmengi í veldismenginu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(I \cup \bigcup_{i\in I} A_i))$; en þá er hún stak í veldismenginu

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(I \cup \bigcup_{i\in I} A_i))).$$

Þetta réttlætir eftirfarandi skilgreiningu:

(3.7) Skilgreining. *Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu. Mengi allra fjölskyldna $(a_i)_{i\in I}$ þannig að fyrir sérhvert i úr I sé $a_i \in A_i$ er kallað **margfeldi** fjölskyldunnar $(A_i)_{i\in I}$ og er táknað*

$$\prod_{i\in I} A_i.$$

Við getum nú sett fram frumsenduna um val:

F6. Frumsenda um val. Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu þannig að fyrir sérhvert i úr I sé $A_i \neq \varnothing$. Þá er $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu. Ef til er stak i úr I þannig að $A_i = \varnothing$, þá er $\prod_{i\in I} A_i = \varnothing$. En hvað gerist ef $I = \varnothing$; með öðrum orðum: hvað er margfeldi tómu fjölskyldunnar? Stak í margfeldinu $\prod_{i\in\varnothing} A_i$ verður að hafa tómt skilgreiningarmengi og getur því aðeins verið tóma fjölskyldan. En tóma fjölskyldan $(A_i)_{i\in\varnothing}$ er líka stak í margfeldinu $\prod_{i\in\varnothing} A_i$, því að fullyrðingin „fyrir sérhvert i úr $\varnothing$ er $A_i \in A_i$“ er augljóslega sönn; annars væri til stak i úr tóma menginu þannig að $A_i \notin A_i$, en það er fráleitt. Við höfum því sýnt að

$$\prod_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}.$$

Vörpun er sama og fjölskylda, nema hvað fyrir vörpun er fyrirfram tiltekið mengi sem gildi fjölskyldunnar eiga að vera í. Við getum því skilgreint:

(3.8) Skilgreining. ***Vörpun** er Kolmogorov-tvennd $\langle f, Y\rangle$, þar sem f er fjölskylda og Y er mengi þannig að seiling fjölskyldunnar f sé hlutmengi í Y; við köllum mengið Y **bakmengi** (eða **aðmengi**) vörpunarinnar $\langle f, Y\rangle$. **Skilgreiningarmengi** (eða **formengi** eða **frámengi**) vörpunar $\langle f, Y\rangle$ er skilgreiningarmengi fjölskyldunnar f. Vörpun $\langle f, Y\rangle$ með skilgreiningarmengi X er táknuð*

$$f : X \to Y,$$

*og við segjum að hún sé **vörpun frá menginu X í mengið Y**.*

Af setningum (3.2) og (3.6) leiðir þegar í stað:

(3.9) Setning. *Varpanir $f : X \to Y$ og $g : Z \to T$ eru sama vörpunin þá og því aðeins að $X = Z$, $Y = T$ og fyrir sérhvert x úr menginu X sé $f(x) = g(x)$.* □

(3.10) Setning. *Fyrir gefin mengi X og Y er til mengi sem inniheldur sem stök nákvæmlega allar varpanir $f : X \to Y$.*

Sönnun: Það nægir að sýna að til sé mengi sem inniheldur sem stak sérhverja vörpun frá X til Y, því að þá er setningin afleiðing af frumsendu um hlutmengi. Eins og í röksemdafærslu á undan skilgreiningu (3.7) sést að fjölskylda með skilgreiningarmengi X og seilingu sem er hlutmengi í menginu Y er stak í menginu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)))$. Ef nú $\langle f, Y\rangle$ er vörpun frá menginu X í mengið Y, þá eru f, Y stök í menginu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)))\cup\{Y\}$; þar með eru mengin $\{f\}$ og $\{f, Y\}$ stök í menginu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X\cup Y)))\cup\{Y\})$, og að lokum fæst

$$\langle f, Y\rangle = \{\{f\}, \{f, Y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))) \cup \{Y\})). \qquad \square$$

§4. Náttúrlegar tölur

Við viljum nú sjá hvernig skilgreina má náttúrlegu tölurnar í mengjafræði. Sérhver náttúrleg tala verður þá að vera mengi. Við förum hér eftir hugmynd ungverska stærðfræðingsins Johns von Neumann, en hún felst í því að skilgreina fyrst töluna 0 sem tóma mengið $\varnothing$, en láta sérhverja aðra náttúrlega tölu vera mengi allra náttúrlegu talnanna sem eru á undan henni í röðinni. Við skilgreinum því

$$\begin{aligned}
&0 := \varnothing,\\
&1 := \{0\} = \{\varnothing\} = 0 \cup \{0\},\\
&2 := \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 1 \cup \{1\},\\
&3 := \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = 2 \cup \{2\},\\
&4 := \{0, 1, 2, 3\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = 3 \cup \{3\}
\end{aligned}$$

o. s. frv. Með öðrum orðum viljum við skilgreina náttúrlegar tölur þannig að talan 0 sé tóma mengið $\varnothing$ og fyrir sérhverja náttúrlega tölu n sé næsta náttúrlega talan á eftir tölunni n mengið $n \cup \{n\}$.

(4.1) Skilgreining. *Fyrir sérhvert mengi x setjum við*

$$x^+ := x \cup \{x\}$$

og köllum mengið x^+ ***eftirfara*** *mengisins x.*

Nú viljum við geta tekið allar náttúrlegar tölur saman í mengi. En til þess þurfum við nýja frumsendu.

F7. Frumsenda um óendanlegt mengi. Til er mengi A þannig að $\varnothing \in A$ og fyrir sérhvert stak x þannig að $x \in A$ sé $x^+ \in A$.

(4.2) Skilgreining. *Köllum mengi A* ***eftirfaramengi*** *ef $\varnothing \in A$ og fyrir sérhvert stak x þannig að $x \in A$ sé $x^+ \in A$.*

Frumsendan **F7** segir því að til sé eftirfaramengi.

(4.3) Setning. *Látum C vera mengi af eftirfaramengjum þannig að $C \neq \varnothing$. Þá er sniðmengið $\bigcap C$ eftirfaramengi.*

Sönnun: Sérhvert stak A í C er eftirfaramengi. Því er $\varnothing \in A$ fyrir sérhvert stak A í C, og þar með er $\varnothing \in \bigcap C$. Gerum nú ráð fyrir að $x \in \bigcap C$. Þá er $x \in A$ fyrir sérhvert stak A í C. Þar sem sérhvert stak í C er eftirfaramengi er $x^+ \in A$ fyrir sérhvert stak A í C. En það þýðir einmitt að $x^+ \in \bigcap C$. Þar með er $\bigcap C$ eftirfaramengi. □

Samkvæmt frumsendu **F7** er til eftirfaramengi. Látum þá A vera eftirfaramengi og látum C_A vera mengi allra eftirfaramengja sem eru hlutmengi í menginu A. Þá er $C_A \neq \varnothing$, því að $A \in C_A$. Þar með er sniðmengið $\bigcap C_A$ eftirfaramengi. Gerum nú ráð fyrir að B sé eitthvert eftirfaramengi. Samkvæmt (4.3) er sniðmengið $A \cap B$ eftirfaramengi, og það er hlutmengi í A, og því er $\bigcap C_A \subset A \cap B \subset B$. Við höfum því sýnt að $\bigcap C_A$ eftirfaramengi og auk þess hlutmengi í sérhverju eftirfaramengi. En nú er ljóst að $\bigcap C_A$ er *eina* mengið sem hefur þessa eiginleika: Ef B er eitthvert eftirfaramengi sem er hlutmengi í sérhverju eftirfaramengi, þá er bæði $\bigcap C_A \subset B$ og $B \subset \bigcap C_A$, og því $B = \bigcap C_A$ samkvæmt frumsendu um umtak. Sér í lagi sjáum við að mengið $\bigcap C_A$ er óháð valinu á upphaflega eftirfaramenginu A, og við getum kallað það *minnsta eftirfaramengið*.

(4.4) Skilgreining. *Minnsta eftirfaramengið er táknað með*

$$\mathbb{N}$$

og kallað ***mengi náttúrlegu talnanna****, og stak í menginu $\mathbb{N}$ er kallað* ***náttúrleg tala****.*

(4.5) Setning. *Mengi náttúrlegu talnanna $\mathbb{N}$ hefur eftirfarandi eiginleika:*

(1) *Við höfum $0 \in \mathbb{N}$.*

(2) *Ef $n \in \mathbb{N}$, þá er $n^+ \in \mathbb{N}$.*

(3) *Ef A er hlutmengi í $\mathbb{N}$ þannig að $0 \in A$ og fyrir sérhvert stak n þannig að $n \in A$ gildi $n^+ \in A$, þá er $A = \mathbb{N}$.*

Sönnun: Samkvæmt skilgreiningu er $0 = \varnothing$, svo að liðir (1) og (2) segja að $\mathbb{N}$ sé eftirfaramengi, og liður (3) segir að ekkert eftirfaramengi geti verið eiginlegt hlutmengi í $\mathbb{N}$, svo að setningin er bein afleiðing af skilgreiningu mengisins $\mathbb{N}$. □

Minnumst þess að fyrir fullyrðingu $\mathbf{P}$ og heiti $\mathbf{a}$ er $\mathbf{P}_n[\mathbf{a}]$ fullyrðingin sem fæst með því að setja heitið $\mathbf{a}$ inn í stað breytunnar n (þar sem hún kemur fyrir frjáls) í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Við fáum nú auðveldlega:

(4.6) Setning (*Setning um sönnun með þrepun*). *Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðingu. Gerum ráð fyrir að eftirfarandi tveimur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Fullyrðingin $\mathbf{P}_n[0]$ er sönn.*
(ii) *Fullyrðingin „ef $n \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{P}$, þá $\mathbf{P}_n[n^+]$“ er sönn.*

Þá er fullyrðingin „fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er $\mathbf{P}$“ sönn.

Sönnun: Setjum $A := \{n \in \mathbb{N} : \mathbf{P}\}$. Skilyrði (i) og (ii) segja að A sé eftirfaramengi, og samkvæmt skilgreiningu er A hlutmengi í $\mathbb{N}$. Af lið (3) í setningu (4.5) leiðir að $A = \mathbb{N}$. En það þýðir einmitt að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$. $\square$

(4.7) Athugasemd. Síðasta setning gefur okkur mikilvæga aðferð til að sanna setningar um náttúrlegar tölur. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{P}$ sé einhver fullyrðing um ótiltekna náttúrlega tölu n. Við viljum sanna að fullyrðingin sé sönn fyrir sérhverja náttúrlega tölu n. Við getum þá notað síðustu setningu og sannað þetta með svokallaðri *þrepunarsönnun*. Til þess þurfum við aðeins að gera eftirfarandi:

(i) Við sönnum fyrst fullyrðinguna $\mathbf{P}_n[0]$. Þetta kallast ***þrepunarupphaf***.
(ii) Við gefum okkur þá forsendu að n sé einhver náttúrleg tala og að fullyrðingin $\mathbf{P}_n[0]$ sé sönn. Þetta er kallað ***þrepunarforsenda***. Út frá henni sönnum við síðan að fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$ sé sönn. Sú ályktun er kölluð ***þrepunarskref*** og er venjulega erfiðasti hlutinn af sönnuninni.

Þegar þessu er lokið megum við samkvæmt síðustu setningu álykta að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn fyrir sérhverja náttúrlega tölu n.

(4.8) Hjálparsetning. *Látum n vera náttúrlega tölu.*
(1) *Við höfum $n^+ \neq 0$.*
(2) *Ef $n \neq 0$, þá er til náttúrleg tala m þannig að $n = m^+$.*
(3) *Ef $x \in n$, þá er $x \in \mathbb{N}$.*
(4) *Ef $x \in n$, þá er $x \subset n$.*
(5) *Ef $m \in \mathbb{N}$ og $n^+ = m^+$, þá er $n = m$.*
(6) *Við höfum $n \notin n$.*
(7) *Fyrir náttúrlega tölu x er $x \in n$ þá og því aðeins að $x \subset n$ og $x \neq n$.*
(8) *Ekki er til náttúrleg tala m þannig að $n \in m$ og $m \in n^+$.*

Sönnun: Liður (1) er bein afleiðing af þeirri staðreynd að $n \in n \cup \{n\} = n^+$.

(2) Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „$n = 0$ eða til er m þannig að $m \in \mathbb{N}$ og $m^+ = n$“, og sönnum með þrepun að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$. Augljóslega er fullyrðining $\mathbf{P}_n[0]$ sönn. Gefum okkur nú að fullyrðingin „$n \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{P}$“ sé sönn og sýnum að þá er fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$ einnig sönn. En $\mathbf{P}_n[n^+]$ er fullyrðingin „$n^+ = 0$ eða til er m þannig að $m \in \mathbb{N}$ og $m^+ = n^+$“, og hún er augljóslega sönn vegna forsendunnar $n \in \mathbb{N}$.

(3) Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „ef $x \in n$, þá er $x \in \mathbb{N}$“ og sönnum með þrepun að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$. Nú er $\mathbf{P}_n[0]$ fullyrðingin „ef $x \in 0$, þá er $x \in \mathbb{N}$“, og hún er augljóslega sönn, annars væri til stak x í $0 = \varnothing$ þannig að $x \notin \mathbb{N}$, sem er fráleitt. Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin „$n \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{P}$“ sé sönn og sýnum að þá er fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$, með öðrum orðum fullyrðingin „ef $x \in n^+$, þá er $x \in \mathbb{N}$“, einnig sönn. Látum því $x \in n^+ = n \cup \{n\}$. Þá er annaðhvort $x \in n$ og þar með $x \in \mathbb{N}$ vegna forsendunnar $\mathbf{P}$, eða $x = n$ og þar með $x \in \mathbb{N}$, af því að gefið var að $n \in \mathbb{N}$.

(4) Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „ef $x \in n$, þá $x \subset n$“ og sönnum með þrepun að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$. Nú er $\mathbf{P}_n[0]$ fullyrðingin „ef $x \in \varnothing$, þá $x \subset \varnothing$“, og hún er augljóslega sönn; annars væri til stak x í tóma menginu sem væri

ekki hlutmengi í tóma menginu, og það getur ekki staðizt, af því að tóma mengið hefur engin stök. Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin „$n \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{P}$“ sé sönn og sýnum að þá er fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$ sönn. Fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$ er fullyrðingin „ef $x \in n^+$, þá er $x \subset n^+$“. Gerum því ráð fyrir að $x \in n^+ = n \cup \{n\}$. Þá er annaðhvort $x \in n$ eða $x = n$. Af $x \in n$ og fullyrðingunni $\mathbf{P}$ leiðir að $x \subset n$, og ef $x = n$, þá er ljóslega $x \subset n$. Því gildir $x \subset n$ í báðum tilvikum. En $n \subset n^+$, og því er einnig $x \subset n^+$.

(5) Gerum ráð fyrir að $n^+ = m^+$. Þar sem $n \in n^+ = m^+ = m \cup \{m\}$ er annaðhvort $n \in m$ eða $n = m$. Ef $n \in m$, þá er $n \subset m$ samkvæmt lið (4), og því er ljóst að $n \subset m$ í báðum tilvikum. Með sama hætti sést að $m \subset n$, og því er $n = m$ samkvæmt frumsendu um umtak.

(6) Við sönnum fullyrðinguna „$n \notin n$“ með þrepun. Augljóst er að $0 \notin 0$. Gefum okkur nú að $n \notin n$ og sýnum að $n^+ \notin n^+$. Gerum ráð fyrir að svo sé ekki og að $n^+ \in n^+$. Þá væri $n^+ = n^+ \cup \{n^+\} = n^{++}$. Samkvæmt lið (5) er þá $n = n^+ = n \cup \{n\}$, en þá fæst $n \in n$ í mótsögn við forsendu.

(7) Gerum ráð fyrir að $x \in n$. Þá er $x \subset n$ samkvæmt lið (4), og auk þess er $x \neq n$, því að annars væri $n \subset n$ í mótsögn við lið (6). Við sýnum hina áttina með þrepun yfir n: Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „ef $x \in \mathbb{N}$, $x \subset n$ og $x \neq n$, þá er $x \in n$“. Fullyrðingin $\mathbf{P}_n[0]$ er augljóslega sönn. Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin „$n \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{P}$“ sé sönn og sýnum að þá er fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$, með öðrum orðum fullyrðingin „ef $x \in \mathbb{N}$, $x \subset n^+$ og $x \neq n^+$, þá er $x \in n^+$“, einnig sönn. Látum því x vera náttúrlega tölu þannig að $x \subset n^+$ og $x \neq n^+$. Þá er $n \notin x$, annars væri bæði $n \in x$ og jafnframt $n \subset x$ samkvæmt lið (4) og þar með $n^+ = n \cup \{n\} \subset x \subset n^+$, og þá væri $x = n^+$ í mótsögn við forsendu. En af $x \subset n^+ = n \cup \{n\}$ og $n \notin x$ leiðir $x \subset n$. Ef $x \neq n$, þá er $x \in n \subset n^+$ vegna forsendunnar $\mathbf{P}$. Ef hins vegar $x = n$, þá er ljóst að $x \in n^+$. Því er $x \in n^+$ í báðum tilvikum.

(8) Gerum ráð fyrir að m sé náttúrlega tala þannig að $n \in m$ og $m \in n^+$. Af $n \in m$ leiðir samkvæmt lið (7) að n er eiginlegt hlutmengi í m, sér í lagi er $m \neq n$; og af $m \in n^+ = n \cup \{n\}$ og $m \neq n$ leiðir að $m \in n$, svo að m er eiginlegt hlutmengi í n. En þá er n eiginlegt hlutmengi í sjálfu sér, sem fær ekki staðizt. Því getur slíkt stak m ekki verið til. □

(4.9) Skilgreining. *Látum m og n vera náttúrlegar tölur. Við segjum að talan m sé **minni eða jöfn tölunni** n og skrifum*

$$m \leq n$$

*ef $m \subset n$. Við segjum að talan m sé **minni en talan** n og skrifum*

$$m < n$$

ef $m \leq n$ og $m \neq n$; með öðrum orðum ef m er eiginlegt hlutmengi í menginu n.

Samkvæmt lið (7) í hjálparsetningu (4.8) er $m < n$ þá og því aðeins að $m \in n$.

(4.10) Setning. *Látum m, n, k vera náttúrlegar tölur. Þá gildir:*

(1) *Við höfum $n \leq n$.*

(2) *Ef $m \leq n$ og $n \leq m$, þá er $m = n$.*

(3) *Ef* $m \leq n$ *og* $n \leq k$, *þá er* $m \leq k$.
(4) *Annaðhvort er* $m \leq n$ *eða* $n \leq m$.
(5) *Fyrir sérhverja náttúrlega tölu* n *er* $n < n^+$ *og ekki er til náttúrleg tala* m *þannig að* $n < m < n^+$*; með öðrum orðum er* n^+ *minnsta náttúrlega talan sem er stærri en talan* n.

Sönnun: Liðir (1), (2) og (3) eru augljósar afleiðingar af eiginleikum hlutmengja.

(4) Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðinguna „ef $m \in \mathbb{N}$ og ekki $m \subset n$, þá er $n \subset m$“ og sönnum með þrepun að fullyrðingin $\mathbf{P}$ er sönn fyrir sérhverja náttúrlega tölu n. Fullyrðingin $\mathbf{P}_n[0]$ er augljóslega sönn. Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin „$n \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{P}$“ sé sönn og sýnum að þá er fullyrðingin $\mathbf{P}_n[n^+]$ einnig sönn. Látum því m vera náttúrlega tölu þannig að ekki sé $m \subset n^+$ og sýnum að $n^+ \subset m$. Að ekki gildi $m \subset n^+$ þýðir að til er stak x úr m þannig að $x \notin n^+ = n \cup \{n\}$. Þá er sér í lagi $x \notin n$, og því er ekki $m \subset n$, en þar með er $n \subset m$ samkvæmt forsendunni $\mathbf{P}$. En nú er $n \neq m$ (annars væri $m \subset n$), svo að $n \in m$ samkvæmt lið (7) í hjálparsetningu (4.8). Þar með er bæði $n \subset m$ og $n \in m$, svo að $n^+ = n \cup \{n\} \subset m$ eins og sýna átti.

(5) Vegna $n \in n \cup \{n\}$ er $n < n^+$, og liður (8) í setningu (4.8) segir að ekki sé til náttúrleg tala m þannig að $n < m < n^+$. □

Setningin segir að venzlin $\leq$ á mengi náttúrlegu talnanna $\mathbb{N}$ sé *línuleg röðun* á menginu $\mathbb{N}$. Við getum nú sannað eftirfarandi mikilvæga setningu:

(4.11) Setning um minnsta stak. *Sérhvert hlutmengi* A *í* $\mathbb{N}$ *þannig að* $A \neq \varnothing$ *hefur minnsta stak.*

Sönnun: Látum A vera hlutmengi í $\mathbb{N}$ þannig að A hafi ekkert minnsta stak og setjum

$$B := \{n \in \mathbb{N} : n < m \text{ fyrir sérhvert stak } m \text{ úr menginu } A\}.$$

Þá er ljóst að $0 \in B$, annars væri $0 \in A$, og þá væri 0 minnsta stak í A. Gerum nú ráð fyrir að $n \in B$ og sýnum að $n^+ \in B$: Ef svo væri ekki, þá væri til stak m í A þannig að $m \leq n^+$. Þar sem A hefur ekkert minnsta stak er til stak k í A þannig að $k < m$. Þá er líka $k < n^+$. Vegna $n \in B$ er $n < k$, svo að við höfum $n < k < n^+$; en það er í beinni mótsögn við lið (5) í setningu (4.10). Þar með er $n^+ \in B$. En af því getum við nú ályktað að $B = \mathbb{N}$. Á hinn bóginn er ljóst að $A \cup B = \varnothing$ og $A \in \mathbb{N}$, svo að af því leiðir að $A = \varnothing$. □

Sem afleiðingu fáum við dálítið almennari útgáfu af setningunni um sönnun með þrepun.

(4.12) Setning (*Setning um sönnun með þrepun með breiðri þrepunarforsendu*). *Látum* $\mathbf{P}$ *vera fullyrðingu. Gerum ráð fyrir að eftirfarandi tveimur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Fullyrðingin* $\mathbf{P}_n[0]$ *er sönn.*
(ii) *Fullyrðingin „ef* $n \in \mathbb{N}$ *og* $\mathbf{P}_n[k]$ *fyrir öll* k *úr* $\mathbb{N}$ *þannig að* $k < n$*, þá* $\mathbf{P}$*“ er sönn.*

Þá er fullyrðingin „fyrir sérhvert n *úr* $\mathbb{N}$ *er* $\mathbf{P}$*“ sönn.*

Sönnun: Setjum $A = \{n \in \mathbb{N} : \text{ekki } \mathbf{P}\}$. Gerum ráð fyrir að fullyrðingin „fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er $\mathbf{P}$“ sé ekki sönn. Þá er til n úr $\mathbb{N}$ þannig að fullyrðingin „ekki $\mathbf{P}$“ sé sönn, svo að mengið A er ekki tómt. Samkvæmt setningu um minnsta stak hefur A minnsta stak; köllum það n. Samkvæmt forsendu (i) getur n ekki verið stakið 0. Fyrir sérhvert k úr $\mathbb{N}$ þannig að $k < n$ er $k \notin A$, og það þýðir að fullyrðingin $\mathbf{P}_n[k]$ er sönn. En þá segir forsenda (ii) að fullyrðingin $\mathbf{P}$ sé sönn. Það þýðir aftur að $n \notin A$, í mótsögn við að n er minnsta stakið í menginu A. Þess vegna hlýtur mengið A að vera tómt, og það þýðir að fullyrðingin „fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er $\mathbf{P}$“ er sönn. □

(4.13) Athugasemd. Við höfum nú skilgreint röðun á mengi allra náttúrlegra talna. Það er því ekkert því til fyrirstöðu að endurtaka hér skilgreiningu (I.2.5) úr kafla I og setja

$$[\![m, n]\!] := \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq n\}$$

fyrir $m, n \in \mathbb{N}$, skilgreina síðan ***venjulega tvennd*** eins og við gerðum í kafla I, nefnilega sem fjölskyldu

$$(a_1, a_2) := (a_j)_{j \in [\![1,2]\!]},$$

og með sama hætti almenna n-***und*** sem fjölskyldu

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (a_j)_{j \in [\![1,n]\!]}.$$

Þessi skilgreining hefur til dæmis þann kost að „venjulega mengjamargfeldið“

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1 \text{ og } a_2 \in A_2\},$$

eins og það var skilgreint í (I.2.7) verður ekkert annað en mengjamargfeldið $\prod\limits_{j \in [\![1,2]\!]} A_j$, eins og við höfum skilgreint það í (3.7) Okkur er nú líka óhætt að gleyma Kolmogorov-tvenndunum, sem við notuðum til að skilgreina fjölskyldur, og nota einungis „venjulegar tvenndir“ upp frá þessu.

(4.14) Setning (*Setning um skilgreiningu með þrepun*). *Látum A vera mengi, a vera stak í menginu A og $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vera fjölskyldu af vörpunum $h_n : A \to A$. Þá er til nákvæmlega ein vörpun $f : \mathbb{N} \to A$ þannig að*

$$f(0) = a$$

og

$$f(n^+) = h_n(f(n))$$

fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$.

Sönnun: Við sönnum fyrst: Fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er til nákvæmlega ein vörpun $f_n : [\![0, n]\!] \to A$ þannig að $f_n(0) = a$ og $f_n(k^+) = h_k(f_n(k))$ fyrir sérhvert k úr $\mathbb{N}$ þannig að $0 \leq k < n$. Við sönnum þetta með þrepun yfir n.

Athugum fyrst að $[\![0, 0]\!] = \{0\}$. Vörpun $\{0\} \to A$ ákvarðast ótvírætt af gildi sínu í stakinu 0. Við getum því skilgreint $f_0 : [\![0, 0]\!] \to A$ með því að setja $f_0(0) := a$. Greinilega er þetta eina vörpunin sem fullnægir skilyrðunum.

Gerum nú ráð fyrir að við höfum sannað fullyrðinguna fyrir gefna náttúrlega tölu n. Látum $f_n : [\![0, n]\!] \to A$ vera vörpunina sem fullnægir skilyrðunum í fullyrðingunni. Nú er $[\![0, n^+]\!] = [\![0, n]\!] \cup \{n^+\}$ og $n^+ \notin [\![0, n]\!]$. Við getum því skilgreint vörpun $f_{n^+} : [\![0, n^+]\!] \to A$ með því að setja

$$f_{n^+}(k) := \begin{cases} f_n(k) & \text{ef } k \in [\![0, n]\!], \\ h_n(f_n(n)) & \text{ef } k = n^+. \end{cases}$$

Þá er $f_{n^+}(0) = f_n(0) = a$. Ef $k \in \mathbb{N}$ og $0 \leq k < n$, þá er $f_{n^+}(k^+) = f_n(k^+) = h_k(f_n(k)) = h_k(f_{n^+}(k))$, og að lokum er $f_{n^+}(n^+) = h_n(f_n(n)) = h_n(f_{n^+}(n))$. Þar með er ljóst að f_{n^+} fullnægir skilyrðunum í fullyrðingunni.

Ef $g_{n^+} : [\![0, n^+]\!] \to A$ er önnur vörpun sem fullnægir sömu skilyrðum og f_{n^+}, þá sést að einskorðunin $g_{n^+} \mid [\![0, n]\!]$ fullnægir sömu skilyrðum og f_n. Samkvæmt þrepunarforsendu er því $g_{n^+} \mid [\![0, n]\!] = f_n = f_{n^+} \mid [\![0, n]\!]$. Þá fæst einnig $g_{n^+}(n^+) = h_n(g_{n^+}(n)) = h_n(f_n(n)) = f_{n^+}(n^+)$. En þar með er $g_{n^+} = f_{n^+}$. Fullyrðingin er því sönnuð, og auk þess höfum við sýnt að fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er $f_{n^+} \mid [\![0, n]\!] = f_n$.

Skilgreinum nú vörpun $f : \mathbb{N} \to A$ með $f(n) := f_n(n)$. Þá er $f(0) = f_0(0) = a$ og fyrir sérhverja náttúrlega tölu n er $f(n^+) = f_{n^+}(n^+) = h_n(f_n(n)) = h_n(f(n))$. Þar með fullnægir vörpunin f skilyrðunum í setningunni. Gerum nú ráð fyrir að $g : \mathbb{N} \to A$ sé önnur vörpun sem fullnægir sömu skilyrðum. Sýnum með þrepun að $g(n) = f(n)$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$: Við höfum $g(0) = a = f(0)$. Gerum því ráð fyrir að $g(n) = f(n)$ fyrir einhverja gefna tölu n. Þá er $g(n^+) = h_n(g(n)) = h_n(f(n)) = f(n^+)$.

Þar með höfum við sýnt að $g = f$, og sönnuninni er lokið. $\square$

(4.15) Athugasemd. Við höfum nú sett fram sjö frumsendur fyrir mengjafræði og sýnt að þær nægja til að búa til flest af þeim mengjum sem á þarf að halda, og þar á meðal mengi náttúrlegu talnanna $\mathbb{N}$. Við höfum sýnt að náttúrlegu tölurnar fullnægja eftirfarandi skilyrðum:

(i) Stakið 0 er náttúrleg tala.
(ii) Hverri náttúrlegri tölu n er úthlutað annarri náttúrlegri tölu n^+, sem kallast *eftirfari* náttúrlegu tölunnar n.
(iii) Ef m og n eru náttúrlegar tölur og $m^+ = n^+$, þá er $m = n$.
(iv) Talan 0 er ekki eftirfari neinnar náttúrlegrar tölu; með öðrum orðum er $n^+ \neq 0$ fyrir sérhverja náttúrlega tölu n.
(v) Ef A er mengi af náttúrlegum tölum þannig að $0 \in A$ og þannig að $n \in A$ leiði til n^+ úr A, þá er A mengi allra náttúrlegra talna.

Við höfum einnig sannað setningu sem leyfir okkur að skilgreina varpanir með þrepun. Nú má sýna að eiginleikarnir í liðum (i)–(v) nægja til að lýsa kerfi náttúrlegu talnanna: Tvö talnakerfi sem fullnægja þessum skilyrðum eru „nákvæmlega eins“:

(4.16) Setning. *Látum M vera mengi, θ vera stak og gerum ráð fyrir að eftirfarandi fimm eiginleikum sé fullnægt:*

(i′) *Við höfum $\theta \in M$.*
(ii′) *Sérhverju staki x úr menginu M má úthluta öðru staki x' úr M, sem við köllum eftirfara staksins x.*

(iii′) *Ef* $x \in M$, $y \in M$ *og* $x' = y'$, *þá er* $x = y$.
(iv′) *Ef* $x \in M$, *þá er* $x' \neq \theta$.
(v′) *Ef* B *er hlutmengi í* M *þannig að* $\theta \in B$ *og annig að* $x \in B$ *leiði til* $x' \in B$, *þá er* $B = M$.

Þá er til nákvæmlega ein vörpun $g : \mathbb{N} \to M$ *þannig að*

$$g(0) = \theta \quad \textit{og} \quad g(n^+) = g(n)' \quad \textit{fyrir öll } n \textit{ úr } \mathbb{N}.$$

Þessi vörpun g *er gagntæk, og fyrir öll* n *úr* $\mathbb{N}$ *gildir*

$$g(n) = x \quad \textit{þá og því aðeins að} \quad g(n^+) = x'.$$

Sönnun: Skilyrði (ii′) ber að skilja þannig að við höfum vel skilgreinda vörpun $f : M \to M$ sem varpar sérhverju staki x á eitthvert stak sem við köllum x'. Samkvæmt setningu (4.14) um skilgreiningu með þrepun er til nákvæmlega ein vörpun $g : \mathbb{N} \to M$ þannig að $g(0) = \theta$ og $g(n^+) = f(g(n)) = g(n)'$ fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$.

Við sýnum fyrst að vörpunin g er eintæk: Setjum

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \text{ef } m \in \mathbb{N} \text{ og } g(m) = g(n), \text{ þá er } n = n\}.$$

Það nægir að sýna að $A = \mathbb{N}$. Tökum þá fyrst eftir að $0 \in A$: Ef $m \in \mathbb{N}$ og $g(m) = g(0) = \theta$, þá er $m = 0$; annars væri samkvæmt lið (2) í (4.8) til tala k úr $\mathbb{N}$ þannig að $m = k^+$; en þá væri $g(m) = g(k^+) = g(k)' \neq \theta$ samkvæmt (iv′), sem er mótsögn við forsendu. Gerum nú ráð fyrir að $n \in A$ og sýnum að $n^+ \in A$: Látum m vera stak í $\mathbb{N}$ þannig að $g(m) = g(n^+)$. Þá er $m \neq 0$, því að annars væri $\theta = g(0) = g(n^+) = g(n)'$ í mótsögn við (iv′). Samkvæmt lið (2) í (4.8) er því til tala k úr $\mathbb{N}$ þannig að $m = k^+$. Þá er $g(k)' = g(k^+) = g(m) = g(n^+) = g(n)'$, og því er $g(k) = g(n)$ samkvæmt (iii′). En nú er $n \in A$, svo að $k = n$ og þar með er $m = k^+ = n^+$. Við höfum því sýnt að $n^+ \in A$. En samkvæmt lið (3) í setningu (4.5) er $A = \mathbb{N}$, eins og sýna átti.

Sýnum næst að vörpunin g er átæk: Tökum fyrst eftir að $\theta = g(0) \in g[\mathbb{N}]$. Gerum nú ráð fyrir að $x \in g[\mathbb{N}]$; þá er til stak n úr $\mathbb{N}$ þannig að $x = g(n)$, og af því leiðir að $x' = g(n)\prime = g(n^+) \in g[\mathbb{N}$. Þetta sýnir að mengið $B := g[\mathbb{N}]$ fullnægir forsendunum í skilyrði (v′), og því er $g[\mathbb{N}] = M$, og það þýðir einmitt að vörpunin g er átæk.

Látum nú $n \in \mathbb{N}$ og $x \in M$. Ef $g(n) = x$, þá er ljóst að $g(n^+) = g(n)' = x\prime$. Ef á hinn bóginn $g(n^+) = x'$, þá er $g(n)' = g(n^+) = x'$ og því $g(n) = x$ samkvæmt (iii′). □

En þar sem þessir fimm eiginleikar gefa fullkomna lýsingu á kerfi náttúrlegu talnanna (innan þeirrar mengjafræði sem við erum að athuga), þá er okkur óhætt að gleyma hvernig náttúrlegu tölurnar voru skilgreindar, því að við þurfum framvegis ekki að nota neina eiginleika náttúrlegu talnanna aðra en þá sem eru teknir fram í þessum fimm eiginleikum.

Sem dæmi sýnum við hvernig skilgreina má samlagningu og margföldun náttúrlegra talna.

(4.17) Setning. *Til er nákvæmlega ein vörpun* $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *þannig að fyrir öll* m *og* n *úr* $\mathbb{N}$ *gildi*

$$\sigma(m, 0) = m \quad \textit{og} \quad \sigma(m, n^+) = \sigma(m, n)^+.$$

Sönnun: Látum $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vera vörpunina sem er gefin með $h(n); = n^+$. Samkvæmt setningu (4.14) er til nákvæmlega ein vörpun $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ þannig að $f_m(0) = m$ og $f_m(n^+) = h(f_m(n)) = f_m(n)^+$; og við setjum $\sigma(m,n) := f_m(n)$. Ef $\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er önnur vörpun þannig að $\tau(m,n) = m$ og $\tau(m,n^+) = \tau(m,n)^+$ fyrir öll m og n úr $\mathbb{N}$, þá fæst fyrir gefið m úr $\mathbb{N}$ vörpun $g_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ með því að setja $g_m(n) := \tau(m,n)$. Þá er $g_m(0) = m$ og $g_m(n^+) = g_m(n)^+$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$, svo að $g_m = f_m$. En þá er $\tau(m,n) = g_m(n) = f_m(n) = \sigma(m,n)$ fyrir öll m og n úr $\mathbb{N}$, svo að $\tau = \sigma$. $\square$

(4.18) Skilgreining. *Við köllum vörpunina σ úr setningu* (4.17) ***samlagningu**. Fyrir m, n úr $\mathbb{N}$ skrifum við*

$$(n + m) := \sigma(m,n)$$

*og köllum $(m + n)$ **summu** eða **samtölu** talnanna m og n. Við skrifum einnig*

$$n + m \quad \text{í stað} \quad (m + n)$$

ef ekki er hætta á misskilningi.

Skilyrðin í setningu (4.17) má nú skrifa þannig:

$$m + 0 = m \quad \text{og} \quad m + n^+ = (m + n)^+.$$

(4.19) Athugasemd. Svigarnir í rithættinum „$(m + n)$“ eru hafðir til að tryggja að rétt sé lesið úr flóknum táknasamstæðum. Hins vegar er venja að sleppa svigunum ef engin hætta er á slíkum misskilningi.Til dæmis er að jafnaði alltaf óhætt að sleppa yztu svigum í samsettu heiti og skrifa til dæmis „$(n + m) + k$“ í stað „$((n + m) + k)$“.

Sýnum fyrst til gamans:

(4.20) Setning. $2 + 2 = 4$.

Sönnun: Samkvæmt skilgreiningu er $2 = 0^{++}$ og $4 = 0^{++++}$. En samkvæmt eiginleikunum sem skilgreina samlagninguna er

$$2 + 2 = 0^{++} + 0^{++} = (0^{++} + 0^+)^+ = (0^{++} + 0)^{++} = 0^{++++} = 4. \qquad \square$$

(4.21) Setning. (1) *Fyrir allar náttúrlegar tölur m er*

$$m + 1 = 1 + m = m^+.$$

(2) *Fyrir allar náttúrlegar tölur m, n, k gildir **tengireglan***

$$(m + n) + k = m + (n + k).$$

(3) *Fyrir allar náttúrlegar tölur m og n gildir **víxlreglan***

$$m + n = n + m.$$

(4) *Fyrir allar náttúrlegar tölur m, n og k gildir **styttireglan***

$$\text{ef} \quad m + k = n + k, \quad \text{þá er} \quad m = n.$$

Sönnun: (1) Samkvæmt skilgreiningu er $1 = 0^+$. Því er $m + 1 = m + 0^+ = (m + 0)^+ = m^+$. Jöfnuna $1 + m = m^+$ sönnum við með þrepun: Fullyrðingin er sönn fyrir $m = 0$, því að $1 + 0 = 1 = 0^+$. Ef fullyrðingin er sönn fyrir eitthvert gefið m, þá er $1 + m^+ = (1 + m)^+ = m^{++}$, svo að fullyrðingin er einnig sönn fyrir m^+. En þá er hún sönn fyrir öll m úr $\mathbb{N}$ samkvæmt setningu um sönnun með þrepun.

(2) Látum m og n úr $\mathbb{N}$ vera gefin og sönnum með þrepun að fyrir sérhvert k úr $\mathbb{N}$ er $(m + m) + k = m + (n + k)$. Fullyrðingin er sönn fyrir $k = 0$ því að $(m + n) + 0 = m + n = m + (n + 0)$. Gerum því ráð fyrir að hún sé sönn fyrir einhverja tölu k. Þá fæst $(m + m) + k^+ = ((m + n) + k)^+ = (m + (n + k))^+ = m + (n + k)^+ = m + (m + k^+)$, svo að fullyrðingin er einnig sönn fyrir k^+. En þá er hún sönn fyrir öll k úr $\mathbb{N}$ samkvæmt setningu um sönnun með þrepun.

(3) Sýnum fyrst að $m + 0 = 0 + m$ fyrir öll m úr $\mathbb{N}$. Við höfum $m + 0 = m$ samkvæmt skilgreiningu, þannig að það nægir að sýna að $0 + m = m$ fyrir öll m, og við sönnum það með þrepun. Fullyrðingin er augljóslega sönn fyrir $m = 0$. Ef fullyrðingin er sönn fyrir eitthvert tiltekið m, þá fæst $0 + m^+ = (0 + m)^+ = m^+$, svo að fullyrðingin er einnig sönn fyrir m^+. En þá er hún sönn fyrir sérhvert m úr $\mathbb{N}$

Látum nú m vera fast og sýnum með þrepun að fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ sé $m + n = n + m$. Við vorum að enda við að sýna að fullyrðingin er sönn fyrir $n = 0$. Gerum því ráð fyrir að hún sé sönn fyrir tiltekið n. Þá er $m + n^+ = (m + n)^+ = (n + m)^+ = n + m^+ = n + (1 + m) = (n + 1) + m = n^+ + m$, og því er fullyrðingin einnig sönn fyrir n^+ og þar með fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$.

(4) Við látum m og n vera föst og sýnum með þrepun að fullyrðingin er sönn fyrir sérhvert k úr $\mathbb{N}$. Hún er augljóslega sönn fyrir $k = 0$, því að af $m + 0 = n + 0$ leiðir $m = m + 0 = n + 0 = n$. Gerum þá ráð fyrir að hún sé sönn fyrir tiltekið k og sýnum að hún sé sönn fyrir k^+: Látum því $m + k^+ = n + k^+$. Þá er $(m + k)^+ = (n + k)^+$ og því $m + k = n + k$. En samkvæmt þrepunarforsendu er þá $m = n$. $\square$

(4.22) Athugasemdir. (1) Samkvæmt lið (1) í síðustu setningu er

$$m^+ = m + 1,$$

og því megum við alltaf skrifa „$m + 1$“ í stað „m^+“, og sá ritháttur er miklu algengari, eins og kunnugt er. Við notum samt rith/áttinn „m^+“ enn um stund, nefnilega þangað til við höfum lokið við að skilgreina margföldun náttúrlegra talna.

(2) Samkvæmt lið (2) í setningunni er óhætt að skrifa

$$m + n + k$$

svigalaust, því að sama er hvort það er lesið sem $(m + n) + k$ eða sem $m + (n + k)$.

Við getum líka skilgreint margföldun náttúrlegra talna með svipuðum hætti og samlagningu; sönnun næstu setningar er nánast eins og sönnun setningar (4.17) og er þvi eftirlátin lesanda:

(4.23) Setning. *Til er nákvæmlega ein vörpun* $\mu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *þannig að fyrir öll* m *og* n *úr* $\mathbb{N}$ *gildi*

$$\mu(m, 0) = 0 \quad \textit{og} \quad \mu(m, n^+) = \mu(m, n) + m. \qquad \square$$

(4.24) Skilgreining. *Vörpunin μ úr setningu* (4.23) *kallast* ***margföldun****. Fyrir m, n úr $\mathbb{N}$ skrifum við*

$$(m \cdot n) := \mu(m, n)$$

og köllum $(m \cdot n)$ ***margfeldi*** *talnanna m og n. Við skrifum einnig*

$$m \cdot n \quad \textit{eða jafnvel} \quad mn$$

í stað $(m \cdot n)$ ef ekki er hætta á misskilningi.

(4.25) Athugasemdir. (1) Svigarnir í táknasamstæðunni „$(m \cdot n)$“ eru, eins og fyrir samlagningu, til að tryggja að rétt sé lesið úr flóknum táknasamstæðum, en eins og þar leyfum við okkur að sleppa þeim ef tryggt er að það leiði ekki til misskilnings. Við getum sleppt ennþá fleiri svigum með því að koma okkur saman um að margföldun skuli ávallt framkvæma á unda samlagningu, ef svigar skera ekki úr. Til dæmis er

$$m \cdot n + k$$

ævinlega lesið sem „$((m \cdot n) + k)$“, en ekki sem „$(m \cdot (n + k))$“.

Við leyfum okkur einnig að sleppa margföldunarpunktinum í tákninu „$m \cdot n$“, ef það veldur ekki misskilningi, og það er venjulega óhætt ef að minnst kosti önnur talnanna m og n er skrifuð með bókstöfum. Þannig skrifum við „ab“ í stað „$a \cdot b$“, eða nánar tiltekið í stað „$(a \cdot b)$“, og „$2a$“ í stað „$2 \cdot a$“. En ef bæði m og n eru *ákveðnar* tölur skrifaðar mað *tölustöfum*, þá er punktinum ekki sleppt. Til dæmis er ekki óhætt að skrifa „22“ í stað „$2 \cdot 2$“.

(2) Skilyrðin í setningu (4.23) má nú rita

$$m \cdot 0 = 0 \quad \text{og} \quad m \cdot n^+ = m \cdot n + m,$$

og seinna skilyrðið má raunar einnig rita

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

Við byrjum aftur á að sanna einfalda staðreynd:

(4.26) Setning. $2 \cdot 2 = 4$.

Sönnun: Með því að nota regluna „$m \cdot n^+ = m \cdot n + m$“ tvisvar og regluna „$m \cdot 0 = 0$“ einu sinni fæst

$$2 \cdot 2 = 0^{++} + 0^{++} = 0^{++} \cdot 0^+ + 0^{++} = 0^{++} \cdot 0 + 0^{++} + 0^{++} = 0 + 2 + 2 = 2 + 2 = 4,$$

eins og sýna átti. □

(4.27) Setning. (1) *Fyrir allar náttúrlegar tölur m er*

$$1 \cdot m = m \cdot 1 = m.$$

(2) *Fyrir allar náttúrlegar tölur m, n, k gildir* ***tengireglan***

$$(mn)k = m(nk).$$

(3) *Fyrir allar náttúrlegar tölur* m *og* n *gildir* ***víxlreglan***

$$mn = nm.$$

(4) *Fyrir allar náttúrlegar tölur* m, n *og* k *gilda* ***dreifireglurnar***

$$(m+n)k = mk + nk \quad \textit{og} \quad m(n+k) = mn + mk.$$

(5) *Fyrir allar náttúrlegar tölur* m, n *og* k *þannig að* $k \neq 0$ *gildir* ***styttireglan***

$$\textit{ef} \quad mk = nk, \quad \textit{þá er} \quad m = n.$$

(6) *Ef* m, n *eru náttúrlegar tölur þannig að* $mn = 0$*, þá er annaðhvort* $m = 0$ *eða* $n = 0$.

Sönnun: Við sönnum liði setningarinnar í annarri röð en þeir standa.

Sönnum fyrst lið (1): Við höfum $m \cdot 1 = m \cdot 0^+ = m \cdot 0 + m = 0 + m = m + 0 = m$. Jöfnuna $1 \cdot m = m$ sönnum við með þrepun yfir m: Fullyrðingin er rétt fyrir $m = 0$, því að $1 \cdot 0 = 0$ samkvæmt fyrra skilyrðinu í setningu (4.23). Gerum nú ráð fyrir að fullyrðingin sé rétt fyrir eitthvert tiltekið m. Þá er $1 \cdot m^+ = 1 \cdot m + 1 = m + 1 = m^+$, svo að fullyrðingin er einnig rétt fyrir m^+.

Sönnum næst fyrri dreifiregluna í lið (4). Við látum m, n vera fastar náttúrlegar tölur og sýnum að $(m+n)k = mk + nk$ fyrir öll k með þrepun yfir k: Fullyrðingin er augljóslega rétt fyrir $k = 0$. Gerum nú ráð fyrir að hún sé rétt fyrir eitthvert tiltekið k. Þá er $(m+n)k^+ = (m+n)k + (m+n) = (mk+nk) + (m+n) = (mk+m) + (nk+n) = mk^+ + nk^+$, svo að fullyrðingin er einnig rétt fyrir k^+.

Sönnum næst lið (3). Sýnum fyrst með þrepun að $0 \cdot m = 0$ fyrir sérhvert m úr $\mathbb{N}$. Tilvikið $m = 0$ er innifalið í fyrsta skilyrðinu í setningu (4.24). Gerum þá ráð fyrir að fullyrðingin sé sönn fyrir eitthvert tiltekið m. Þá er $0 \cdot m^+ = 0 \cdot m + 0 = 0 + 0 = 0$. Þar með er fullyrðingin rétt fyrir öll m, og af fyrra skilyrðinu í setningu (4.23) fæst nú að $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$. Látum síðan m vera fast og sönnum fullyrðinguna $mn = nm$ með þrepun yfir n. Tilvikið $n = 0$ er það sem við vorum að enda við að sanna. Gerum því ráð fyrir að fullyrðingin sé rétt fyrir eitthvert tiltekið n, þá fæst með hjálp fyrri dreifireglunnar, sem við höfum þegar sannað, að $n^+ \cdot m = (n+1)m = nm + 1m = nm + m = mn + m = mn^+$, og því er fullyrðingin rétt fyrir n^+, og við getum dregið þá ályktun að hún sé rétt fyrir öll n.

Nú getum við sannað seinni dreifiregluna í lið (4) með því að nota fyrri dreifiregluna og víxlregluna sem við vorum að sanna. Við fáum $m(n+k) = (n+k)m = nm + km = mn + mk$.

Sönnum næst lið (2) með því að láta m, n vera fastar náttúrlegar tölur og sanna fullyrðinguna $(mn)k = m(nk)$ með þrepun yfir k. Fullyrðingin er auljóslega rétt fyrir $k = 0$. Gefum því ráð fyrir að hún sé rétt fyrir eitthvert tiltekið k og notum þrepunarforsenduna og dreifireglu til að sjá að $(mn)k^+ = (mn)k + mn = m(nk) + mn = m(nk+n) = n(nk^+)$.

Sönnum næst lið (6). Ef $m \neq 0$ og $n \neq 0$, þá eru samkvæmt lið (2) í hjálparsetningu (4.8) til tölur k og j þannig að $m = k^+$ og $n = j^+$. En þá er $mn = k^+ \cdot j^+ = k^+ \cdot j + k^+ = (k^+ \cdot j + k)^+$, og þessi síðasta tala er ekki 0 samkvæmt lið (1) í hjálparsetningu (4.8).

Sönnum að lokum lið (5). Við sýnum með þrepun yfir n að fullyrðingin „ef $k \neq 0$ og $mk = nk$, þá er $m = n$“. Sýnum fyrst að fullyrðingin er rétt fyrir $n = 0$: Gerum því ráð fyrir að $k \neq 0$ og að $mk = 0k$. Nú höfum við sýnt að $0k = 0$, svo að $mk = 0$ og $k \neq 0$. En þá er $m = 0$ samkvæmt lið (6), og við höfum sýnt að fullyrðingin er rétt fyrr $n = 0$. Gerum þá ráð fyrir að hún sé rétt fyrir eitthvert tiltekið n og sýnum að hún sé rétt fyrir n^+. Gerum því ráð fyrir að $k \neq 0$ og $mk = n^+ \cdot k$. Vegna $n^+ \neq 0$ og $k \neq 0$ er $n^+k \neq 0$ samkvæmt lið (6) og þar með er $m \neq 0$. En þá er til náttúrleg tala j þannig að $m = j^+$. Þá fæst með þeim reglum sem þegar hafa verið sannaðar að $jk + k = jk + 1k = (j+1)k = j^+ \cdot k = mk = n^+k = (n+1)k = nk + 1k = knk + k$. En þá fæst $jk = nk$ samkvæmt styttireglu fyrir samlagningu, og þá getum við notað þrepunarforsenduna til að álykta að $j = n$. En þá er $m = j^+ = n+$, og við höfum sýnt að fullyrðingin er einnig rétt fyrir tölua n^+ □

Nú þegar náttúrlegu tölurnar hafa verið skilgreindar og einföldustu eiginleikar þeirra sannaðir, þá getum við notað þær til að búa til önnur talnakerfi hvert af öðru. Næst má búa til mengi allra heilla talna $\mathbb{Z}$, þar næst mengi ræðu talnanna $\mathbb{Q}$, þar næst mengi rauntalnanna $\mathbb{R}$ og síðan mengi tvinntalnanna $\mathbb{C}$. Í hverju skrefi þurfum við ekki að nota neinar mengjaaðgerðir aðrar en þær sem við höfum þegar skilgreint út frá frumsendunum. Við ætlum ekki að lýsa nánar hér hvernig að þessu er farið, það var ekki tilgangurinn með þessu hefti, og um það má lesa í mörgum bókum.

§5. Lokafrumsendur

Þær frumsendur mengjafræðinnar sem við höfum lýst hér að framan eru í stórum dráttum eins og þær frumsendur sem Ernst Zermelo setti fyrst fram í grein sinni *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I* frá árinu 1908. Meginmunurinn er sá, að Zermelo gerði ekki nákvæma grein fyrir þeim „leyfilegu fullyrðingum“ sem nota má í frumsendugripinu **F2** um hlutmengi. Annar munur, sem minna máli skiptir, er sá að Zermelo skilgreindi náttúrlegu tölurnar sem mengin $0 := \varnothing$, $1 := \{\varnothing\}$, $2 := \{\{\varnothing\}\}$, $3 := \{\{\{\varnothing\}\}\}$, og almennar $n^+ := \{n\}$. Við kusum að nota heldur skilgreiningu von Neumanns, af því að hún er þægilegri, auk þess sem hún kemur heim við skilgreiningu „raðtalna“, sem fjallað verður um í kafla III.

Árið 1922 lagði Abraham Fraenkel til breytingar á frumsendukerfi Zermelos. Hann vildi tiltaka skýrt hvers konar fullyrðingar megi nota til að skilgreina hlutmengi, eins og við höfum lýst hér á undan. En þar að auki lagði hann til að taka upp tvær nýjar frumsendur. Þannig varð til sú mengjafræði sem nú á dögum er kölluð „Zermelo-Fraenkel-mengjafræði“.

Nýju frumsendurnar tvær eru sárasjaldan notaðar í hversdagslegri stærðfræði, en það þarf á þeim að halda í mengjafræði, til dæmis við athuganir á svonefndum „óendanlegum raðtölum“ og „óendanlegum fjöldatölum“, sem við ætlum að ræða lauslega í kafla III. Við tilgreinum þær hér í lok þessa kafla fyrir þá vilja vita af þeim, þótt þeir ætli sér ekki að lesa næsta kafla; en auðvitað líka fyrir þá sem það ætla að gera, þótt við ræðum þessar frumsendur ítarlegar í þriðja kafla..

Fyrri frumsendan er raunar frumsendugrip, líkt og frumsendugripið um hlutmengi. Það má orða það með fleiri en einum hætti, en hvernig sem það er gert snýst það um tilvist fjölskyldna. Við veljum því þann kost að setja frumsendugripið þannig fram að það fullyrði beinlínis slíka tilvist, þótt venjan sé að orða það dálíið óbeinna:

F8. Frumsendugrip um innsetningu. Látum $\mathbf{P}$ vera fullyrðingu og $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{F}$ vera ólíkar breytur þannig að breyturnar $\mathbf{A}$ og $\mathbf{F}$ komi ekki fyrir í fullyrðingunni $\mathbf{P}$. Þá er fullyrðingin „ef fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ er til nákvæmlega eitt $\mathbf{y}$ þannig að $\mathbf{P}$, þá er til er fjölskylda $\mathbf{F}$ þannig að fyrir öll $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ sé $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{F}$ þá og því aðeins að $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ og $\mathbf{P}$“ frumsenda.

Seinni frumsendan er oft sett fram með frekar ógegnsæjum hætti þannig:

F9. Regluleikafrumsenda. Fyrir sérhvert mengi A þannig að $A \neq \varnothing$ er til mengi B þannig að $B \in A$ og $A \cap B = \varnothing$.

Við sýnum í næsta kafla að regluleikafrumsendan er (að öðrum frumsendum mengjafræðinnar gefnum) jafngild því að ekki sé til óendanleg fjölskylda $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ þannig að $A_{n+1} \in A_n$ fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$. Af frumsendunni leiðir að ekkert mengi getur verið stak í sjálfu sér: Ef $X \in X$, þá fengist slík óendanleg fjölskylda (A_n) með því að setja $A_n := X$ fyrir sérhvert n. Lesandinn getur fundið sönnun þessa í næsta kafla. Regluleikafrumsenduna má einnig túlka þannig að sérhvert mengi megi búa til úr tóma menginu með þeim mengjaaðgerðum sem skilgreina má út frá öðrum frumsendum mengjafræðinnar, rétt eins og við bjuggum náttúrlegu tölurnar til með því að beita einföldum mengjaaðgerðum á tóma mengið.

Kafli III

Nokkrar niðurstöður úr mengjafræði

§1. Hjálparsetning Zorns og velröðunarsetning Zermelos

Frumsendan um val hefur löngum verið umdeildasta frumsenda mengjafræðinnar. Sumum finnst hún vera augljóslega sönn: Rifjum upp að hún segir að fyrir gefna fjölskyldu $(A_i)_{i \in I}$ af mengjum þannig að $A_i \neq \varnothing$ sé til fjölskylda $(a_i)_{i \in I}$ af stökum þannig að $a_i \in A_i$ fyrir sérhvert i úr I, og við getum fengið slíka fjölskyldu með því að velja af handahófi eitt stak a_i úr hverju af mengjunum A_i, og það skiptir engu máli hvernig við veljum, því að við viljum einungis vita að slík fjölskylda sé til.

Öðrum finnst ekkert sjálfsagt að unnt sé að velja slíka fjölskyldu af handahófi þegar mengið I er óendanlegt; hvernig eigum við að fara að því að velja óendanlega marga hluti? Þeir segja að ekki megi notfæra sér tilvist slíkrar fjölskyldu nema unnt sé að gera grein fyrir því hvernig hún er búin til.

Verjendur frumsendunnar geta þá sagt á móti að ekki megi láta nafn frumsendunnar villa fyrir sér: Þótt við tölum um að velja eitt stak úr hverju mengi, þá þýði það ekki að við þurfum að framkvæma valið persónulega: Það nægir okkur að vita að í sérhverju mengi A_i sé til eitthvert stak a_i, og þá sé tilvist fjölskyldunnar $(a_i)_{i \in I}$ tryggð.

En allar slíkar vangaveltur eru til lítils. Sýnt hefur verið að frumsenduna um val er hvorki unnt að sanna né afsanna útfrá öðrum frumsendum mengjafræðinnar. Það duga því engin rök með eða móti; við getum aldrei komizt að því með slíkum bollaleggingum hvort frumsendan er „sönn“ eða ekki; og það má jafnvel efast um að spurningin um

„sannleika“ hennar hafi yfirleitt nokkra merkingu. Það er hins vegar ljóst að mörgum hefur þótt hún svo eðlileg að þeir notfærðu sér hana ómeðvitað í röksemdafærslum löngu áður en hún var beinlínis sett fram.

Sá sem setti frumsenduna fyrst fram var Ernst Zermelo, sem notaði hana til að sanna *velröðunarsetningu* sína. Gagnrýnendur létu ekki á sér standa; en í ljós kom, þegar að var gáð, að sumir þeirra höfðu notað frumsenduna í eigin verkum án þess að gera sér grein fyrir því. Það sem gagnrýnendur frumsendunnar hafa einna helzt sett fyrir sig er að með því að nota hana má sýna fram á tilvist margra undarlegra fyrirbæra sem er engin leið að lýsa nákvæmlega hvernig líta út. Dæmi um slíkt eru *ómælanleg* hlutmengi í rauntalnasléttunni $\mathbb{R}^2$, það er að segja mengi sem eru það flókin að þau geta ekki haft neitt flatarmál. Slík mengi er engin leið að búa til nema með því að nota frumsenduna um val. Önnur fræg og sérkennileg niðurstaða, sem einungis er unnt að sanna með því að nota frumsenduna um val, er svokölluð *Banach-Tarski-þversögn*, sem segir að skipta megi kúlu í þrívíðu rúmi upp í endanlega marga hluta sem má raða saman aftur þannig að úr verði tvær kúlur af sömu stærð og sú fyrsta; hlutarnir verða hins vegar að vera svo flóknir að engin leið er til að lýsa þeim hverjum fyrir sig, og þeir geta ekki heldur haft neitt ákveðið rúmmál.

Ein afleiðing frumsendunnar um val sem er sérlega þægileg til notkunar er setning sem venja er að kalla *hjálparsetningu Zorns*. Við ætlum að setja hana fram og sýna að hún er raunar *jafngild* frumsendunni um val að öðrum frumsendum mengjafræðinnar gefnum.

Af því að við erum í þessari grein að fjalla um fullyrðingar sem eru *jafngildar* frumsendunni um val, þá reynum við að gæta þess að taka fram hvenær valfrumsendan er notuð.

Gerum ráð fyrir að við höfum raðað mengi X með röðuninni $\leq$ og látum A vera hlutmengi í menginu X. Eins og bent var á í kafla I gefur röðunin á X af sér röðun á hlutmenginu A. Nú gerur það gerzt að röðunin sem hlutmengið A fær með þessum hætti sé línuleg, án þess að röðunin á menginu X sé línuleg.

(1.1) Skilgreining. *Látum X vera raðað mengi með röðun $\leq$.* ***Keðja*** *í raðaða menginu X er hlutmengi A í X þannig að A sé línulega raðað með tilliti til röðunarinnar á A sem röðunin $\leq$ gefur af sér.* ***Hákeðja*** *í raðaða menginu X er keðja í X sem er hástak í mengi allra keðja í X, þar sem við röðum því mengi með hlutmengjavenzlunum; með öðrum orðum er hákeðja í X keðja í X sem er ekki eiginlegt hlutmengi í neinni annarri keðju í X.*

Látum X vera raðað mengi. Þá er tóma mengið $\varnothing$ keðja í X og augljóslega minnsta keðjan í X. Mengið af öllum keðjum í X hefur því minnsta stak, sem er þá jafnframt eina lágstakið.

Ljóst er að hlutmengi í keðju er einnig keðja.

Gerum ráð fyrir að X sé raðað mengi og að A sé keðja í menginu X þannig að A sé *ekki* hákeðja. Það þýðir að keðjan A er *eiginlegt* hlutmengi í annarri keðju B. Látum b vera stak í fyllimenginu $B \setminus A$. Þá er mengið $A \cup \{b\}$ hlutmengi í B og þar með keðja. Við sjáum því að fyrir sérhverja keðju A í X sem er ekki hákeðja er til stak b í $X \setminus A$ þannig að mengið $A \cup \{b\}$ sé keðja.

(1.2) Setning (*Hákeðjulögmál Hausdorffs*). *Að valfrumsendunni gefinni gildir: Sérhvert raðað mengi hefur hákeðju.*

Sönnun: Látum X vera raðað mengi og $\mathcal{X}$ vera mengið af öllum keðjum í X. Mengið $\mathcal{X}$ er ekki tómt, því að $\varnothing \in \mathcal{X}$. Látum A vera keðju í X, þ. e. stak í $\mathcal{X}$, og setjum

$$\widehat{A} := \{x \in X : A \cup \{x\} \in \mathcal{X}\}.$$

Ljóslega er $A \subset \widehat{A}$. Einnig er ljóst að keðjan A er hákeðja þá og því aðeins að $\widehat{A} = A$, eða með öðrum orðum þá og því aðeins að $\widehat{A} \setminus A = \varnothing$.

Látum $\mathcal{P}$ vera mengi allra hlutmengja í X sem eru ekki tóm. Samkvæmt frumsendu um val er til fjölskylda $(a_Y)_{Y \in \mathcal{P}}$ af stökum í X þannig að $a_Y \in Y$ fyrir sérhvert Y úr $\mathcal{P}$. Skilgreinum nú vörpun

$$g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

með því að setja

$$g(A) := \begin{cases} A \cup \{a_{\widehat{A} \setminus A}\} & \text{ef } \widehat{A} \neq A, \\ A & \text{ef } \widehat{A} = A. \end{cases}$$

Þá er ljóst að $A \subset g(A)$ og að $g(A)$ inniheldur í hæsta lagi einu staki meira en mengið A. Einnig er ljóst að A er hákeðja þá og því aðeins að $A = g(A)$. Við þurfum því að sýna að til sé stak A í $\mathcal{X}$ þannig að $A = g(A)$.

Menginu $\mathcal{X}$ er raðað með hlutmengjavenzlunum. Við þurfum nú að tala um hlutmengi í $\mathcal{X}$. Þegar við segjum að slíkt hlutmengi $\mathcal{K}$ sé keðja í $\mathcal{X}$ meinum við að menginu $\mathcal{K}$ sé línulega raðað af hlutmengjavenzlunum; með öðrum orðum að fyrir öll stök A og B úr $\mathcal{K}$ sé annaðhvort $A \subset B$ eða $B \subset A$. Látum nú $\mathcal{K}$ vera keðju í $\mathcal{X}$. Fyrir sérhvert stak A í $\mathcal{K}$ er þá A keðja í X. Við höldum því fram að sammengið

$$Y := \bigcup_{A \in \mathcal{K}} A$$

sé keðja í X. Til að sjá það látum við x og y vera stök í Y. Þá eru til stök A og B í $\mathcal{K}$ þannig að $x \in A$ og $y \in B$. Þar sem $\mathcal{K}$ er keðja í $\mathcal{X}$ er annaðhvort $A \subset B$ eða $B \subset A$. Ef $A \subset B$, þá er $x \in B$ og $y \in B$. Þar sem B er keðja er annaðhvort $x \leq y$ eða $y \leq x$. Sömuleiðis ef $B \subset A$, þá er $x \in A$ og $y \in A$ og því annaðhvort $x \leq y$ eða $y \leq x$.

Komum okkur nú saman um að segja að hlutmengi $\mathcal{T}$ í $\mathcal{X}$ sé ***turn*** ef eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:

(i) Við höfum $\varnothing \in \mathcal{T}$.
(ii) Ef $A \in \mathcal{T}$, þá er $g(A) \in \mathcal{T}$.
(iii) Ef $\mathcal{K}$ er keðja í $\mathcal{T}$, þá er $\bigcup_{A \in \mathcal{K}} A \in \mathcal{T}$.

Mengið $\mathcal{X}$ sjálft er turn, svo að mengi allra turna er ekki tómt. Við getum því myndað sniðmengið $\mathcal{T}_0$ af öllum turnum. Það er ljóslega sjálft turn, og því minnsti turninn í þeim skilningi að það er hlutmengi í sérhverjum turni. Við sjáum því: Ef $\mathcal{T}$ er turn og $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$, þá er $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

Við viljum nú sýna að mengið $\mathcal{T}_0$ er keðja í $\mathcal{X}$, með öðrum orðum að fyrir öll stök A og C úr $\mathcal{T}_0$ sé annaðhvort $A \subset C$ eða $C \subset A$. Til þess skilgreinum við mengið

$$\mathcal{S} := \{C \in \mathcal{T}_0 : \text{fyrir sérhvert stak } A \text{ í } \mathcal{T}_0 \text{ er } A \subset C \text{ eða } C \subset A\};$$

með öðrum orðum er $\mathcal{S}$ mengi allra staka í $\mathcal{T}_0$ sem eru sambærileg við sérhvert stak í $\mathcal{T}_0$. Við þurfum þá að sýna að $\mathcal{S} = \mathcal{T}_0$. Þar sem $\mathcal{S}$ er samkvæmt skilgreiningu hlutmengi í $\mathcal{T}_0$ nægir að sýna að $\mathcal{S}$ sé turn.

Nú er $\varnothing \subset A$ fyrir sérhvert stak A í $\mathcal{T}_0$, svo að $\varnothing \in \mathcal{S}$, og því fullnægir $\mathcal{S}$ skilyrði (i) í skilgreiningunni á turni.

Til að sýna að $\mathcal{S}$ fullnægi skilyrði (ii) í skilgreiningunni á turni látum við $C \in \mathcal{S}$ og þurfum að sýna að $g(C) \in \mathcal{S}$. Til þess setjum við

$$\mathcal{U}_C := \{A \in \mathcal{T}_0 : A \subset C \text{ eða } g(C) \subset A\}$$

og byrjum á að sýna að $\mathcal{U}_C$ er turn. Ljóst er að $\varnothing \in \mathcal{U}_C$, því að $\varnothing \subset C$, svo að $\mathcal{U}_C$ fullnægir skilyrði (i). Til að sýna að það fullnægi skilyrði (ii) látum við $A \in \mathcal{U}_C$ og sýnum að $g(A) \in \mathcal{U}_C$. Við höfum þá gefið að $A \subset C$ eða $g(C) \subset A$ og þurfum að sanna að $g(A) \subset C$ eða $g(C) \subset g(A)$. Við skiptum þeirri sönnun í þrjú tilvik:

(a) Fyrsta tilvik: Mengið A er *eiginlegt* hlutmengi í menginu C. Við sýnum að þá er $g(A) \subset C$. Þar sem $A \in \mathcal{T}_0$ og $\mathcal{T}_0$ er turn er $g(A) \in \mathcal{T}_0$. Þar sem $C \in \mathcal{S}$ er annaðhvort $g(A) \subset C$ eða $C \subset g(A)$. Í fyrra tilvikinu höfum við einmitt það sem við þurfum að sýna; við getum því gert ráð fyrir að við séum í síðara tilvikinu og að C sé *eiginlegt* hlutmengi í menginu $g(A)$, því að fyrir $C = g(A)$ værum við í fyrra tilvikinu. Þá er samkvæmt forsendu mengið A eiginlegt hlutmengi í menginu C, sem aftur er eiginlegt hlutmengi í menginu $g(A)$. En það þýðir að mengið $g(A)$ hlyti að innihalda að minnsta kosti tvö stök sem eru ekki stök í menginu A, og það er í mótsögn við skilgreininguna á menginu $g(A)$, því að samkvæmt henni inniheldur $g(A)$ í hæsta lagi eitt stak sem er ekki í menginu A.

(b) Annað tilvik: Við höfum $A = C$. Þá er $g(A) = g(C)$ og sér í lagi $g(C) \subset g(A)$.

(c) Þriðja tilvik: Við höfum $g(C) \subset A$. Þar sem $A \subset g(A)$ fæst þá $g(C) \subset g(A)$.

Þar með hefur verið sýnt að $\mathcal{U}_C$ fullnægir skilyrði (ii).

Til að sýna að $\mathcal{U}_C$ fullnægi skilyrði (iii) látum við $\mathcal{K}$ vera keðju í $\mathcal{U}_C$ og setjum $B := \bigcup_{A \in \mathcal{K}} A$. Við þurfum að sýna að $B \subset C$ eða $g(C) \subset B$. Gerum því ráð fyrir að B sé ekki hlutmengi í C. Þá er til A þannig að $A \in \mathcal{K}$ og A er ekki hlutmengi í C. En þar sem $A \in \mathcal{U}_C$ er $g(C) \subset A$, og augljóslega er $A \subset B$, svo að $g(C) \subset B$, eins og sýna átti.

Þar með höfum við sýnt að mengið $\mathcal{U}_C$ er turn, og samkvæmt skilgreiningu er það hlutmengi í $\mathcal{T}_0$. Þar með er $\mathcal{U}_C = \mathcal{T}_0$. En af því leiðir að $g(C) \in S$: Fyrir sérhvert stak A í $\mathcal{T}_0$ er $A \in \mathcal{U}_C$, og þar með er annaðhvort $A \subset C$ eða $g(C) \subset A$. Í seinna tilvikinu er ljóst að $g(C) \in \mathcal{S}$, en í fyrra tilvikinu höfum við bæði $A \subset C$ og $C \subset g(C)$, og því $A \subset g(C)$, svo að $g(C) \in \mathcal{S}$ einnig í því tilviki.

Þar með höfum við sýnt að mengið $\mathcal{S}$ fullnægir skilyrðinu (ii) í skilgreiningunni á turni.

Sýnum þá næst að $\mathcal{S}$ fullnægir einnig skilyrði (iii): Látum $\mathcal{K}$ vera keðju í $\mathcal{S}$ og setjum $D := \bigcup_{C \in \mathcal{K}} C$. Við þurfum að sýna að $D \in \mathcal{S}$, með öðrum orðum að fyrir sérhvert A

úr $\mathcal{T}_0$ sé annaðhvort $A \subset D$ eða $D \subset A$. Látum því A vera stak í $\mathcal{T}_0$ þannig að D sé ekki hlutmengi í A. Samkvæmt skilgreiningu á D er til stak C í $\mathcal{K}$ þannig að C sé ekki hlutmengi í A. Þar sem $C \in \mathcal{S}$ er annaðhvort $A \subset C$ eða $C \subset A$, og þar sem C er ekki hlutmengi í A er $A \subset C$. En ljóslega er $C \subset D$, svo að $A \subset D$.

Við höfum því sýnt að $\mathcal{S}$ er turn. Samkvæmt ofansögðu þýðir það að $\mathcal{T}_0$ er keðja. Nú er $\mathcal{T}_0$ einnig turn, svo að samkvæmt skilyrði (iii) er mengið $E := \bigcup_{A \in \mathcal{T}_0} A$ stak í $\mathcal{T}_0$. Samkvæmt skilyrði (ii) er þá einnig $g(E) \in \mathcal{T}_0$. Þar sem E er sammengi allra mengjanna sem eru stök í $\mathcal{T}_0$ er $g(E) \subset E$. En einnig er $E \subset g(E)$, því að það gildir fyrir allar keðjur. Þar með er $g(E) = E$, og það þýðir að E er hákeðja í $\mathcal{X}$. $\square$

(1.3) Setning (*Hjálparsetning Zorns*). *Látum X vera raðað mengi þannig að sérhver keðja í X hafi yfirstak. Þá hefur mengið X hástak.*

Sönnun: Við sýnum að hjálparsetning Zorns er afleiðing af hákeðjulögmáli Hausdorffs án þess að nota frumsenduna um val að öðru leyti. Látum því X vera raðað mengi þannig að sérhver keðja í X hafi yfirstak. (Tökum eftir að af þessu leiðir sér í lagi að tóma mengið, sem er keðja í X, hefur yfirstak, en það þýðir einfaldlega að mengið X er ekki tómt.) Samkvæmt hákeðjulögmáli Hausdorffs hefur mengið X hákeðju A. Látum c vera yfirstak fyrir A. Við sýnum að c er hástak í X. Annars væri til stak x í X þannig að $c < x$. Þá er $a < x$ fyrir sérhvert stak a í A, og af því leiðir að mengið $B := A \cup \{x\}$ er keðja í X þannig að A er eiginlegt hlutmengi í B, í mótsögn við að A er hákeðja í X. $\square$

(1.4) Skilgreining. *Við segjum að röðun $\leq$ á mengi X sé* ***velröðun*** *og jafnframt að raðaða mengið $(X, \leq)$ sé* ***velraðað mengi*** *ef röðunin $\leq$ er línuleg og sérhvert hlutmengi A í X sem er ekki tómt hefur minnsta stak.*

(1.5) Athugasemd. Setningin (II.4.11) um minnsta stak fyrir náttúrlegar tölur segir nú að venjulega röðunin á náttúrlegu tölunum sé velröðun.

(1.6) Setning (*Velröðunarsetning Zermelos*). *Sérhvert mengi hefur velröðun.*

Sönnun: Við sýnum að velröðunarsetning Zermelos er afleiðing af hjálparsetningu Zorns án þess að nota valfrumsenduna að öðru leyti. Látum X vera mengi. Látum $\mathcal{X}$ vera mengi allra tvennda $(A, \leq_A)$ þannig að A sé hlutmengi í X og $\leq_A$ sé velröðun á menginu A. Skilgreinum röðun $\leq$ á menginu $\mathcal{X}$ með því að segja að $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ þá og því aðeins að annaðhvort sé $(A, \leq_A) = (B, \leq_B)$ eða til sé stak b úr B þannig að $A = \{x \in B : x <_B b\}$ og fyrir öll stök x og y úr A gildi $x \leq_A y$ þá og því aðeins að $x \leq_B y$; með öðrum orðum er $\leq_A$ röðunin á A sem röðunin $\leq_B$ á B gefur af sér á hlutmenginu A í menginu B.

Við sýnum að sérhver keðja í raðaða menginu $\mathcal{X}$ hefur yfirstak. Gerum því ráð fyrir að $\mathcal{K}$ sé keðja í menginu $\mathcal{X}$. Myndum mengið

$$Y := \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{K}} A.$$

Látum x og y vera stök í Y. Þá er til stak $(A, \leq_A)$ í $\mathcal{K}$ þannig að $x \in A$ og $y \in A$; til að sjá það veljum við stök $(A, \leq_A)$ og $(B, \leq_B)$ í $\mathcal{K}$ þannig að $x \in A$ og $y \in B$. Þar sem

$\mathcal{K}$ er keðja í $\mathcal{X}$ er annaðhvort $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ eða $(B, \leq_B) \leq (A, \leq_A)$. Sér í lagi er þá annaðhvort $A \subset B$ eða $B \subset A$. Í fyrra tilvikinu er $x \in B$ og $y \in B$, en í síðara tilvikinu er $x \in A$ og $y \in A$.

Skilgreinum nú röðun $\leq_Y$ á menginu Y með eftirfarandi hætti: Fyrir x, y úr Y veljum við $(A, \leq_A)$ úr $\mathcal{K}$ þannig að $x \in A$ og $y \in A$ og setjum $x \leq_Y y$ þá og því aðeins að $x \leq_A y$. Auðséð er að þessi skilgreining er óháð valinu á $(A, \leq_A)$ og að röðunin $\leq_Y$ sem er þannig skilgreind er línuleg.

Við sýnum nú að röðunin $\leq_Y$ er velröðun á menginu Y. Látum því Z vera hlutmengi í Y þannig að $Z \neq \varnothing$ og látum $c \in Z$. Þá er til $(A, \leq_A)$ í $\mathcal{K}$ þannig að $c \in A$. Því er $A \cap Z \neq \varnothing$, og þar sem $(A, \leq_A)$ er velraðað mengi hefur mengið $A \cap Z$ minnsta stak með tilliti til röðunarinnar $\leq_A$; látum a vera þetta minnsta stak. Við sýnum að a er minnsta stak í Z. Látum því z vera eitthvert stak í Z. Samkvæmt ofansögðu er til stak $(B, \leq_B)$ í $\mathcal{K}$ þannig að $a \in B$ og $z \in B$. Þar sem $\mathcal{K}$ er keðja í $\mathcal{X}$ er annaðhvort $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ eða $(B, \leq_B) \leq (A, \leq_A)$. Í síðara tilvikinu er $B \subset A$ og því $a \in A \cup Z$ og $z \in A \cup Z$, og þá er $a \leq_A z$ og þar með $a \leq_Y z$, af því að a er minnsta stakið í $A \cup Z$. Ef við erum í fyrra tilvikinu en ekki í því síðara, þá er $A \subset B$, til er b úr B þannig að $A = \{x \in B : x <_B b\}$, og $\leq_A$ er röðunin á A sem röðunin $\leq_B$ gefur af sér. Ef $z \in A$, þá fæst $a \leq z$ eins og áður. Annars er $b \geq_B z$, vegna þess að röðunin á B er línuleg, og þá er $a <_B z$ og þar með $a <_Y z$. Þar með hefur verið sýnt að a er minnsta stak í menginu z.

Nú er ljóst að $(A, \leq_A) \leq (Y, \leq_Y)$ fyrir sérhvert stak $(A, \leq_A)$ í $\mathcal{K}$, svo að $(Y, \leq_Y)$ er yfirstak í $\mathcal{X}$ fyrir keðjuna $\mathcal{K}$.

Samkvæmt hjálparsetningu Zorns hefur raðaða mengið $\mathcal{X}$ hástak. Látum $(A, \leq_A)$ vera slíkt hástak. Það nægir nú að sýna að $A = X$, því að þá er $\leq_A$ velröðun á X. Gerum því ráð fyrir að svo sé ekki og að A sé eiginlegt hlutmengi í X. Látum b vera stak í $X \setminus A$ og setjum $B := A \cup \{b\}$. Skilgreinum röðun $\leq_B$ á B þannig: Fyrir $x, y \in B$ setjum við $x \leq_B y$ þá og því aðeins að annaðhvort sé bæði $x, y \in A$ og $x \leq_A y$ eða $y = b$. Þá er auðséð að $\leq_B$ er línuleg röðun á B, og $(A, \leq_A) < (B, \leq_B)$. En þetta er í mótsögn við að $(A, \leq_A)$ sé hástak í menginu $\mathcal{X}$. $\square$

Sýnum einnig til fróðleiks:

(1.7) Setning. *Valfrumsendan er afleiðing af velröðunarsetningu Zermelos að öðrum frumsendum mengjafræðinnar gefnum.*

Sönnun: Látum $(A_i)_{i \in I}$ vera fjölskyldu af mengjum þannig að $A_i \neq \varnothing$ fyrir sérhvert i úr I. Setjum $X := \bigcup_{i \in I} A_i$. Samkvæmt velröðunarsetningu Zermelos hefur mengið X velröðun. Með tilliti til þessarar velröðunar hefur sérhvert af mengjunum A_i lágstak. Setjum $a_i := \min A_i$ fyrir sérhvert i úr I. Þá er $(a_i)_{i \in I}$ fjölskylda af stökum þannig að $a_i \in A_i$ fyrir sérhvert i úr I. $\square$

Við höfum því sýnt:

(1.8) Setning. *Að öðrum frumsendum mengjafræðinnar gefnum eru valfrumsendan, hákeðjusetning Hausdorffs, hjálparsetning Zorns og velröðunarsetning Zermelos jafngildar fullyrðingar tvær og tvær; með öðrum orðum er hver þeirra afleiðing af hverri sem vera skal af hinum þremur.* $\square$

Þessi niðurstaða synir að við hefðum getað tekið hverja sem er af þessum þremur niðurstöðum, nefnilega hákeðjusetningu Hausdorffs, hjálparsetningu Zorns og velröðunarsetningu Zermelos, og haft hana sem frumsendu mengjafræðinnar í stað frumsendunnar um val. En þeirri spurningu er þó ósvarað hvort við gætum sleppt frumsendunni um val alveg og sannað hana og þessar afleiðingar hennar útfrá öðrum frumsendum mengjafræðinnar. En sýnt hefur verið að svo er ekki: Frumsenduna um val er ekki afleiðing af öðrum frumsendum mengjafræðinnar.

§2. Raðtölur og fjöldatölur

Við viljum nú gera stuttlega grein fyrir raðtölum og fjöldatölum. Nú er það tilfellið að í venjulegri stærðfræði þarf miklu oftar á fjöldatölum að halda en raðtölum. Á hinn bóginn er einfaldast að skilgreina fjöldatölur með því að nota raðtölur. Það ætlum við að því að gera, en reynum þó að koma því svo fyrir að lesandi sem hefur einungis áhuga á fjöldatölum getur hlaupið yfir skilgreiningu raðtalna: Hann getur sleppt því að lesa þennan kafla frá (2.3) að telja og haldið þá beint áfram með næstu grein um fjöldatölur.

Byrjum á að skilgreina:

(2.1) Skilgreining. *Við segjum að mengi X sé* ***samstétta*** *mengi Y ef til er gagntæk vörpun $\phi : X \to Y$.*

Þá er auðséð:

(2.2) Setning. *Látum X og Y vera mengi.*

(1) *Mengið X er samstétta sjálfu sér.*

(2) *Ef mengið X er samstétta menginu Y, þá er mengið Y samstétta menginu X.*

(3) *Ef mengið X er samstétta menginu Y og mengið Y er samstétta menginu Z, þá er mengið X samstétta menginu Z.*

Sönnun: (1) Samsemdarvörpunin $\mathrm{id}_X : X \to X$ er gagntæk.

(2) Ef $\phi : X \to Y$ er gagntæk vörpun, þá er andhverfan $\phi^{-1} : Y \to X$ gagntæk.

(3) Ef $\phi : X \to Y$ og $\psi : Y \to Z$ eru gagntækar varpanir, þá er samskeytingin $\psi \circ \phi : X \to Z$ gagntæk. □

Það er eðlilegt að hugsa sér að mengin X og Y *hafi jafnmörg stök* ef (og aðeins ef) þau eru samstétta; það kemur að minnsta kosti vel heim við það sem við eigum að venjast um endanleg mengi. Það er þá líka eðlilegt að við getum hugsað okkur að sérhvert mengi hafi ákveðinn *fjölda staka*, jafnvel þótt það sé óendanlegt, þannig að fjöldi staka í tveimur mengjum sé sá sami þá og því aðeins að þau séu samstétta. Við viljum sýna að sérhverju mengi X megi úthluta tiltekinni stærð $\#X$, sem kallast

fjöldatala mengisins X, þannig að gildi: Mengi X er samstétta mengi Y þá og því aðeins að $\#X = \#Y$.

Þessi eiginleiki segir okkur það sem mestu máli skiptir um fjöldastölur mengja. Ef við þekkjum hann, þá þurfum við svo sem ekkert að vita hvað fjöldatölur eru, að minnsta kosti ekki svona dags daglega. Við þurfum aðeins að vita að þær séu til. Nú er það svo að sönnun þessarar staðreyndar kostar nokkurn undirbúning og töluverða fyrirhöfn, og lesandi sem hefur engan áhuga á hvernig hún er sönnuð getur hlaupið yfir afganginn af þessari grein og byrjað strax á næstu grein.

(2.3) Hvað ætti fjöldatala mengisins X eiginlega að vera? Nú á dögum gera menn sig ekki ánægða með loðin svör á borð við að fjöldatala mengis X sé „það sem er sameiginlegt öllum mengjum sem eru samstétta menginu X“, þótt skilgreiningar á borð við þetta hafi þótt nægilegar á nítjándu öld, þegar Cantor fann upp fjöldatöluhugtakið. Við getum heldur ekki notfært okkur þá aðferð sem stærðfræðingar grípa venjulega til þegar þeir þurfa að skilgreina sambærileg hugtök, sem er þessi: Í stað þess að tala um „eiginleika sem er sameiginlegur öllum hlutum af tiltekinni gerð“ athugum við *mengi* allra hluta af þeirri gerð. Við gætum nefnilega látið okkur detta í hug að skilgreina fjöldatölu mengis X sem „mengi allra mengja sem eru samstétta menginu X“. En vandinn er sá að slíkt mengi getur ekki verið til: Fyrir gefið mengi eru til svo mörg mengi sem eru samstétta því að þau geta ekki myndað mengi. Til dæmis ættum við að geta verið sammála um að mengin sem hafa nákvæmlega eitt stak eru einfaldlega öll mengi af gerðinni $\{a\}$, þar sem a er eitthvert stak, það er að segja þau mengi sem við köllum *einstökunga*. En fyrir sérhvert mengi X getum við myndað einstökunginn $\{X\}$, svo að einstökungarnir hljóta að vera „jafnmargir“ og öll mengi.

Hreinlegasta aðferðin til að gera grein fyrir fjöldatölum virðist vera sú að skilgreina þær sem sérstaka gerð af svonefndum *raðtölum*. Við byrjum því á að ræða lítillega um raðtölur. Þær eru dálítið sérkennileg fyrirbæri, og til að eiga við þær af einhverju viti þarf að nota tvær af frumsendum mengjafræðinnar sem þarf venjulega aldrei að nota í nokkru öðru samhengi, nefnilega svokallaða *regluleikafrumsendu* og *frumsendu um innsetningu*. Það var minnzt á þær lauslega í lok kafla II, en við rfjum þær aftur upp hér á eftir þegar við þurfum á þeim að halda.

Áður en við snúum okkur fyrir alvöru að því að skilgreina raðtölur skulum við reyna að gera dálitla grein fyrir þeim óformlega. Þægilegasta aðferðin til að skilgreina náttúrlegu tölurnar í mengjafræði er aðferð von Neumanns, sem við settum fram í kafla II, nefnilega sú að skilgreina náttúrlega tölu sem mengi allra náttúrlegra talna sem eru minni en hún sjálf. Þetta þýðir að við setjum

$$\begin{aligned} 0 &:= \varnothing, \\ 1 &:= \{0\} = \{\varnothing\}, \\ 2 &:= \{0,1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \\ 3 &:= \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \end{aligned}$$

og þar frameftir götunum. Þessu mátti lýsa með þægilegri hætti þannig: Fyrir sérhvert mengi x skilgreindum við *eftirfara* mengisins x sem mengið $x^+ := x \cup \{x\}$. Þá er

$$0 = \varnothing, \quad 1 = 0^+, \quad 2 = 1^+, \quad 3 = 2^+ \quad \text{o. s. frv.}$$

Við vildum ekki aðeins geta skilgreint hverja náttúrlega tölu fyrir sig, heldur viljum við geta skilgreint *mengi* allra náttúrlegu talnanna. Til þess þurftum við á frumsendu að halda, nefnilega *frumsendu um óendanleg mengi* sem segir að til sé mengi A þannig að $\varnothing \in A$ og þannig að fyrir sérhvert stak x úr A sé $x^+ \in A$. Af öðrum frumsendum mengjafræðinnar leiðir þá að til er *minnsta* mengi sem fullnægir þessum skilyrðum, og það er samkvæmt skilgreiningu mengi allra náttúrlegu talnanna.

Nánar tiltekið skulum við kalla mengi ***eftirfaramengi*** ef $\varnothing \in A$ og fyrir sérhvert stak x úr A sé $x^+ \in A$. Frumsendan um óendanleg mengi segir þá að til sé eftirfaramengi. Þar sem eitt eftirfaramengi er til, þá má mynda sniðmengi allra eftirfaramengja sem eru hlutmengi í gefnu eftirfaramengi. Við táknum þetta sniðmengi með

$$\mathbb{N},$$

og köllum það ***mengi náttúrlegu talnanna*** og stök þess ***náttúrlegar tölur***. Mengið $\mathbb{N}$ er augljóslega eftirfaramengi, og óháð eftirfaramenginu sem við byrjuðum með, því að sniðmengi þess við sérhvert annað eftirfaramengi er hlutmengi í $\mathbb{N}$ og líka eftirfaramengi og verður því að vera mengið $\mathbb{N}$ sjálft. Mengið $\mathbb{N}$ ákvarðast ótvírætt af þeim eiginleika að vera hlutmengi í sérhverju eftirfaramengi.

Nú er ekkert því til fyrirstöðu að halda þessu ferli áfram. Komum okkur saman um að segja að náttúrlegu tölurnar séu ***endanlegu raðtölurnar***. Við ætlum nú að líta á mengið $\mathbb{N}$ sem *nýja tölu*, sem við getum kallað „fyrstu óendanlegu raðtöluna". Þegar við lítum á mengið $\mathbb{N}$ sem raðtölu er venja að tákna það með ω (þótt við höldum áfram að tákna það með $\mathbb{N}$ í flestu öðru samhengi; sjá þó athugasemd (3.9)). Komum okkur saman um að talan ω skuli teljast stærri en sérhver náttúrleg tala og raunar að náttúrlegu tölurnar séu einmitt þær raðtölur sem eru minni en talan ω. Þá er ω einmitt mengi allra raðtalna sem eru minni en hún sjálf. Þar næst getum við myndað mengið $\omega \dot{+} 1 := \omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$, sem er ***önnur óendanlega raðtalan***. [Við notum hér táknið „$\dot{+}$" frekar en „$+$", því að seinna ætlum við að skilgreina aðra samlagningu fyrir *fjöldatölur* og nota venjulega samlagningarmerkið fyrir hana; það kemur þá í ljós að ω verður einnig fjöldatala, en $\omega + 1$ verður önnur stærð en það sem við táknum hér með $\omega \dot{+} 1$; sjá setningu (3.10).] Síðan myndum við mengið $\omega \dot{+} 2 := \omega^{++}$ sem er ***þriðja óendanlega raðtalan*** og þannig koll af kolli. Við fáum þannig óendanlega runu

$$\omega, \omega \dot{+} 1, \omega \dot{+} 2, \omega \dot{+} 3, \omega \dot{+} 4 \quad \text{o. s. frv.}$$

af óendanlegum raðtölum. Tökum nú mengi allra raðtalnanna sem þá hafa verið skilgreindar og lítum á mengi þeirra sem nýja raðtölu, sem á að vera næsta raðtala á eftir þeim öllum saman. Við skulum kalla hana $\omega 2$. Þá getum við haldið áfram með því að setja $\omega 2 \dot{+} 1 := (\omega 2)^+$, $\omega 2 \dot{+} 2 := (\omega 2)^{++}$ o. s. frv. Þannig fáum við nýja óendanlega runu

$$\omega 2, \omega 2 \dot{+} 1, \omega 2 \dot{+} 2, \omega 2 \dot{+} 3, \omega 2 \dot{+} 4 \quad \text{o. s. frv.}$$

Við búum nú til nýja raðtölu sem á að vera næsta raðtala á eftir þeim, og er einfaldlega mengi allra raðtalna sem eru fengnar þegar hér er komið sögu. Við köllum hana $\omega 3$ og fáum enn nýja óendanlega runu af raðtölum

$$\omega 3, \omega 3 \dot{+} 1, \omega 3 \dot{+} 2, \omega 3 \dot{+} 3, \omega 3 \dot{+} 4 \quad \text{o. s. frv.}$$

Næsta raðtala sem á eftir þeim öllum kemur er raðtalan $\omega 4$. Með því að halda þessu áfram fáum við óendanlega runu $\omega 5$, $\omega 6$, $\omega 7$ o. s. frv. af nýjum og nýjum raðtölum, og á milli hverra tveggja þeirra eru óendanlega margar raðtölur.

Þegar þessar raðtölur hafa allar verið búnar til tökum við þær aftur saman í mengi, sem verður næsta raðtala á eftir þeim öllum saman; köllum hana ω^2. Byrjum þá aftur upp á nýtt og fáum

$$
\begin{aligned}
&\omega^2, \omega^2 \dotplus 1, \omega^2 \dotplus 2, \omega^2 \dotplus 3, \dots,\\
&\omega^2 \dotplus \omega, \omega^2 \dotplus \omega \dotplus 1, \omega^2 \dotplus \omega \dotplus 2, \omega^2 \dotplus \omega \dotplus 3, \dots,\\
&\omega^2 \dotplus \omega 2, \omega^2 \dotplus \omega 2 \dotplus 1, \omega^2 \dotplus \omega 2 \dotplus 2, \omega^2 \dotplus \omega 2 \dotplus 3, \dots,\\
&\qquad \vdots\\
&\omega^2 2, \omega^2 2 \dotplus 1, \omega^2 2 \dotplus 2, \omega^2 2 \dotplus 3, \dots,\\
&\omega^2 2 \dotplus \omega, \omega^2 2 \dotplus \omega \dotplus 1, \omega^2 2 \dotplus \omega \dotplus 2, \omega^2 2 \dotplus \omega \dotplus 3, \dots,\\
&\omega^2 2 \dotplus \omega 2, \omega^2 2 \dotplus \omega 2 \dotplus 1, \omega^2 2 \dotplus \omega 2 \dotplus 2, \omega^2 2 \dotplus \omega 2 \dotplus 3, \dots,\\
&\qquad \vdots\\
&\omega^3, \omega^3 \dotplus 1, \omega^3 \dotplus 2, \omega^3 \dotplus 3, \dots,\\
&\omega^3 \dotplus \omega, \omega^3 \dotplus \omega \dotplus 1, \omega^3 \dotplus \omega \dotplus 2, \omega^3 \dotplus \omega \dotplus 3, \dots,\\
&\omega^3 \dotplus \omega 2, \omega^3 \dotplus \omega 2 \dotplus 1, \omega^3 \dotplus \omega 2 \dotplus 2, \omega^3 \dotplus \omega 2 \dotplus 3, \dots,\\
&\qquad \vdots\\
&\omega^4, \omega^4 \dotplus 1, \omega^4 \dotplus 2, \omega^4 \dotplus 3, \dots,\\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Þegar við höfum fengið óendanlega mörgu raðtölurnar $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ o. s. frv. ásamt öllum tölunum sem milli þeirra liggja, þá tökum við allar raðtölur sem þá eru komnar saman í eina nýja raðtölu, sem við köllum ω^ω. Og áfram höldum við. Við fáum þannig sífellt nýjar og nýjar raðtölur sem hafa þann eiginleika að hver þeirra er mengi allra raðtalna sem á undan eru komnar.

Hvenær tekur þetta enda? Svarið er: „Aldrei“. Við getum haldið áfram og áfram og áfram og áfram. Nú er það svo að orðasambönd eins og „áfram og áfram og áfram og áfram“ eða „og svo framvegis“ eru afskaplega óljós, og það hvílir á okkur sú kvöð að gera nánari grein fyrir notkun þeirra hvenær sem við höfum ástæðu til að nota þau. Í þessu tilviki þurfum við að fara dálítið í kringum hlutina og reyna að skilgreina raðtölur með almennri skilgreiningu; við þurfum með öðrum orðum að tiltaka eiginleikana sem þær eiga að hafa.

Tökum þá fyrst eftir að þær raðtölur sem við höfum búið til eru mengi. Einnig höfum við talað um að ein raðtala sé minni en önnur, og raunar að sérhver raðtala sé nákvæmlega mengi allra raðtalna sem eru minni en hún sjálf. Af þessu sjáum við að raðtölur ættu að hafa eftirfarandi eiginleika: Ef α er raðtala, β er stak í α, og γ er stak í β, þá er γ stak í α. Ennfremur er ljóst að fyrir sérhverja raðtölu α á að gilda að sérhvert stak í α sé einnig raðtala. Það kemur í ljós að þessir eiginleikar eru einmitt þeir sem duga til að skilgreina raðtölur:

(2.4) Skilgreining. (1) *Við segjum að mengi α sé* ***gegnvirkt*** *ef það fullnægir eftirfarandi skilyrði:*

Ef $\beta \in \alpha$ og $\gamma \in \beta$, þá er $\gamma \in \alpha$.

(2) *Mengi α kallast* ***raðtala*** *ef það er gegnvirkt mengi og sérhvert stak í α er einnig gegnvirkt mengi.*

(3) *Látum α og β vera raðtölur. Við segjum að raðtalan β sé* ***minni*** *en raðtalan α og skrifum*

$$\beta \prec \alpha$$

ef $\beta \in \alpha$. Við segjum að raðtalan β sé ***minni eða jöfn*** *raðtölunni α og skrifum*

$$\beta \preceq \alpha$$

ef $\beta \prec \alpha$ eða $\beta = \alpha$.

Tökum strax eftir nokkrum einföldum afleiðingum af skilgreiningunni:

(2.5) Setning. (1) *Ef α er raðtala, þá er sérhvert stak í α raðtala.*

(2) *Ef α er raðtala og $\beta \in \alpha$, þá er $\beta \subset \alpha$.*

(3) *Ef α er raðtala, þá er eftirfarinn $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ raðtala.*

(4) *Ef α og β eru raðtölur þannig að $\alpha^+ = \beta^+$, þá er $\alpha = \beta$.*

(5) *Ef $(\alpha_i)_{i \in I}$ er fjölskylda af raðtölum, þá er sammengið $\bigcup\limits_{i \in I} \alpha_i$ raðtala.*

(6) *Sérhver náttúrleg tala er raðtala.*

Sönnun: (1) Látum β vera stak í α. Samkvæmt skilgreiningu á raðtölu er β gegnvirkt mengi. Látum γ vera stak í β. Þar sem α er gegnvirkt mengi er γ stak í α, og þar sem α er raðtala er γ gegnvirkt mengi.

(2) Þetta er einungis umorðun á því skilyrði að α sé gegnvirkt mengi.

(3) Látum $\beta \in \alpha^+$ og $\gamma \in \beta$. Ef $\beta = \alpha$, þá er $\gamma \in \alpha$. Ef hins vegar $\beta \in \alpha$, þá fæst einnig $\gamma \in \alpha$, af því að α er gegnvirkt mengi. En þar sem $\gamma \in \alpha$ og $\alpha \subset \alpha^+$ fæst $\gamma \in \alpha^+$. Þar með höfum við sýnt að α^+ er gegnvirkt mengi. En stak í α^+ er annaðhvort α sjálft eða stak í α og því gegnvirkt mengi. Því er α^+ raðtala.

(4) Gerum ráð fyrir að $\alpha^+ = \beta^+$. Þar sem $\alpha \in \alpha^+ = \beta^+ = \beta \cup \{\beta\}$ er annaðhvort $\alpha \in \beta$ eða $\alpha = \beta$. Í fyrra tilvikinu er $\alpha \subset \beta$ samkvæmt lið (2), og þetta gildir augljóslega einnig í seinna tilvikunu. Með sama hætti sjáum við að $\beta \subset \alpha$, og þar með er $\alpha = \beta$.

(5) Setjum $\alpha := \bigcup\limits_{i \in I} \alpha_i$ og sýnum að mengið α er gegnvirkt. Látum því $\gamma \in \beta \in \alpha$. Þá er til i úr I þannig að $\beta \in \alpha_i$, og þar sem α_i er gegnvirkt mengi er $\gamma_i \in \alpha_i \subset \alpha$. Ennfremur er sérhvert stak í α jafnframt stak í einhverju mengjanna α_i og því raðtala og sér í lagi gegnvirkt.

(6) Látum A vera mengi allra náttúrlegra talna sem eru raðtölur. Tóma mengið er augljóslega raðtala, svo að $\varnothing \in A$. Ef $n \in A$, þá er n^+ náttúrleg tala, og samkvæmt (3) er n^+ einnig raðtala, svo að $n^+ \in A$. En þá er A eftirfaramengi sem er hlutmengi í $\mathbb{N}$, svo að $A = \mathbb{N}$. $\square$

Skilgreining okkar á raðtölum verkar ekki almennilega nema við höfum *regluleikafrumsenduna* með í mengjafræðinni okkar. Til dæmis viljum við að raðtala geti ekki verið minni en hún sjálf, eða með öðrum orðum að raðtala geti ekki verið stak í sjálfri sér, og til þess þurfum við frumsenduna. Hún er oftast sett fram eins og við gerðum í lok kafla II:

> **Regluleikafrumsenda** *Fyrir sérhvert mengi A sem er ekki tómt er til stak B í A þannig að $B \cap A = \varnothing$.*

Í þessari framsetningu er frumsendan afskaplega ógegnsæ, og því skulum við strax finna aðra framsetningu:

(2.6) Setning. *Að gefnum öðrum frumsendum mengjafræðinnar er regluleikafrumsendan jafngild eftirfarandi fullyrðingu:*

> *Ekki er til óendanleg runa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af mengjum þannig að $X_{n+1} \in X_n$ fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$.*

Sönnun: Sýnum fyrst að fullyrðingin í setningunni er afleiðing af regluleikafrumsendunni: Gerum því ráð fyrir að til sé slík runa (X_n) af mengjum og myndum mengið $A := \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ef nú B er stak í A, þá er til n úr $\mathbb{N}$ þannig að $B = X_n$. En þá er $X_{n+1} \in B$ og $X_{n+1} \in A$, svo að $A \cap B \neq \varnothing$. Þar sem þetta gildir fyrir sérhvert stak B í A höfum við mótsögn við regluleikafrumsenduna.

Sýnum næst að regluleikafrumsendan er afleiðing af skilyrðinu í setningunni. Gerum því ráð fyrir að regluleikafrumsendunni sé *ekki* fullnægt. Þá er til mengi A þannig að fyrir sérhvert stak B í A sé $A\cap B \neq \varnothing$. Samkvæmt frumsendunni um val er til fjölskylda $(C_B)_{B\in A}$ af stökum þannig að $C_B \in A\cap B$ fyrir sérhvert stak B úr A. Látum nú B_0 vera tiltekið stak í menginu A og skilgreinum með þrepun runu (X_n) af stökum í A þannig að $X_0 := B_0$ og $X_{n+1} := C_{X_n}$. Þetta er skynsamleg skilgreining, því að fyrir hvert n er X_n stak í A, og því er C_{X_n} aftur stak í A. Nú fæst $X_{n+1} = C_{X_n} \in A \cap X_n \subset X_n$ og því $X_{n+1} \in X_n$ fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$. Við höfum því sýnt að skilyrðinu í setningunni er ekki fullnægt ef regluleikafrumsendunni er ekki fullnægt, og því er regluleikafrumsendan afleiðing af skilyrðinu. □

(2.7) Setning. *Fyrir sérhvert mengi X er $X \notin X$.*

Sönnun: Setjum $A = \{X\}$. Samkvæmt regluleikafrumsendunni er til stak B úr A þannig að $B \cap A = \varnothing$. En X er eina stakið í A, svo að $X \cap \{X\} = \varnothing$, og það þýðir einmitt að $X \notin X$. □

(2.8) Athugasemd. Við getum einnig sannað setningu (2.7) þannig: Ef til væri mengi X þannig að $X \in X$, þá gætum við búið til óendanlega runu (X_n) af mengjum þannig að $X_{n+1} \in X_n$ fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ með því að setja $X_n := X$ fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$.

Tökum einnig eftir:

(2.9) Fylgisetning. *Ekki eru til mengi X og Y þannig að $X \in Y$ og $Y \in X$. Almennar er ekki til nein endanleg runa $X_1, \ldots, X_n$ af mengjum þannig að $X_{k+1} \in X_k$ fyrir öll $k = 1, \ldots, n-1$ og $X_1 \in X_n$.*

Sönnun: Sönnum seinni fullyrðinguna, því að hin fyrri fæst sem afleiðing af henni með því að taka $n = 2$. Ef slík runa væri til, þá getum við framlengt hana í óendanlega runu (X_k) þannig að $X_{k+1} \in X_k$ fyrir öll k með því að setja $X_{qn+r} := X_r$ fyrir öll $q \geq 1$ og öll r þannig að $1 \leq r \leq b$. $\square$

(2.10) Skilgreining. *Látum A vera mengi. Stak B í A kallast $\in$-**lágstak** í A ef $A \cap B = \varnothing$; með öðrum orðum ef ekkert stak í menginu A er stak í menginu B.*

Regluleikafrumsendan segir þá að sérhvert mengi sem er ekki tómt hafi $\in$-lágstak.

(2.11) Setning. *Látum α, β og γ vera raðtölur.*
(1) *Við höfum $\alpha \preceq \alpha$.*
(2) *Ef $\alpha \preceq \beta$ og $\beta \preceq \alpha$, þá er $\alpha = \beta$.*
(3) *Ef $\alpha \preceq \beta$ og $\beta \preceq \gamma$, þá er $\alpha \preceq \gamma$.*
(4) *Við höfum annaðhvort $\alpha \preceq \beta$ eða $\beta \preceq \alpha$.*

Sönnun: (1) Þetta er ljóst, því að $\alpha = \alpha$.

(2) Annars væri bæði $\alpha \in \beta$ og $\beta \in \alpha$, í mótsögn við setningu (2.9).

(3) Þetta er ljóst ef annaðhvort $\alpha = \beta$ eða $\beta = \gamma$. En ef ekki, þá er $\alpha \in \beta$ og $\beta \in \gamma$, og því $\alpha \in \gamma$, af því að γ er gegnvirkt mengi.

(4) Gerum ráð fyrir að til séu raðtölur α og β sem eru ekki $\preceq$-sambærilegar; með öðrum orðum gildir hvorki $\alpha \preceq \beta$ né $\beta \preceq \alpha$. (Það þýðir aftur að engin af fullyrðingunum $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ og $\beta \in \alpha$ er rétt.) Mengið

$$X := \{\gamma \in \alpha^+ : \text{til er stak } \delta \text{ í } \beta^+ \text{ þannig að } \gamma \text{ og } \delta \text{ séu ekki } \preceq\text{-sambærileg}\}$$

er ekki tómt, því að $\alpha \in X$. Því hefur X $\in$-lágstak. Látum γ_0 vera slíkt $\in$-lágstak og athugum mengið

$$Y := \{\delta \in \beta^+ : \gamma_0 \text{ og } \delta \text{ eru ekki } \preceq\text{-sambærileg}\}.$$

Þar sem $\gamma_0 \in X$ er til δ úr β^+ þannig að γ_0 og δ séu ekki $\preceq$-sambærileg, svo að $Y \neq \varnothing$, og því hefur Y $\in$-lágstak; látum δ_0 vera slíkt $\in$-lágstak. Þá er ljóst að mengin γ_0 og δ_0 eru ekki $\preceq$-sambærileg, og þau eru bæði raðtölur samkvæmt (2.5).

Sýnum fyrst að $\delta_0 \subset \gamma_0$. Látum því $\varepsilon \in \delta_0$. Þar sem δ_0 er $\in$-lágstak í Y er $Y \cap \delta_0 = \varnothing$, svo að $\varepsilon \notin Y$. Þar sem $\varepsilon \in \delta_0$, $\delta_0 \in \beta^+$ og β^+ er gegnvirkt mengi samkvæmt (2.5) er $\varepsilon \in \beta^+$. Þar með hljóta ε og γ_0 að vera $\preceq$-sambærileg. Setjum svo að $\gamma_0 \preceq \varepsilon$; vegna $\varepsilon \in \delta_0$ fengist $\gamma_0 \preceq \delta_0$ í mótsögn við að γ_0 og δ_0 eru ekki sambærileg. Þess vegna er $\varepsilon \in \gamma_0$.

Við höfum þá $\delta_0 \subset \gamma_0$, og þar sem δ_0 og γ_0 eru ekki sambærileg er $\delta_0 \neq \gamma_0$. Þar með er til stak η í mengjamismuninum $\gamma_0 \setminus \delta_0$. Þar sem γ_0 er $\in$-lágstak í menginu X og $\eta \in \gamma_0$ er $\eta \notin X$. En þar sem $\eta \in \gamma_0$, $\gamma_0 \in \alpha^+$ er $\eta \in \alpha^+$. Þar með hlýtur η að vera $\preceq$-sambærilegt við sérhvert stak í β^+, og þá sér í lagi við δ_0. En nú var η valið þannig að $\eta \notin \delta_0$, og því er $\delta_0 \preceq \eta$. En þá höfum við bæði $\delta_0 \preceq \eta$ og $\eta \in \gamma_0$, svo að $\delta_0 \preceq \gamma_0$ í mótsögn við að δ_0 og γ_0 eru ekki sambærileg. $\square$

Við gætum freistazt til að halda því fram að síðasta setning segi að „venzlin $\preceq$ séu línuleg röðun á mengi allra raðtalna“, en það væri alveg röng ályktun, því að við höfum ekki sýnt að allar raðtölur myndi mengi; raunar er auðvelt að sjá að það gera þær alldeilis ekki:

(2.12) Setning. *Ekki er til neitt mengi sem inniheldur allar raðtölur sem stök.*

Sönnun: Gerum ráð fyrir að slíkt mengi X væri til. Þá gætum við myndað mengið $\Omega := \{\alpha \in X : \alpha \text{ er raðtala}\}$. Fyrir öll α mundi þá gilda að α er raðtala þá og því aðeins að $\alpha \in \Omega$. Ef nú $\alpha \in \Omega$ og $\beta \in \alpha$, þá er β raðtala samkvæmt setningu (2.5), og því $\beta \in \Omega$. Því hlyti mengið Ω að vera gegnvirkt, og ennfremur er sérhvert stak í Ω raðtala og þar með gegnvirkt mengi. Við gætum því ályktað að mengið Ω væri sjálft raðtala, og þar með að $\Omega \in \Omega$. En það er í mótsögn við setningu (2.7). $\square$

Síðasta setning er venjulega kölluð ***Burali-Forti-þversögnin***.

Þótt *allar* raðtölur myndi ekki mengi, þá getum við að sjálfsögðu athugað *mengi af raðtölum*; sér í lagi er sérhver raðtala slíkt mengi. Á sérhverju slíku mengi X (og raunar almennar á sérhverju mengi af mengjum) getum við skilgreint venzl $\preceq_X$ með því að setja

$$x \preceq_X y \quad \text{þá og því aðeins að} \quad x \in X,\, y \in X \text{ og } x \preceq y.$$

Til að íþyngja ekki ritháttinum um of tölum við einfaldlega um „venzlin $\preceq$ á menginu X“. Nú má orða setningu (2.11) þannig:

(2.13) Setning. *Fyrir sérhvert mengi X af raðtölum skilgreina venzlin $\preceq$ línulega röðun á menginu X.* $\square$

(2.14) Setning. *Sérhvert mengi X af raðtölum þannig að $X \neq \varnothing$ hefur minnsta stak með tilliti til röðunarinnar $\preceq$ á X.*

Sönnun: Látum X vera mengi af raðtölum þannig að $X \neq \varnothing$ og látum α vera $\in$-lágstak í X. Þá er $\alpha \cap X = \varnothing$. Látum $\beta \in X$. Samkvæmt setningu (2.11) er $\alpha \preceq \beta$ eða $\beta \preceq \alpha$. Nú er ljóst að $\beta \notin \alpha$, annars væri $\beta \in X \cap \alpha$ í mótsögn við að $X \cap \alpha = \varnothing$. Þar með er $\alpha \preceq \beta$. Þetta sýnir að α er minnsta stak í X. $\square$

Saman segja setningar (2.13) og (2.14):

(2.15) Setning. *Fyrir sérhvert mengi X af raðtölum skilgreina venzlin $\preceq$ velröðun á menginu X.* $\square$

Sér í lagi skilgreina venzlin $\preceq$ velröðun á sérhverri raðtölu. Við lítum ávallt á raðtölu sem raðað mengi með þessum raðvenzlum.

(2.16) Setning. *Látum α og β vera raðtölur. Við höfum $\alpha \preceq \beta$ þá og því aðeins að $\alpha \subset \beta$.*

Sönnun: Ef $\alpha \preceq \beta$, þá er annaðhvort $\alpha \in \beta$ eða $\alpha = \beta$, og í báðum tilvikum er $\alpha \subset \beta$ samkvæmt setningu (2.5(2)). Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að $\alpha \subset \beta$. Ef $\alpha = \beta$, þá er ljóst að $\alpha \preceq \beta$, svo að við getum gert ráð fyrir að α sé eiginlegt hlutmengi í β, og sýnum þá að $\alpha \in \beta$. Látum γ vera $\in$-lágstak í $\beta \setminus \alpha$ (sem er þá minnsta stakið í $\beta \setminus \alpha$). Þá er $\gamma \subset \beta$ og $\gamma \cap (\beta \setminus \alpha) = \varnothing$, svo að $\gamma \subset \alpha$. Látum nú $\delta \in \alpha$. Þá er ljóst að hvorki gildir $\gamma = \delta$ né $\gamma \in \delta$, því að í báðum tilvikum fengist $\gamma \in \alpha$, þar sem α

er gegnvirkt mengi, og það er í mótsögn við að $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. Samkvæmt (2.11(4)) er þá $\delta \in \gamma$. Þá höfum við einnig sýnt að $\alpha \subset \gamma$, svo að $\alpha = \gamma$. En γ var stak í β, og þar með er $\alpha \in \beta$. □

(2.17) Setning (*Setning um ofurendanlega þrepun*). *Gerum ráð fyrir að $(X, \leq)$ sé velraðað mengi og látum $\mathbf{P}(x)$ vera fullyrðingu um almennt stak x í menginu X. Gerum ennfremur ráð fyrir að eftirfarandi skilyrði sé fullnægt:*

> *Ef $x \in X$ og fullyrðingin $\mathbf{P}(y)$ er sönn fyrir sérhvert stak y úr X þannig að $y < x$, þá er fullyrðingin $\mathbf{P}(x)$ sönn.*

Þá er fullyrðingin $\mathbf{P}(x)$ sönn fyrir sérhvert stak x úr X.

Sönnun: Myndum mengið $A := \{x \in X : \text{fullyrðingin } \mathbf{P}(x) \text{ er ekki sönn}\}$. Það nægir að sýna að mengið A sé tómt. Ef svo væri ekki, þá hefði A minnsta stak; köllum það x. Fyrir sérhvert y úr X þannig að $y < x$ er þá $y \notin A$, og því er fullyrðingin $\mathbf{P}(y)$ sönn. Af skilyrðinu í setningunni leiðir þá að fullyrðingin $\mathbf{P}(x)$ er sönn og þar með að $x \notin A$ í mótsögn við að x er samkvæmt skilgreiningu stak í A. □

(2.18) Athugasemd. Lesandinn er kannski við fyrstu sýn undrandi á að við þurfum ekki að gefa okkur „þrepunarupphaf“, nefnilega þá forsendu að fullyrðingin $\mathbf{P}(x_0)$ sé sönn, þar sem x_0 er minnsta stakið í X. En hún er afleiðing af skilyrðinu í setningunni: Augljóslega er fullyrðingin $\mathbf{P}(y)$ sönn fyrir sérhvert stak y úr X þannig að $y < x_0$, því að ekkert slíkt stak y er til. Skilyrðið leyfir okkur því að álykta að fullyrðingin $\mathbf{P}(x_0)$ sé sönn. Ef við á hinn bóginn ætlum okkur að *nota* setninguna um ofurendanlega þrepun til að sanna tiltekna fullyrðingu $\mathbf{P}(x)$ fyrir öll stök x úr A, þá þurfum við að *sanna* að skilyrðinu í setningunni sé fullnægt, og þeirri sönnun þurfum við einatt að skipta í tvö tilvik eftir því hvort x er minnsta stakið í X eða ekki.

(2.19) Skilgreining. *Látum $(X_1, \leq_1)$ og $(X_2, \leq_2)$ vera röðuð mengi.* ***Einsmótun raðaðra mengja*** *frá $(X_1, \leq_1)$ til $(X_2, \leq_2)$ er gagntæk vörpun $f : X_1 \to X_2$ þannig að fyrir öll x, y úr X_1 gildi að $f(x) \leq f(y)$ þá og því aðeins að $x \leq y$. Við segjum að röðuðu mengin $(X_1, \leq_1)$ og $(X_2, \leq_2)$ séu* ***einsmóta*** *ef til er einsmótun raðaðra mengja frá $(X_1, \leq_1)$ til $(X_2, \leq_2)$.*

(2.20) Setning. *Látum α og β vera raðtölur og $f : \alpha \to \beta$ vera einsmótun raðaðra mengja. Þá er $\alpha = \beta$ og $f = \mathrm{id}_\alpha$.*

Sönnun: Við sýnum að $f(x) = x$ fyrir sérhvert x úr α með því að nota setninguna um ofurendanlega þrepun. Gerum því ráð $x \in \alpha$ og að $f(y) = y$ fyrir sérhvert y úr α þannig að $y \in x$. Þá er x minnsta stak í menginu $\alpha \setminus x$, og þar sem f er einsmótun raðaðra mengja hlýtur $f(x)$ að vera minnsta stakið í menginu $\beta \setminus f[x]$. (Athugum að $f(x)$ er hér gildi vörpunarinnar f í stakinu x, en $f[x]$ er mynd vörpunarinnar f af menginu x.) Samkvæmt forsendu er $f[x] = x$, svo að $f(x)$ er minnsta stak í $\beta \setminus x$, og það er einmitt x. Þar með er $f(x) = x$. Samkvæmt setningu (2.17) er $f(x) = x$ fyrir sérhvert x, og þar sem f er gagntæk vörpun er nauðsynlega $\alpha = \beta$. □

Fyrir sönnun næstu setningar þurfum við aftur að nota eina af frumsendum mengjafræðinnar sem annars þarf afskaplega sjaldan á að halda svona hversdagslega. Það er eftirfarandi frumsenda:

> **Frumsenda um innsetningu** *Látum* $\mathbf{P}(x,y)$ *vera skynsamlega fullyrðingu um almenn stök* x, y. *Ef* X *er mengi þannig að fyrir sérhvert* x *úr* X *er til nákvæmlega eitt* y *þannig að* $\mathbf{P}(x,y)$ *sé rétt, þá er til fjölskylda* $(y_x)_{x\in X}$ *þannig að* $\mathbf{P}(x,y_x)$ *sé rétt fyrir sérhvert* x *úr* X.

(2.21) Athugasemd. Lesandinn samþykkir væntanlega að þessi frumsenda sé afskaplega eðlileg: Fyrir sérhvert x úr X látum við y_x vera (eina) stakið sem fullnægir skilyrðinu $\mathbf{P}(x,y)$. Ástæða þess að við þurfum sérstaka frumsendu til að fullyrða tilvist fjölskyldunnar $(y_x)_{x\in X}$ er sú að ekki er fyrirfram gefið neitt tiltekið mengi Y sem inniheldur stakið y_x fyrir sérhvert x úr menginu X: Ef við hefðum gefið slíkt mengi Y fyrirfram, þá væri tilvist fjölskyldunnar afleiðing af öðrum frumsendum mengjafræðinnar. Það mætti því einnig orða frumsenduna þannig: *Látum* $\mathbf{P}(x,y)$ *vera skynsamlega fullyrðingu um almenn stök* x, y. *Ef* X *er mengi þannig að fyrir sérhvert* x *úr* X *er til nákvæmlega eitt* y *þannig að* $\mathbf{P}(x,y)$ *sé rétt, þá er til mengi* Y *þannig að fyrir sérhvert* x *úr* X *og sérhvert* y *þannig að* $\mathbf{P}(x,y)$ *sé* $y \in Y$.

Ástæða þess að við þurfum á frumsendunni að halda er að við viljum nota hana til að búa til fjölskyldur af *raðtölum*, og raðtölur mynda ekki mengi, eins og við höfum séð.

[Eins og við bentum á í lok kafla II er „frumsendan um innsetningu“ ekki ein frumsenda, heldur svokallað *frumsendugrip*, eða með öðrum orðum uppskrift fyrir hvernig við getum búið til óendanlega margar frumsendur: Fyrir hverja „skynsamlega fullyrðingu“ $\mathbf{P}(x,y)$ fáum við eina frumsendu.]

(2.22) Setning. *Látum* $(X,\leq)$ *vera velraðað mengi. Þá er* $(X,\leq)$ *einsmóta nákvæmlega einni raðtölu.*

Sönnun: Tökum fyrst eftir: Ef $(X,\leq)$ er einsmóta raðtölu, þá eru raðtalan og einsmótunin ákvörðuð ótvírætt. Til að sjá það gerum við ráð fyrir að α og β séu raðtölur og að $f : X \to \alpha$ og $g : X \to \beta$ séu einsmótanir raðaðra mengja. Þá er $g \circ f^{-1} : \alpha \to \beta$ einsmótun raðaðra mengja. Samkvæmt (2.20) er þá $\alpha = \beta$ og $g \circ f^{-1} = \mathrm{id}_\alpha$, og af því leiðir $f = g$.

Fyrir stak x úr X setjum við $A_x := \{y \in X : y \leq x\}$. Þar sem A_x er hlutmengi í velröðuðu mengi er það sjálft velraðað mengi. Við sýnum fyrst:

(∗) Ef A_x er einsmóta raðtölu fyrir sérhvert x úr X, þá er X einsmóta raðtölu.

Látum því $f_x : A_x \to \alpha_x$ vera einsmótun raðaðra mengja fyrir sérhvert x úr X. Þar sem α_x og f_x ákvarðast ótvírætt fáum við samkvæmt frumsendu um innsetningu fjölskyldur $(\alpha_x)_{x\in X}$ og $(f_x)_{x\in X}$ þannig að fyrir sérhvert x úr X sé α_x raðtala og $f_x : A_x \to \alpha_x$ einsmótun.

Látum nú $x, y \in X$ og $x < y$. Þar sem $f_y : A_y \to \alpha_y$ er einsmótun gefur hún með einskorðun af sér einsmótun frá A_x á $\{\beta \in \alpha_y : \beta \prec f_y(x)\} = \{\beta \in \alpha_y : \beta \in f_y(x)\} = f_y(x)$. Nú er $f_y(x)$ stak í raðtölunni α_y og því sjálft raðtala, svo að samkvæmt ofansögðu er $f_y(x) = \alpha_x$ og $f_y(z) = f_x(z)$ fyrir sérhvert z úr A_x. Sér í lagi sjáum við að $\alpha_x \in \alpha_y$.

Setjum nú $\gamma := \{\alpha_x : x \in X\}$ og skilgreinum vörpun $f : X \to \gamma$ með $f(x) := \alpha_x$. Venzlin $\preceq$ skilgreina röðun á mengið γ, og af skilgreiningunni er ljóst að f er einsmótun raðaðra mengja. Við þurfum þá aðeins að sýna að γ sé raðtala. Til þess nægir að sýna að γ er gegnvirkt mengi, því að sérhvert stak í γ er raðtala og þá sér í lagi gegnvirt mengi. Látum því $\alpha \in \gamma$ og $\beta \in \alpha$. Samkvæmt skilgreiningu er til x úr X þannig að $\alpha = \alpha_x$. Nú er $f_x : A_x \to \alpha_x$ einsmótun, svo að til er stak z úr A_x þannig að $\beta = f_x(z)$. En samkvæmt ofansögðu er $f_x(z) = \alpha_z$, og því er $\beta = \alpha_z \in \gamma$. Þar með er fullyrðingin $(*)$ sönnuð.

Við þurfum þá aðeins að sýna að fyrir sérhvert x úr X sé A_x einsmóta raðtölu. Samkvæmt setningu um ofurendanlega þrepun nægir að sýna: Ef A_y er einsmóta raðtölu fyrir sérhvert y úr X þannig að $y < x$, þá er A_x einsmóta raðtölu. En það er afleiðing af $(*)$! $\square$

Sem afleiðingu fáum við:

(2.23) Setning. *Sérhvert mengi X er samstétta raðtölu; með öðrum orðum er til raðtala α og gagntæk vörpun $f : X \to \alpha$.*

Sönnun: Samkvæmt velröðunarsetningu Zermelos er til velröðun $\leq$ á X. Samkvæmt setningu (2.22) er til raðtala α og vörpun $f : X \to \alpha$ sem er einsmótun raðaðra mengja frá $(X, \leq)$ á γ. Þá er f sér í lagi gagntæk vörpun. $\square$

Látum X vera mengi. Samkvæmt setningu (3.23) er X samstétta raðtölu α. Athugum nú mengið

$$A := \{\gamma \in \alpha^+ : X \text{ er samstétta } \gamma\}.$$

Þá er $A \neq \varnothing$, því að $\alpha \in A$. Samkvæmt setningu (2.14) hefur mengið A minnsta stak; köllum það γ_0. Við getum lýst γ_0 sem *minnstu raðtölunni sem er samstétta menginu* X: Ef til væri minni raðtala γ_1 samstétta X, þá væri $\gamma_1 \in \gamma_0$ og þar með $\gamma \in \alpha^+$, og við fengjum mótsögn við skilgreininguna á γ_0. Sér í lagi er γ_0 óháð valinu á raðtölunni α.

Nú getum við loksins skilgreint:

(2.24) Skilgreining. *Látum X vera mengi. Minnsta raðtalan sem er samstétta menginu X er táknuð*

$$\#X$$

*og kölluð **fjöldatala mengisins** X. Raðtala kallast **fjöldatala** ef hún er fjöldatala einhvers mengis.*

Nú er auðséð:

(2.25) Setning. *Mengi X og Y eru samstétta þá og því aðeins að $\#X = \#Y$.*

Sönnun: Ef mengin X og Y eru samstétta, þá gildir um sérhverja raðtölu að hún er samstétta X þá og því aðeins að hún sé samstétta Y. Því er ljóst að $\#X = \#Y$. Ef á hinn bóginn $\#X = \#Y$, þá eru X og Y bæði samstétta raðtölunni $\#X$ og því samstétta. $\square$

(2.26) Athugasemd. Samkvæmt skilgreiningu er sérhver fjöldatala raðtala. Það er hins vegar langt frá því að sérhver raðtala sé fjöldatala. Til dæmis er ljóst að raðtölurnar ω og $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ eru samstétta: Við fáum gagntæka vörpun $f : \omega^+ \to \omega$ með því að setja

$$f(x) := \begin{cases} n^+ & \text{ef } x \in \omega = \mathbb{N}, \\ 0 & \text{ef } x = \omega. \end{cases}$$

Þar sem raðtalan ω er minni en ω^+ getur ω^+ ekki verið fjöldatala.

Áður en við skilgreindum raðtölur formlega skrifuðum við niður langa lista af raðtölum, til dæmis raðtölurnar $\omega 2 \dot{+} 4, \omega^3 \dot{+} \omega \dot{+} \omega 2 \dot{+} 1$ og margar fleiri. Allar þessar raðtölur eru samstétta raðtölunni ω, og hún er því sú eina af þeim sem við tilgreindum sem er fjöldatala.

(2.27) Setning. (1) *Sérhver náttúrleg tala er fjöldatala.*

(2) *Talan ω er fjöldatala.*

Uppkast að sönnun: (1) Auðsannað er með þrepun: Ef n og m er náttúrlegar tölur (þ. e. stök í ω), og til er eintæk vörpun frá n til m, þá er $n \preceq m$. Af því leiðir svo: Ef n og m eru samstétta náttúrlegar tölur, þá er $n \preceq m$ og $m \preceq n$ og því $n = m$. Engin náttúrleg tala er því samstétta minni náttúrlegri tölu, og því er sérhver náttúrleg tala fjöldatala.

(2) Gerum ráð fyrir að ω sé samstétta minni raðtölu n, sem er þá náttúrleg tala, og látum $f : \omega \to n$ vera gagntæka vörpun. Látum $g : n^+ \to \omega$ vera ívarpið. Þá er $g \circ f : n^+ \to n$ eintæk vörpun, og samkvæmt ofansögðu væri $n^+ \preceq n$, sem er fráleitt.□

Á mengi náttúrlegu talnanna er röðunin $\preceq$ *venjulega röðunin* á $\mathbb{N}$. Við getum nú endurtekið setningu (2.25) með dálítilli viðbót:

(2.28) Setning. *Sérhverju mengi X má úthluta tiltekinni fjöldatölu $\#X$ þannig að gildi:*

Mengin X og Y eru samstétta þá og því aðeins að $\#X = \#Y$.

Fjöldatala mengis X er náttúrleg tala n þá og því aðeins að X sé samstétta menginu $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$, þar sem $\leq$ er venjulega röðunin á $\mathbb{N}$. □

§3. Eiginleikar fjöldatalna

Við bjóðum nú aftur velkomna þá lesendur sem hlupu yfir allan textann um raðtölur og ætla sér að byrja hér í beinu framhaldi af setningu (2.2). Endurtökum þá lokaniðurstöðuna úr síðustu grein: Okkur hefur tekizt að úthluta sérhverju mengi tiltekinni stærð $\#X$, sem við köllum fjöldatölu mengisins, þannig að tvö mengi séu samstétta þá og því aðeins að þau hafi sömu fjöldatölu. Auk þess sáum við að náttúrlegu tölurnar eru fjöldatölur, og að fjöldatala mengis er náttúrlega talan n þá og því aðeins að það sé samstétta menginu $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$

Við viljum sanna nokkrar staðreyndir um fjöldatölur mengja, og þótt við gætum einfaldað ýmislegt með því að notfæra okkur þá eiginleika raðtalna sem við höfum þegar sannað ætlum við að stilla okkur um það. Sér í lagi ætlum stillum við okkur um að nota röðunina sem við höfum skilgreint fyrir raðtölur. Við skilgreinum því röðun fyrir fjöldatölur upp á nýtt, en látum okkur nægja að sýna í athugasemd (3) í (3.2) (fyrir þá lesendur sem hafa fylgt okkur allan tímann) að þetta er sama röðunin og við vorum að nota í síðustu grein.

(3.1) Skilgreining. *Látum α og β vera fjöldatölur og skrifum $\alpha = \#X$ og $\beta = \#Y$, þar sem X og Y eru mengi. Við segjum að fjöldatalan α sé **minni eða jöfn** fjöldatölunni β og skrifum*

$$\alpha \leq \beta$$

*ef til er eintæk vörpun $f : X \to Y$. Við segjum að fjöldatalan α sé **minni** en fjöldatalan β og skrifum*

$$\alpha < \beta$$

ef $\alpha \leq \beta$ og $\alpha \neq \beta$.

(3.2) Athugasemdir. (1) Tökum eftir að skilgreiningin er aðeins háð fjöldatölunum α og β, en ekki valinu á mengjunum X og Y: Ef $\alpha = \#X = \#X'$ og $\beta = \#Y = \#Y'$, þá höfum við gagntækar varpanir $g : X \to X'$ og $h : Y \to Y'$. Ef nú $f : X \to Y$ er eintæk vörpun, þá er vörpunin $h \circ f \circ g^{-1} : X' \to Y'$ eintæk; og sömuleiðis ef $f' : X' \to Y'$ er eintæk vörpun, þá er vörpunin $h^{-1} \circ f' \circ g$ eintæk. Því er ljóst að til er eintæk vörpun frá X til Y þá og því aðeins að til sé eintæk vörpun frá X' til Y'.

(2) Látum $\alpha = \#X$ og $\beta = \#Y$. Að $\alpha < \beta$ þýðir að til er eintæk vörpun frá X til Y og að *ekki sé til gagntæk vörpun frá X til Y*. Það nægir ekki að til sé eintæk vörpun $f : X \to Y$ sem er ekki gagntæk. Látum til dæmis $\mathbb{Z}$ vera mengi allra heilla talna og $2\mathbb{Z} = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}$ vera mengi allra jafnra heilla talna, þá er vörpunin $f : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ þannig að $f(x) := x$ fyrir sérhvert x úr $2\mathbb{Z}$ augljóslega eintæk, en hún er ekki gagntæk. Við megum þó ekki álykta að $2\mathbb{Z}$ hafi minni fjöldatölu en $\mathbb{Z}$. Raunar er auðséð að $\#(2\mathbb{Z}) = \#\mathbb{Z}$, því að vörpununin $g : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ þannig að $g(x) := 2x$ fyrir sérhvert x úr $\mathbb{Z}$ er gagntæk.

(3) Við sýnum (fyrir þá sem hafa fylgt okkur eftir allan tímann, en ekki hlaupið yfir umfjöllunina um raðtölur) að skilgreining (3.1) gefur okkur sömu skilgreininguna á röðun fyrir fjöldatölur og skilgreining (2.4); með öðrum orðum að fyrir fjöldatölur α og β sé $\alpha \leq \beta$ þá og því aðeins að $\alpha \preceq \beta$. Tökum fyrst eftir að sérhver fjöldatala er samstétta sjálfri sér og því fjöldatala sjálfrar sín. Fyrir fjöldatölur α og β höfum við því $\alpha \leq \beta$ þá og því aðeins að til sé eintæk vörpun frá α til β. Ef $\alpha \preceq \beta$, þá er $\alpha \subset \beta$ samkvæmt (2.16). Þá er ívarpið $\alpha \to \beta, x \mapsto x$ eintæk vörpun, svo að $\alpha \leq \beta$.

Gerum því ráð fyrir að $\alpha \leq \beta$. Við höfum þá eintæka vörpun $f : \alpha \to \beta$. Myndmengið $f(\alpha)$ er hlutmengi í raðtölunni β, og röðunin á β gefur af sér velröðun á menginu $f(\alpha)$. Samkvæmt setningu (2.22) er $f(\alpha)$ með þessari velröðun einsmóta raðtölu γ; látum $g : f(\alpha) \to \gamma$ vera einsmótunina sem þannig fæst. Þá er γ samstétta α, því að samskeytingin $g \circ f : \alpha \to \gamma$ er gagntæk vörpun. En α er minnsta raðtalan sem er samstétta α, svo að $\alpha \preceq \gamma$. Nú sést með ofurendanlegri þrepun að $g(x) \preceq x$ fyrir sérhvert x úr $f(\alpha)$: Látum $x \in f(\alpha)$ og gerum ráð fyrir að $g(y) \preceq y$ fyrir öll y úr $f(\alpha)$ þannig að $y \prec x$, þá er $g(y) \prec x$ fyrir öll y úr $f(a)$ þannig að $y \prec x$; en nú er $g(x)$ *minnsta* raðtala þannig að $g(y) \prec g(x)$ fyrir öll y úr $f(a)$ þannig að $y \prec x$, svo að $g(x) \preceq x$. En þá er ljóst að $\gamma \subset \beta$, svo að $\gamma \preceq \beta$ og þar með $\alpha \preceq \beta$.

(3.3) Setning. *Látum α, β og γ vera fjöldatölur.*
(1) *Við höfum $\alpha \leq \alpha$.*
(2) *Ef $\alpha \leq \beta$ og $\beta \leq \alpha$, þá er $\alpha = \beta$.*
(3) *Ef $\alpha \leq \beta$ og $\beta \leq \gamma$, þá er $\alpha \leq \gamma$.*
(4) *Annaðhvort er $\alpha \leq \beta$ eða $\beta \leq \alpha$.*

Sönnun: Ef við viljum notfæra okkur athugasemd (3.2(3)), þá er þetta bein afleiðing setningu (2.11). En nú ætlum við að komast hjá að nota niðurstöður um raðtölur. Fyrir liði (1) og (3) er það einfalt: Látum X, Y og Z vera mengi þannig að $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$ og $\gamma = \#Z$. Samsemdarvörpunin $\mathrm{id}_X : X \to X$ er eintæk, og það gefur okkur lið (1). Ef $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ eru eintækar varpanir, þá er samskeytingin $g \circ f : X \to Z$ eintæk; og þetta gefur okkur lið (3). Hins vegar er ekki jafnauðvelt að sanna hina liðina tvo[1]; til þess þurfum við eftirfarandi tvær setningar: Setning (3.4) er augljóslega jafngild lið (2), og setning (3.5) er jafngild lið (4). □

(3.4) Setning (*Schröder-Bernstein*). *Látum X og Y vera mengi og gerum ráð fyrir að til sé eintæk vörpun frá menginu X í mengið Y, og að til sé eintæk vörpun frá menginu Y í mengið X. Þá er til gagntæk vörpun frá X til Y.*

Sönnun: Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ vera eintækar varpanir. Skilgreinum runu (C_n) af hlutmengjum í X með því að setja

$$C_0 := X \setminus g[Y] \quad \text{og} \quad C_{n+1} := g[f[C_n]]$$

og setjum síðan

$$S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Við sýnum að $g[Y \setminus f[S]] = X \setminus S$:

Gerum fyrst ráð fyrir að $x \in X \setminus S$. Þar sem $C_0 \subset S$ er þá sér í lagi $x \in X \setminus C_0 = g[Y]$, svo að við getum skrifað $x = g(y)$ fyrir eitthvert y úr Y. En þá er ljóst að $y \notin f[S]$, annars mætti skrifa $y = f(x')$, þar sem $x' \in S$; þá fengist $f(x) = y = f(x')$ og því $x = x' \in S$ vegna eintækni vörpunarinnar f. Því er $x \in g[Y \setminus f[S]]$. Við höfum þá sýnt að $X \setminus S \subset g[Y \setminus f[S]]$.

Gerum næst ráð fyrir að $y \in Y \setminus f[S]$ og sýnum að $g(y) \in X \setminus S$ eða með öðrum orðum að $g(y) \notin S$; en það er augljóslega jafngilt því að sýna að $g(y) \notin C_n$ fyrir sérhvert n. Ljóst er að $g(y) \notin C_0$. Gerum því ráð fyrir að til sé n þannig að $n \geq 1$ og $g(y) \in C_n$. Þá er til x úr C_{n-1} þannig að $g(y) = g(f(x))$. Þar sem g er eintæk vörpun fæst $y = f(x)$. En $x \in C_{n-1} \subset S$, svo að $y \in f[S]$ í mótsögn við forsendu. Við höfum þá einnig sýnt að $g[Y \setminus f[S]] \subset X \setminus S$.

Þar sem vörpunin f er eintæk gefur hún af sér gagntæka vörpun frá S á $f[S]$. Þar sem vörpunin g er eintæk gefur hún af sér gagntæka vörpun frá $Y \setminus f[S]$ á $X \setminus S$; látum h

[1] Sagt er að Georg Cantor, höfundi mengjafræðinnar, hafi aldrei tekizt að sanna þessar niðurstöður.

vera andhverfu þeirrar vörpunar. Þá er ljóst að vörpunin $F : X \to Y$ sem er skilgreind með því að setja

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ef } x \in S, \\ h(x) & \text{ef } x \in X \setminus S \end{cases}$$

er gagntæk. □

(3.5) Setning. *Látum X og Y vera mengi. Þá er annaðhvort til eintæk vörpun $f : X \to Y$ eða eintæk vörpun $g : Y \to X$.*

Sönnun: Látum M vera mengi allra þrennda (A, h, B), þar sem A er hlutmengi í X, B er hlutmengi í Y og $h : A \to B$ er gagntæk vörpun. Mengið M er ekki tómt, því að það inniheldur þrenndina (A, h, B), þar sem $A = B = \varnothing$ og h er tóma vörpunin. Við skilgreinum röðun á M með því að setja $(A_1, h_1, B_1) \leq (A_2, h_2, B_2)$ þá og því aðeins að $A_1 \subset A_2$ og $h_2(x) = h_1(x)$ fyrir sérhvert x úr A_1 (og af því leiðir augljóslega að $B_1 \subset B_2$). Látum nú L vera keðju (þ. e. línulega raðað hlutmengi) í M og sýnum að L hefur yfirstak í M: Við setjum

$$A^* := \bigcup_{(A,h,B)\in L} A, \quad B^* := \bigcup_{(A,h,B)\in L} B$$

og skilgreinum vörpun $h^* : A^* \to B^*$ þannig: Fyrir $x \in A^*$ veljum við (A, h, B) úr L þannig að $x \in A$ og setjum $h'(x) := h(x)$. Þessi skilgreining er augljóslega óháð valinu á (A, h, B): Ef (A_1, h_1, B_1) er annað stak í L þannig að $x \in A_1$, þá er annaðhvort $(A_1, h_1, B_1) \leq (A, h, B)$ eða $(A, h, B) \leq (A_1, h_1, B_1)$, og í báðum tilvikum fáum við $h(x) = h_1(x)$. Einnig er ljóst að h^* er gagntæk vörpun. Samkvæmt hjálparsetningu Zorns hefur M hástak; látum (A, h, B) vera slíkt hástak. Við sýnum að annaðhvort er $A = X$ eða $B = Y$: Annars væru til stök a_1 úr $X \setminus A$ og b_1 úr $Y \setminus B$. Við setjum þá $A_1 := A \cup \{a_1\}$ og $B := B \cup \{b_1\}$ og skilgreinum gagntæka vörpun $h_1 : A_1 \to B_1$ með því að setja $h_1(x) := h(x)$ fyrir $x \in A$ og $h_1(a_1) := b_1$. Þá er (A_1, h_1, B_1) stak í M sem er stærra en (A, h, B) í mótsögn við skilgreiningu á (A, h, B).

Ef nú $A = X$, þá fáum við eintæka vörpun $i \circ h : X \to Y$, þar sem $i : B \to Y, y \mapsto y$ er ívarpið. Ef hins vegar $B = Y$, þá fáum við eintæka vörpun $j \circ h : Y \to X$, þar sem $j : A \to X$ er ívarpið. □

(3.6) Skilgreining. (1) *Látum α og β vera fjöldatölur. Veljum mengi X og Y þannig að $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$ og $X \cap Y = \varnothing$. Við skilgreinum **summu** fjöldatalnanna α og β sem*

$$\alpha + \beta := \#(X \cup Y)$$

*og **margfeldi** þeirra sem*

$$\alpha \cdot \beta := \#(X \times Y).$$

Við setjum einnig

$$\alpha^\beta := \#(X^Y),$$

þar sem X^Y er mengi allra varpana frá X til Y.

(2) *Látum* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *vera fjölskyldu af fjöldatölum og veljum fjölskyldu* $(X_i)_{i\in I}$ *af mengjum þannig að* $\alpha_i = \#X_i$ *fyrir sérhvert* i *úr* I *og þannig að* $X_i \cap X_j = \varnothing$ *ef* $i, j \in I$ *og* $i \neq j$. *Við setjum*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i := \#\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \quad \text{og} \quad \prod_{i\in I} \alpha_i := \#\Big(\prod_{i\in I} X_i\Big).$$

Lesandinn getur auðveldlega gengið úr skugga um að skilgreiningin er óháð vali á mengjunum sem hafa gefnu fjöldatölurnar. Sönnun eftirfarandi setningar er einnig auðveld og eftirlátin lesanda:

(3.7) Setning. (1) *Látum* α, β *og* γ *vera fjöldatölur. Þá gilda tengireglurnar*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \quad \text{og} \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

víxlreglurnar

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{og} \quad \alpha\beta = \beta\alpha,$$

dreifireglan

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

og veldareglurnar

$$(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma, \quad \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma \quad \text{og} \quad \alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma.$$

Einnig er

$$\alpha + 0 = 1\alpha = \alpha.$$

(2) *Ef* α *og* β *eru fjöldatölur,* I *er mengi þannig að* $\#I = \beta$ *og* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *er fjölskylda af fjöldatölum þannig að* $\alpha_i = \alpha$ *fyrir sérhvert* $i \in I$, *þá er*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \alpha\beta \quad \text{og} \quad \prod_{i\in I} \alpha_i = \alpha^\beta.$$

(3) *Látum* α *og* β *vera fjöldatölur. Við höfum* $\beta \leq \alpha$ *þá og því aðeins að til sé fjöldatala* γ *þannig að* $\alpha = \beta + \gamma$.

(4) *Ef* α, β, γ *og* δ *eru fjöldatölur þannig að* $\alpha \leq \beta$ *og* $\gamma \leq \delta$, *þá er*

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \delta \quad \text{og} \quad \alpha\gamma \leq \beta\delta$$

Ef að auki $\beta \neq 0$, *þá er*

$$\alpha^\gamma \leq \beta^\delta$$

Almennar, ef $(\alpha_i)_{i\in I}$ *og* $(\beta_i)_{i\in I}$ *eru fjöldskyldur af fjöldatölum með sama skilgreiningarmengi og* $\alpha_i \leq \beta_i$ *fyrir sérhvert* i *úr* I, *þá er*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \leq \sum_{i\in I} \beta_i \quad \text{og} \quad \prod_{i\in I} \alpha_i \leq \prod_{i\in I} \beta_i. \qquad \square$$

Munum að að sérhver náttúrleg tala er fjöldatala. Við getum nú skilgreint:

(3.8) Skilgreining. (1) *Fjöldatala er sögð vera* ***óendanleg*** *ef hún er ekki náttúrleg tala. Mengi X er sagt vera* ***endanlegt*** *ef fjöldatala þess er náttúrleg tala; að öðrum kosti er það sagt vera* ***óendanlegt****.*

(2) *Fjöldatala mengis allra náttúrlegu talnanna er táknuð*

$$\aleph_0 := \#\mathbb{N}.$$

Mengi X er sagt vera ***teljanlega óendanlegt*** *ef $\#X = \aleph_0$. Það er sagt vera* ***teljanlegt*** *ef $\#X \leq \aleph_0$; með öðrum orðum er mengi teljanlegt þá og því aðeins að það sé annaðhvort endanlegt eða teljanlega óendanlegt.*

(3.9) Athugasemdir. (1) Þar sem fjöldatala mengis A er náttúrlega talan n þá og því aðeins að það sé samstétta menginu $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$ er ljóst að þessi nýja skilgreining endanlegs mengis í (3.8) kemur heim við gömlu skilgreininguna okkar í (I.3.3) í fyrsta kafla.

(2) Fyrir þá sem lásu síðustu grein tökum við fram: Útfrá skilgreiningu fjöldatalna er ljóst að $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$. Einnig er ljóst útfrá niðurstöðum okkar um raðtölur að $\aleph_0$ er *minnsta* óendanlega fjöldatalan; við gefum þó aðra sönnun á þeirri staðreynd sem notar engar niðurstöður um raðtölur.

(3.10) Setning. *Fjöldatalan $\aleph_0$ er minnsta óendanlega fjöldatalan; með öðrum orðum er hún óendanleg og $\aleph_0 \leq \alpha$ fyrir sérhverja óendanlega fjöldatölu.*

Sönnun: Við eftirlátum lesanda að ganga úr skugga um að mengið $\mathbb{N}$ er ekki endanlegt, og þar með að $\aleph_0$ sé óendanleg fjöldatala. [Það er raunar sannað í setningu (2.27), og sönnuninni má auðveldlega breyta þannig að hún notist ekki við raðtölur.]

Þá þarf einungis að sanna: Ef X er óendanlegt mengi, þá er til eintæk vörpun $f : \mathbb{N} \to X$. Til að sýna það látum við Y vera mengi allra hlutmengja A úr X þannig að $A \neq \varnothing$. Samkvæmt frumsendu um val er til fjöldskylda $(x_A)_{A \in Y}$ þannig að $x_A \in A$ fyrir sérhvert A úr Y. Skilgreinum nú vörpun $f : \mathbb{N} \to X$ með þrepun þannig að

$$f(0) := a_X, \quad f(n+1) := a_{X \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}};$$

þetta er skynsamleg skilgreining, því að augljóslega er mengið $X \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$ ekki tómt; annars væri X endanlegt. Nú er ljóst að fyrir $n < m$ er $f(m) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}$ og sér í lagi er $f(m) \neq f(n)$. Þar með er f eintæk vörpun. $\square$

(3.11) Fylgisetning. *Fjöldatala α er óendanleg þá og því aðeins að $\alpha + 1 = \alpha$.*

Sönnun: Auðsannað er með þrepun að fyrir náttúrlega tölu n er $n + 1 > n$. Látum því α vera óendanlega fjöldatölu, X vera mengi þannig að $\#X = \alpha$ og y vera stak þannig að $y \notin X$. Þá er $\alpha + 1 = \#(X \cup \{y\})$. Látum nú $f : \mathbb{N} \to X$ vera eintæka vörpun og skilgreinum vörpun $g : X \cup \{y\} \to X$ með því að setja

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{ef } x \in X \setminus f[\mathbb{N}], \\ f(n+1) & \text{ef } x = f(n) \text{ fyrir eitthvert } n \text{ úr } \mathbb{N}, \\ f(0) & \text{ef } x = y. \end{cases}$$

Þá er ljóst að g er gagntæk vörpun, og því er $\alpha + 1 = \alpha$. $\square$

Með þrepun fæst:

(3.12) Fylgisetning. *Fyrir sérhverja óendanlega fjöldatölu α og sérhverja náttúrlega tölu n er $\alpha + n = \alpha$.* □

(3.13) Setning. *Við höfum $\aleph_0^2 = \aleph_0$.*

Sönnun: Ljóst er að við höfum eintækar varpanir $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}, n \mapsto (n,0)$ og $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^n 3^m$, svo að $\aleph_0 \le \aleph_0^2$ og $\aleph_0^2 \le \aleph_0$ og því $\aleph_0^2 = \aleph_0$ samkvæmt Schröder-Bernstein-setningunni. □

Almennar höfum við:

(3.14) Setning. *Ef α er óendanleg fjöldatala, þá er*

$$\alpha^2 = \alpha.$$

Sönnun: Við notum hjálparsetningu Zorns. Látum Z vera mengi þannig að $\#Z = \alpha$. Samkvæmt (3.10) er $\aleph_0 \le \alpha$, svo að Z inniheldur teljanlega óendanlegt hlutmengi A. Samkvæmt (3.13) er til gagntæk vörpun $\eta : A \times A \to A$. Látum nú $\mathcal{M}$ vera mengi allra tvennda (X, ϕ) þannig að $A \subset X \subset Z$ og $\phi : X \times X \to X$ sé gagntæk vörpun þannig að ϕ taki sömu gildi og η á $A \times A$. Við röðum menginu $\mathcal{M}$ með því að setja

$$(X,\phi) \le (Y,\psi) \quad \text{þá og því aðeins að } X \subset Y \text{ og } \psi \text{ taki sömu gildi og } \phi \text{ á } X \times X.$$

Ef nú $\mathcal{C}$ er línulega raðað hlutmengi í $\mathcal{M}$, þá er ljóst að við fáum yfirstak (Z, χ) í $\mathcal{M}$ fyrir mengið $\mathcal{C}$ með því að láta Z vera sammengi allra mengja X, þar sem $(X,\phi) \in \mathcal{C}$, og skilgreina $\chi(x,y) := \phi(x,y)$ ef $x,y \in X$ og $(X,\phi) \in \mathcal{C}$. Samkvæmt hjálparsetningu Zorns hefur $\mathcal{M}$ hástak; táknum það með (X,ϕ). Augljóslega nægir að sýna að $\#X = \alpha$.

Gerum því ráð fyrir að $\beta := \#X < \alpha$ og leiðum það til mótsagnar. Þar sem $\phi : X \times X \to X$ er gagntæk vörpun er $\beta^2 = \beta$, og þar sem $A \subset X$ er mengið X óendanlegt. Við höfum þá $\beta \le 2\beta \le 3\beta \le \beta^2 = \beta$, svo að $\beta = 2\beta = 3\beta$. Þar sem $\beta < \alpha$ er $\#(Z \setminus X) > \beta$, annars fengist $\alpha = \#Z = \#(Z\setminus X) + \#X \le \beta + \beta = 2\beta = \beta$. Því er til hlutmengi B í $Z \setminus X$ þannig að $\#B = \beta$. Setjum $Y := X \cup B$. Þá er $(Y \times Y) \setminus (X \times X)$ sammengi mengjanna

$$X \times B, \quad B \times X \quad \text{og} \quad B \times B.$$

Þessi þrjú mengi eru sundurlæg tvö og tvö, og hvert þeirra hefur fjöldatöluna $\beta^2 = \beta$, svo að sammengi þeirra hefur fjöldatöluna $3\beta = \beta$. Því er til gagntæk vörpun χ frá menginu $(Y\times Y) \setminus (X \times X)$ á mengið B. Við fáum þá gagntæka vörpun ψ frá menginu $Y \times Y$ á mengið $Y = X \cup B$ með því að setja

$$\psi(x,y) := \begin{cases} \phi(x,y) & \text{ef } (x,y) \in X \times X, \\ \chi(x,y) & \text{ef } (x,y) \in (Y\times Y)\setminus(X\times X). \end{cases}$$

En það þýðir að (Y,ψ) er stak í menginu $\mathcal{M}$, og (Y,ψ) er stærra en (X,ϕ), í mótsögn við skilgreininguna á (X,ϕ). □

Með þrepun fæst:

(3.15) Fylgisetning. *Ef α er óendanleg fjöldatala og n er náttúrleg tala þannig að $n \geq 1$, þá er $\alpha^n = \alpha$.* □

(3.16) Setning. *Ef α og β eru fjöldatölur þannig að þannig að $\alpha \geq 1$, $\alpha \leq \beta$ og fjöldatalan β sé óendanleg, þá er $\alpha\beta = \beta$.*

Sönnun: Við höfum $\beta \leq \alpha\beta \leq \beta^2 = \beta$. □

(3.17) Setning. *Ef α og β eru óendanlegar fjöldatölur þannig að $\alpha \leq \beta$, þá er*

$$\alpha + \beta = \alpha\beta = \beta.$$

Sönnun: Við höfum $\beta \leq \alpha + \beta \leq 2\beta \leq \alpha\beta = \beta$. □

(3.18) Setning. *Látum α vera óendanlega fjöldatölu og $(\alpha_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af fjöldatölum. Gerum ráð fyrir að $\#I \leq \alpha$, að $\alpha_i \leq \alpha$ fyrir sérhvert i úr I og að til sé stak j úr I þannig að $\alpha_j = \alpha$. Þá er*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \alpha.$$

Sönnun: Setjum $\beta_i := \alpha$ fyrir sérhvert i úr I. Samkvæmt lið (2) í setningu (3.7) er

$$\alpha = \alpha_j \leq \sum_{i\in I} \alpha_i \leq \sum_{i\in I} \beta_i = \#I \cdot \alpha \leq \alpha^2 = \alpha.$$ □

(3.19) Fylgisetning. *Sammengi teljanlega margra teljanlegra mengja er teljanlegt.* □

Samkvæmt (3.15) er $\aleph_0^n = \aleph_0$ fyrir sérhverja náttúrlega tölu n þannig að $n \geq 1$, og af því leiðir að mengjamargfeldið $A_1 \times \cdots \times A_n$ ef endanlega mörgum teljanlegum mengjum $A_1, \ldots, A_n$ er teljanlegt. Það er því alls ekki ljóst að til sé nokkur fjöldatala sem er stærri en $\aleph_0$. Af næstu setningu leiðir hins vegar að til eru afar margar óendanlegar fjöldatölur:

(3.20) Setning (*Cantor*). *Fyrir sérhverja fjöldatölu α er*

$$\alpha < 2^\alpha.$$

Sönnun: Látum X vera mengi þannig að $\#X = \alpha$ og látum $\mathcal{P}(X)$ vera mengi allra hlutmengja í X. Fyrir sérhvert hlutmengi A í X skilgreinum við vörpun $\chi_A : X \to \{0,1\}$ með því að setja

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{ef } x \in A, \\ 0 & \text{ef } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Þá er ljóst að vörpunin

$$\mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X, A \mapsto \chi_A$$

er gagntæk, svo að $\#\mathcal{P}(X) = 2^\alpha$. Nú er ljóst að vörpunin $X \to \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$ er eintæk, svo að $\alpha \leq 2^\alpha$. Til að sýna að $\alpha < 2^\alpha$ nægir því að sýna að ekki sé til gagntæk vörpun $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Gerum því ráð fyrir að $f : X \to \mathcal{P}(X)$ sé vörpun og setjum

$$Y := \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Við sýnum að ekki er til neitt stak y úr X þannig að $f(y) = Y$. Gerum því ráð fyrir að y sé slíkt stak. Þá er annaðhvort $y \in Y$ eða $y \in X \setminus Y$. Ef $y \in Y$, þá er $x \notin f(y) = Y$ samkvæmt skilgreiningu á Y, og það er mótsögn. Ef hins vegar $y \in X \setminus Y$, þá er $y \notin Y = f(y)$ og því $y \in Y$ samkvæmt skilgreiningu á Y, en það er einnig mótsögn. Því kemur hvorugur kosturinn til greina.

Við höfum þá sýnt að vörpun $f : X \to \mathcal{P}(X)$ getur ekki verið átæk, og þá er hún heldur ekki gagntæk. □

Setning (3.20) segir sér í lagi að mengið $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ af öllum vörpunum $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ er ekki teljanlegt. En hún hefur fleiri afleiðingar:

(3.21) Fylgisetning. *Til eru óendanlega margar óendanlegar fjöldatölur.*

Sönnun: Skilgreinum runu $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af fjöldatölum með þrepun þannig að $\alpha_0 := \aleph_0$ og $\alpha_{n+1} := 2^{\alpha_n}$. Samkvæmt setningu (3.20) er runan stranglega vaxandi, og sér í lagi eru öll stök hennar ólík. □

Raunar getum við ályktað meira: Fjöldatölurnar eru það margar að ekkert mengi getur innihaldið þær allar.

(3.22) Setning. *Ekki er til neitt mengi sem hefur allar fjöldatölur sem stök.*

Sönnun: Gerum ráð fyrir að til sé slíkt mengi Z og látum I vera mengi allra staka í Z sem eru fjöldatölur; með öðrum orðum er þá I mengi allra fjöldatalna. Fyrir sérhvert stak α úr I veljum við mengi X_α þannig að $\alpha = \#X_\alpha$. Setjum $Y := \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ og $\beta := \#Y$. Fyrir sérhverja fjöldatölu α er $X_\alpha \subset Y$ og þar með $\alpha \leq \beta$. Fyrir $\alpha = 2^\beta$ fæst þá $2^\beta \leq \beta$, í mótsögn við setningu (3.20). □

(3.23) Athugasemd. Þessi lokaathugasemd er fyrir þá sem hafa lesið greinina um raðtölur.

Þar sem sérhverju mengi af raðtölum er velraðað og fjöldatölur eru sérstakar raðtölur er ljóst: Ef Ω er eitthvert mengi af fjöldatölum, þá er til *minnsta* fjöldatala β þannig að $\beta > \alpha$ fyrir sérhvert stak α úr Ω. Þá er ljóst að fjöldatalan $\aleph_0$ er fremsta stakið í runu $(\aleph_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af fjöldatölum sem er skilgreind þannig að $\aleph_{n+1}$ er minnsta fjöldatalan sem er stærri en allar fjöldatölurnar $\aleph_0, \dots, \aleph_n$. Næst getum við skilgreint fjöldatölu $\aleph_\omega$ sem er minnsta fjöldatalan sem er stærri en allar fjöldatölurnar í menginu $\{\aleph_n : n \in \mathbb{N}\}$. Almennt getum við fyrir sérhverja raðtölu α skilgreint fjöldatölu $\aleph_\alpha$ sem minnstu fjöldatöluna sem er stærri en sérhver fjöldatala í menginu $\{\aleph_\beta : \beta \in \alpha\}$. Fyrir raðtölur α og β þannig að $\alpha \neq \beta$ er þá ljóslega $\aleph_\alpha \neq \aleph_\beta$. Einnig er ekki erfitt að sjá að *sérhver* fjöldatala er $\aleph_\alpha$ fyrir einhverja raðtölu α. Þótt óendanlegu fjöldatölurnar virðist kannski liggja afskaplega „dreift“ innanum allar raðtölurnar, þannig að til dæmis virðist næsta óyfirsjáanlegur sægur raðtalna liggja milli fjöldatalnanna $\aleph_0$ og $\aleph_1$, þá eru fjöldatölurnar í einhverjum skilningi „jafnmargar og raðtölurnar“; nefnilega í þeim skilningi að við getum tölusett fjöldatölurnar með raðtölunum þannig að fyrir sérhverja gefna fjöldatölu er til *nákvæmlega ein* raðtala α þannig að gefna fjöldatalan sé $\aleph_\alpha$.

Fjöldatalan $\aleph_1$ er minnsta fjöldatala sem er stærri en fjöldatalan $\aleph_0$. Nú má sýna að $\#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$; með öðrum orðum er $2^{\aleph_0}$ fjöldatala rauntalnamengisins, eða „fjöldatala samfellunnar“, eins og það var orðað fyrr á tímum. ***Samfellutilgáta Cantors*** segir að

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Þetta þýðir að sérhvert hlutmengi í $\mathbb{R}$ sem er ekki teljanlegt sé samstétta $\mathbb{R}$, eða með öðrum orðum að ekki sé til neitt hlutmengi í rauntalnamenginu $\mathbb{R}$ sem hefur stærri fjöldatölu en mengi náttúrlegu talnanna, en minni fjöldatölu en mengi rauntalnanna. Síðar var sett fram svokölluð ***alhæfð samfellutilgáta***, sem segir að

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

fyrir sérhverja raðtölu α.

Árið 1940 sýni Kurt Gödel að ekki er unnt að *afsanna* samfellutilgátu Cantors útfrá frumsendum Zermelo-Fraenkel-mengjafræðinnar, og árið 1963 sýndi Paul J. Cohen að ekki er unnt að *sanna* hana útfrá þessum sömu frumsendum. Ennþá síður er þá unnt að sanna eða afsanna alhæfðu samfellutilgátuna útfrá þessum frumsendum. Enn er þeirri spurningu ósvarað hvort unnt sé að bæta við Zermelo-Fraenkel-mengjafræðina einhverjum „eðlilegum og skynsamlegum frumsendum“ sem gera kleift að sanna eða afsanna samfellutilgátuna.