Awersja do ryzyka a portfel inwestora

Wioletta Szeligowska

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Kraków, 17 kwietnia 2016 r.

Plan prezentacji

Założenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora

Założenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna

Założenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko

Założenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko
- $X > 0$ - zysk, $X < 0$ - strata

Założenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko
- $X > 0$ - zysk, $X < 0$ - strata
- $EX < \infty$

Założenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko
- $X > 0$ - zysk, $X < 0$ - strata
- $EX < \infty$
- u - funkcja użyteczności
  $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u$ - dwukrotnie różniczkowalna

Awersja do ryzyka

Definicja

Mówimy, że inwestor ma awersję do ryzyka X, jeśli

$$\forall_{w \geqslant 0} \quad u(w + EX) \geqslant Eu(w + X). \tag{1}$$

Awersja do ryzyka

Definicja

Mówimy, że inwestor ma awersję do ryzyka X, jeśli

$$\forall_{w \geqslant 0} \quad u(w + EX) \geqslant Eu(w + X). \tag{1}$$

Załóżmy, że funkcja użyteczności $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją **ściśle rosnącą**.

Awersja do ryzyka

Definicja

Mówimy, że inwestor ma awersję do ryzyka X, jeśli

$$\forall_{w \geqslant 0} \quad u(w + EX) \geqslant Eu(w + X). \tag{1}$$

Załóżmy, że funkcja użyteczności $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją **ściśle rosnącą**.

Twierdzenie

Inwestor ma awersję do ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy posługuje się wklęsłą funkcją użyteczności.

Uwaga

Z założenia, że funkcja użyteczności $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz powyższego twierdzenia wynika, że $u'(w) > 0$ i $u''(w) \leqslant 0$ dla dowolnego majątku $w \geqslant 0$.

Premia za ryzyko

Definicja

Premią za ryzyko X (ang. risk premium) nazywamy wielkość $\pi(w, X)$, która jest rozwiązaniem równania

$$u(w + EX - \pi(w, X)) = Eu(w + X). \tag{2}$$

Premia za ryzyko

Definicja

Premią za ryzyko X (ang. risk premium) nazywamy wielkość $\pi(w, X)$, która jest rozwiązaniem równania

$$u(w + EX - \pi(w, X)) = Eu(w + X). \tag{2}$$

Bez straty ogólności rozważań zakładamy, że $EX = 0$.

Miara awersji do ryzyka

Definicja

Miarą lokalnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta nazywamy wielkość

$$r(w) := -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Wielkość $r(w)$ nazywamy również współczynnikiem bezwzględnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta.

Uwaga

Miara lokalnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta jest niezmiennicza ze względu na przekształcenia afiniczne funkcji użyteczności, tzn. jeśli $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami użyteczności oraz $u_2(w) = au_1(w) + b$ dla $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$, to $r_1(w) = r_2(w)$ dla dowolnego $w \geqslant 0$.

Istotnie, niech $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $u_2(w) = au_1(w) + b$ dla $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$r_2(w) = -\frac{u_2''(w)}{u_2'(w)} = -\frac{au_1''(w)}{au_1'(w)} = -\frac{u_1''(w)}{u_1'(w)} = r_1(w)$$

dla dowolnego $w \geqslant 0$.

Twierdzenie Pratta

Twierdzenie (Pratt, 1964)

Niech $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą ściśle rosnącymi i wklęsłymi funkcjami użyteczności oraz niech u_1, u_2 będą dwukrotnie różniczkowalne. Załóżmy, że r_1, r_2 są miarami awersji do ryzyka odpowiadającymi tym funkcjom użyteczności oraz π_1, π_2 są premiami za ryzyko wyznaczonymi z równania (2) przy funkcjach u_1, u_2 odpowiednio. Następujące warunki są równoważne:

1. $r_1(w) \geqslant r_2(w)$ dla każdego $w \geqslant 0$;
2. $u_1 = G \circ u_2$ dla pewnej ściśle rosnącej i wklęsłej funkcji G;
3. $\pi_1(w, X) \geqslant \pi_2(w, X)$ dla każdego $w \geqslant 0$ i dowolnej zmiennej losowej X takiej, że $EX = 0$.

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $x \geqslant 0$ - stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $x \geqslant 0$ - stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $x \geqslant 0$ - stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z instrumentu ryzykownego

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $x \geqslant 0$ - stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z instrumentu ryzykownego
- $EY \geqslant x$

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $x \geqslant 0$ - stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z instrumentu ryzykownego
- $EY \geqslant x$
- $a \in [0, 1]$ - część całkowitego majątku w zainwestowanego w instrument ryzykowny

Opis problemu 1

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $x \geqslant 0$ - stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z instrumentu ryzykownego
- $EY \geqslant x$
- $a \in [0, 1]$ - część całkowitego majątku w zainwestowanego w instrument ryzykowny
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ściśle rosnąca i wklęsła funkcja użyteczności klasy $C^2(\mathbb{R})$

Wartość portfela dana jest wzorem

$$W = w[(1-a)x + aY] = w(x + aZ),$$

gdzie $Z = Y - x$ i $EZ \geqslant 0$.
Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy $w = 1$.

Wartość portfela dana jest wzorem

$$W = w[(1-a)x + aY] = w(x + aZ),$$

gdzie $Z = Y - x$ i $EZ \geqslant 0$.
Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy $w = 1$.

Zakładamy, że obaj inwestorzy maksymalizują przeciętną użyteczność z portfela ze względu na część majątku zainwestowaną w drugi instrument ryzykowny, tzn.

$$\max_{0 \leqslant a \leqslant 1} Eu(x + aZ).$$

Zatem szukamy $a \in [0, 1]$, dla którego powyższe maksimum jest osiągane.

Załóżmy, że pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka od drugiego inwestora w sensie Arrowa-Pratta.
Oznaczmy

$$a_i = \operatorname*{argmax}_{0 \leqslant a \leqslant 1} Eu_i(x + aZ).$$

Załóżmy, że pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka od drugiego inwestora w sensie Arrowa-Pratta.
Oznaczmy

$$a_i = \underset{0 \leqslant a \leqslant 1}{\operatorname{argmax}} Eu_i(x + aZ).$$

Problem

Czy istnieje zależność między a_1 i a_2?

Wnioski z twierdzenia Pratta

Wniosek

Jeśli na rynku dostępne są dwa aktywa - ryzykowny i wolny od ryzyka oraz inwestor pierwszy ma większą awersję do ryzyka w sensie Arrowa-Pratta od inwestora drugiego, to inwestor pierwszy będzie miał więcej instrumentów nieryzykownych w portfelu niż inwestor drugi, jeśli inwestorzy ustalają składy swoich portfeli maksymalizując użyteczność przeciętnego zysku.

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego
- $E[Y|X] \geqslant X$

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego
- $E[Y|X] \geqslant X$
- $a \in [0, 1]$ - część całkowitego majątku w zainwestowanego w drugi instrument ryzykowny

Opis problemu 2

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego
- $E[Y|X] \geqslant X$
- $a \in [0, 1]$ - część całkowitego majątku w zainwestowanego w drugi instrument ryzykowny
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ściśle rosnąca i wklęsła funkcja użyteczności klasy $C^2(\mathbb{R})$

Wartość portfela dana jest wzorem

$$W = w[(1-a)X + aY] = w(X + aZ),$$

gdzie $Z = Y - X$ i $E[Z|X] \geqslant 0$.
Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy $w = 1$.

Wartość portfela dana jest wzorem

$$W = w[(1-a)X + aY] = w(X + aZ),$$

gdzie $Z = Y - X$ i $E[Z|X] \geqslant 0$.
Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy $w = 1$.

Zakładamy, że obaj inwestorzy maksymalizują przeciętną użyteczność z portfela ze względu na część majątku zainwestowaną w drugi instrument ryzykowny, tzn.

$$\max_{0 \leqslant a \leqslant 1} Eu_i(X + aZ).$$

Zatem szukamy $a \in [0, 1]$, dla którego powyższe maksimum jest osiągane.

Załóżmy, że pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka od drugiego inwestora w sensie Arrowa-Pratta.
Oznaczmy

$$a_i = \operatorname*{argmax}_{0 \leqslant a \leqslant 1} Eu_i(X + aZ).$$

Załóżmy, że pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka od drugiego inwestora w sensie Arrowa-Pratta.
Oznaczmy

$$a_i = \operatorname*{argmax}_{0 \leqslant a \leqslant 1} Eu_i(X + aZ).$$

Problem

Czy zachodzi zależność $a_1 \leqslant a_2$?

Awersja w modelu Rossa

Założenia

- u_1, u_2 - funkcje użyteczności
  $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_i' > 0, \quad u_i'' < 0, \quad u_i \in C^2(\mathbb{R}) \quad$ dla $i = 1, 2$

Awersja w modelu Rossa

Założenia

- u_1, u_2 - funkcje użyteczności
  $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_i' > 0, \quad u_i'' < 0, \quad u_i \in C^2(\mathbb{R}) \quad$ dla $i = 1, 2$
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna

Awersja w modelu Rossa

Założenia

- u_1, u_2 - funkcje użyteczności
  $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_i' > 0, \quad u_i'' < 0, \quad u_i \in C^2(\mathbb{R}) \quad$ dla $i = 1, 2$
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko

Awersja w modelu Rossa

Założenia

- u_1, u_2 - funkcje użyteczności
  $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_i' > 0, \quad u_i'' < 0, \quad u_i \in C^2(\mathbb{R})$ dla $i = 1, 2$
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko
- $X > 0$ - zysk, $X < 0$ - strata

Awersja w modelu Rossa

Założenia

- u_1, u_2 - funkcje użyteczności
  $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_i' > 0, \quad u_i'' < 0, \quad u_i \in C^2(\mathbb{R}) \quad$ dla $i = 1, 2$
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko
- $X > 0$ - zysk, $X < 0$ - strata
- $EX = 0$

Awersja w modelu Rossa

Założenia

- u_1, u_2 - funkcje użyteczności
  $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_i' > 0, \quad u_i'' < 0, \quad u_i \in C^2(\mathbb{R})$ dla $i = 1, 2$
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca ryzyko
- $X > 0$ - zysk, $X < 0$ - strata
- $EX = 0$
- W - majątek inwestora będący zmienną losową
  $W \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tzn. $esssup|W| = \inf\{t : P(|W| \leqslant t) = 1\} < \infty$

Premia za ryzyko

Definicja

Premią za ryzyko X przy zadanym majątku W nazywamy wielkość $\pi(W, X)$, która jest rozwiązaniem równania

$$E\left[u\left(W - \pi(W, X)\right)\right] = Eu(W + X). \tag{3}$$

Awersja do ryzyka

Definicja

Mówimy, że inwestor z funkcją użyteczności u_1 ma większą awersję do ryzyka od inwestora z funkcją użyteczności u_2, jeśli istnieje stała $\lambda > 0$ taka, że dla dowolnych w_1, $w_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\frac{u_1''(w_1)}{u_2''(w_1)} \geqslant \lambda \geqslant \frac{u_1'(w_2)}{u_2'(w_2)}. \tag{4}$$

Twierdzenie o związku między awersją w modelu Arrowa-Pratta a awersją w modelu Rossa

Twierdzenie

Jeśli pierwszy inwestor z funkcją użyteczności u_1 ma większą awersję do ryzyka w sensie Rossa od drugiego inwestora z funkcją użyteczności u_2, to pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka w sensie Arrowa- Pratta od drugiego inwestora. Ponadto implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Twierdzenie Rossa

Twierdzenie (Ross, 1981)

Niech $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą ściśle rosnącymi i ściśle wklęsłymi funkcjami użyteczności klasy $C^2(\mathbb{R})$. Załóżmy, że $\pi_1(W, X)$ oraz $\pi_2(W, X)$ są premiami za ryzyko wyznaczonymi z równania (3) przy funkcjach u_1, u_2 odpowiednio. Następujące warunki są równoważne:

(i) istnieje stała $\lambda > 0$ taka, że dla dowolnych w_1, $w_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\frac{u_1''(w_1)}{u_2''(w_1)} \geqslant \lambda \geqslant \frac{u_1'(w_2)}{u_2'(w_2)}; \tag{5}$$

(ii) istnieje malejąca i wklęsła funkcja G oraz stała $\lambda > 0$ takie, że

$$u_1 = \lambda u_2 + G; \tag{6}$$

(iii) dla dowolnych zmiennych losowych W i X takich, że $E(X|W) = 0$ zachodzi

$$\pi_1(W, X) \geqslant \pi_2(W, X). \tag{7}$$

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego
- $E[Y|X] \geqslant X$

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego
- $E[Y|X] \geqslant X$
- $a \in \mathbb{R}$ - część całkowitego majątku w zainwestowanego w drugi instrument ryzykowny

Opis problemu

Oznaczenia

- $w \geqslant 0$ - majątek inwestora
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z pierwszego instrumentu ryzykownego
- $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z drugiego instrumentu ryzykownego
- $E[Y|X] \geqslant X$
- $a \in \mathbb{R}$ - część całkowitego majątku w zainwestowanego w drugi instrument ryzykowny
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ściśle rosnąca i ściśle wklęsła funkcja użyteczności klasy $C^2(\mathbb{R})$

Wartość portfela dana jest wzorem

$$W = w[(1-a)X + aY] = w(X + aZ),$$

gdzie $Z = Y - X$ i $E[Z|X] \geqslant 0$.
Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy $w = 1$.

Wartość portfela dana jest wzorem

$$W = w[(1-a)X + aY] = w(X + aZ),$$

gdzie $Z = Y - X$ i $E[Z|X] \geqslant 0$.
Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy $w = 1$.

Zakładamy, że obaj inwestorzy maksymalizują przeciętną użyteczność z portfela ze względu na część majątku zainwestowaną w drugi instrument ryzykowny, tzn.

$$\max_{a \in \mathbb{R}} Eu(X + aZ).$$

Zatem szukamy $a \in \mathbb{R}$, dla którego powyższe maksimum jest osiągane.

Załóżmy, że pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka od drugiego inwestora.
Oznaczmy

$$a_i = \underset{a \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmax}}\, Eu_i(X + aZ).$$

Załóżmy, że pierwszy inwestor ma większą awersję do ryzyka od drugiego inwestora.
Oznaczmy

$$a_i = \operatorname*{argmax}_{a \in \mathbb{R}} Eu_i(X + aZ).$$

Problem

Czy zachodzi zależność $a_1 \leqslant a_2$?

Wniosek z twierdzenia Rossa

Wniosek

Załóżmy, że na rynku dostępne są tylko dwa aktywa ryzykowne oraz inwestorzy budują swoje portfele maksymalizując oczekiwaną użyteczność majątku. Jeśli inwestor pierwszy ma większą awersję do ryzyka w sensie Rossa od inwestora drugiego, to pierwszy inwestor wybierze mniej ryzykowny portfel.

Nierówność Czebyszewa dla warunkowej wartości oczekiwanej

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że zmienne losowe X i Y są kontrmonotoniczne, jeśli dla dowolnych $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))\,(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \leqslant 0. \tag{8}$$

Twierdzenie

(Nierówność Czebyszewa dla WWO) Niech X i Y będą zmiennymi losowymi całkowalnymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ponadto niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem zawartym w $\mathcal{F}$. Jeśli X i Y są funkcjami kontrmonotonicznymi, to

$$E(XY|\mathcal{A}) \leqslant E(X|\mathcal{A}) \cdot E(Y|\mathcal{A}) \quad p.n. \tag{9}$$

Uogólniona całka Choqueta

Uogólniona całka Choqueta

$$C_{\mu\nu}(X) := \int_0^\infty \mu(X > t)dt - \int_{-\infty}^0 \nu(X < t)dt, \quad (10)$$

gdzie
μ, ν - funkcje zniekształcenia.

Literatura

- Kenneth J. Arrow, *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, Markham Publishing Co., Chicago (1971).
- Louis Eeckhoudt, Christian Gollier, Harris Schlesinger, *Economic and Financial Decisions under Risk*, Princeton Univerity Press (2005).
- Christian Gollier, *The Economics of Risk and Time*, MIT Press, Cambridge (2001).
- John W. Pratt, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica **32** (1964), 122–136.
- Ariel Rubinstein, *Lecture Notes in Microeconomic Theory*, Princeton Univerity Press (2011).
- Stephen A. Ross *Some stronger measures of risk aversion in the small and in the large with applications*, Econometrica **49** (1981), 621–663.
- Amos Tverski, Daniel Kahneman, *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, Journl of Risk and Uncertainty **5** (2011), 297–323.

Dziękuję za uwagę