Mathematics NAKPRASITH

MATHEMATICS CONCEPTS

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์

มัธยมศึกษาตอนปลาย

PAT1 & คณิตศาสตร์ 1 (วิชาสามัญ)

อาจารย์รังสรรค์ ทองสุกนอก

โรงเรียนนาคประสิทธิ์ มูลนิธิวัดบางช้างเหนือ อ.สามพราน จ.นครปฐม

FB : GTRmath

เนื้อหาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (PAT 1 และ วิชาสามัญ)

เนื้อหา ม.ปลาย		
1. เซต	**PAT 1**	
2. ตรรกศาสตร์	**PAT 1**	
3. ระบบจำนวนจริง	**PAT 1**	วิชาสามัญ
4. ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น		วิชาสามัญ
5. เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย	**PAT 1**	วิชาสามัญ
6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	**PAT 1**	
7. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชัน ลอการิทึม	**PAT 1**	วิชาสามัญ
8. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	**PAT 1**	วิชาสามัญ
9. เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น	**PAT 1**	วิชาสามัญ
10. เวกเตอร์	**PAT 1**	วิชาสามัญ
11. จำนวนเชิงซ้อน	**PAT 1**	วิชาสามัญ
12. ลำดับและอนุกรม	**PAT 1**	วิชาสามัญ
13. แคลคูลัส	**PAT 1**	วิชาสามัญ
14. ความน่าจะเป็น	**PAT 1**	วิชาสามัญ
15. สถิติ	**PAT 1**	วิชาสามัญ
16. ทักษะกระบวนการ	**PAT 1**	วิชาสามัญ

1. เซต

1. x เป็น**สมาชิก**ของเซต A เขียนแทนด้วย $x \in A$

   จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A)$

2. **เซตจำกัด** หมายถึง เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

   เซตอนันต์ หมายถึง เซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด

   เซตว่าง หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ โดยแทนเซตว่าง คือ $\varnothing$ (phi) หรือ { }

3. **เซตที่เท่ากัน** **:** $A = B$ ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกทุกตัวเหมือนกัน

สับเซต (Subset) **:** $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

เพาเวอร์เซต **:** $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

สมบัติของสับเซต

1. $A \subset A$ และ $\varnothing \subset A$
2. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
3. ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
4. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$
5. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ แต่ $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

4. การดำเนินการทางเซต

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$

$A' = \{x \in \mathscr{U} \mid x \notin A\}$

$A - B = \{x \in \mathscr{U} \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

สมบัติที่ควรทราบ

1. **การสลับที่** ♦ $A \cup B = B \cup A$ ♦ $A \cap B = B \cap A$

2. **การเปลี่ยนกลุ่ม** ♦ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ♦ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. **การแจกแจง** ♦ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   ♦ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. **เอกลักษณ์**
   - $A \cup \varnothing = A$
   - $A \cap \varnothing = \varnothing$
   - $A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$
   - $A \cap \mathscr{U} = A$

5. **การซ้ำ**
   - $A \cup A = A$
   - $A \cap A = A$

6. **คอมพลีเมนต์**
   - $A \cup A' = \mathscr{U}$
   - $A \cap A' = \varnothing$
   - $A - B = A \cap B'$
   - $(A')' = A$
   - $\varnothing' = \mathscr{U}$
   - $\mathscr{U}' = \varnothing$

7. **เดอร์มอร์กอง**
   - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   - $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด ใช้สูตรมีดังนี้

$n(A') = n(\mathscr{U}) - n(A)$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

2. ตรรกศาสตร์

1. ตารางแสดงค่าความจริง

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

หมายเหตุ
- ■ $p \wedge q \equiv F$ เมื่อมีหนึ่งตัว F
- ■ $p \vee q \equiv T$ เมื่อมีหนึ่งตัวT
- ■ $p \rightarrow q \equiv F$ เมื่อ $p \equiv T$ และ $q \equiv F$
- ■ $p \leftrightarrow q \equiv T$ เมื่อ $p \equiv q$

2. **ประพจน์ที่สมมูลกัน** คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

ประพจน์ p และ q ที่สมมูลกัน เขียนแทนด้วย $p \equiv q$

รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันที่สำคัญ

1. การสลับที่
   $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   $p \vee q \equiv q \vee p$
   $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

2. การเปลี่ยนกลุ่ม
   $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
   $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

3. การแจกแจง
   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4. เดอร์มอร์กอง
   $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

5. $\sim(\sim p) \equiv p$

6. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

7. $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$

3. สัจนิรัดร์ (Tautology) คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

โดย**วิธีการตรวจสอบว่าประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่ ใช้วิธีหาข้อขัดแย้ง ดังนี้**

- สมมติให้ประพจน์ให้มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ววิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย
- ถ้ามีข้อขัดแย้งเกิดขึ้น จะสรุปว่า กล่าวว่าเป็นสัจนิรันดร์

ข้อระวัง เนื่องจาก $A \leftrightarrow B$ เป็นเท็จมี 2 กรณี ต้องให้ขัดแย้งทั้งสองกรณีถึงจะสรุปว่าเป็นสัจนิรันดร์ ซึ่งอาจจะใช้การตรวจสอบว่า A สมมูลกับ B หรือไม่

■ ถ้า A สมมูลกับ B $A \leftrightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์

■ ถ้า A ไม่สมมูลกับ B จะได้ว่าประพจน์ $A \leftrightarrow B$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

4. ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

ประโยค	เป็นจริง	เป็นเท็จ
$\forall x[P(x)]$	x ทุกตัวให้ P(x) จริง	มี x ที่ทำให้ P(x) เท็จ
$\exists x[P(x)]$	มี x ที่ทำให้ P(x) จริง	x ทุกตัวให้ P(x) เท็จ
$\forall x \forall y[P(x,y)]$	(x, y) ทุกคู่ทำให้ P(x, y) จริง	มี (x, y) ที่ทำให้ P(x, y) เท็จ
$\exists x \exists y[P(x,y)]$	มี (x, y) ที่ทำให้ P(x, y) จริง	(x, y) ทุกคู่ทำให้ P(x, y) เท็จ
$\forall x \exists y[P(x,y)]$	x แต่ละตัว มี y ที่ทำให้ P(x,y) จริง	มี x ที่ y ทุกตัว ที่ทำให้ P(x, y) เท็จ
$\exists x \forall y[P(x,y)]$	มี x ที่ y ทุกตัว ที่ทำให้ P(x, y) จริง	x แต่ละตัว มี y ที่ทำให้ P(x,y) เท็จ

5. การสมมูลและนิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณจะสมมูลกัน เมื่อ ตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกัน และ ประโยคเปิดสมมูลกัน

นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เมื่อ ตัวบ่งปริมาณคนละชนิดกัน และ ประโยคเปิดเป็นนิเสธกัน

นั่นคือ $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ และ $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

3. ระบบจำนวนจริง

1. สมบัติของระบบจำนวนจริง

เซตจำนวนจริง(R) ประกอบด้วยเซตของจำนวนอตรรกยะ(Q') และเซตของจำนวนตรรกยะ(Q)

เซตของจำนวนตรรกยะ คือเซตที่มีสมาชิกสามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่มีตัวเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ส่วนไม่เท่ากับศูนย์

สมบัติของระบบจำนวนจริง เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ได้แก่ มีสมบัติปิด สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการมีเอกลักษณ์ สมบัติการมีอินเวอร์ส สมบัติการสลับ และสมบัติการแจกแจง

หมายเหตุ

- สมการหาเอกลักษณ์คือ $a * e = a = e * a$ (หา e ที่กำหระทำกับ a แล้วได้ a)
- สมการหาอินเวอร์สคือ $a * b = e = b * a$ เมื่อ e (หา b ที่กระทำกับ a แล้วได้เอกลักษณ์ e)

2. การแยกตัวประกอบพหุนาม

กำหนดพหุนาม $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

ทฤษฎีบทเศษเหลือ : พหุนาม $P(x)$ หารด้วยพหุนาม $(x-c)$ จะมีเศษเหลือเท่ากับ $P(c)$

ทฤษฎีบทแยกตัวประกอบ : $(x-c)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ มีวิธีดังนี้

(1) หาตัวประกอบ c ของ a_0 หรือ $\dfrac{\text{ตัวประกอบของ } a_0}{\text{ตัวประกอบของ } a_n}$ ที่ทำให้ $P(c) = 0$
จะได้ $(x-c)$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

(2) หาร $P(x)$ ด้วย $(x-c)$ สมมติว่าได้ $Q(x)$

(3) นำ $Q(x)$ มาแยกตัวประกอบต่อไปอีก หรือทำตั้งต้นใหม่ดังข้อ (1) และ (2)

ความสัมพันธ์ของตัวหารและและเศษของการหารพหุนาม

ถ้า $P(x)$ หารด้วย $Q(x)$ มีผลหารเป็น $A(x)$ เหลือเศษ $R(x)$

จะได้ว่า $P(x) = Q(x)\ A(x) + R(x)$ โดยที่ $R(x)$ มีดีกรีน้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$

3. สมการพหุนาม

กำหนด $P(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

เรียก $P(x) = 0$ ว่าสมการพหุนามดีกรี n

และเรียก a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ ว่าเป็นคำตอบของสมการหรือรากของสมการ

การแก้สมการ

1. สมการดีกรี 1 ใช้สมการบัติการเท่ากัน(ย้ายข้าง)
2. สมการดีกรีสูงกกว่าหนึ่ง ให้แยกตัวประกอบ แล้วกำหนดแต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์

ซึ่งสมการดีกรีสองแยกตัวประกอบยากอาจจะใช้สูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ความสัมพันธ์ระหว่างคำตอบของสมการของพหุนามดีกรี 2 และ ดีดรี 3

(1) สมการพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

จะมีผลบวกของคำตอบ $= -\dfrac{b}{a}$ ผลคูณของคำตอบ $= \dfrac{c}{a}$

(2) สมการพหุนามดีกรีสาม $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$

จะมีผลบวกของคำตอบ $= -\dfrac{b}{a}$ ผลคูณของคำตอบ $= -\dfrac{d}{a}$

ผลบวกของผลคูณทีละ 2 ราก $= \dfrac{c}{a}$

4. ช่วงและการแก้อสมการ

ช่วง หมายถึง สับเซตของจำนวนจริง

$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$

$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$

$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

$[a, \infty) = \{x \mid x \ge a\}$

$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \mid x \le a\}$

สมบัติของอสมการที่ควรรู้

1. $a \le b$ หมายถึง $a < b$ หรือ $a = b$
2. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
3. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
4. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$

   ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. $a < x < b$ หมายถึง $a < x$ และ $x < b$

การแก้อสมการ

1. อสมการดีกรี 1 แก้เหมือนสมการดีกรี 1 แต่ต้องระวังการคูณทั้งสองข้างด้วยจำนวนลบ เครื่องหมายเปลี่ยนเป็นตรงข้าม

2. อสมการดีกรีมากกว่าหนึ่ง
   - ⇨ จัดอสมการให้ด้านใดด้านหนึ่งเป็น 0
   - ⇨ แยกตัวประกอบ จับทุกตัวประกอบเท่ากับ 0 เพื่อหาค่าวิกฤต
   - ⇨ แล้วจุดลงบนเส้นจำนวน และ ทดสอบค่า + หรือ – ของแต่ละช่วง
   - ⇨ อสมการ $>$ และ $\geq$ เอาช่วงบวก ส่วนอสมการ $<, \leq$ เอาช่วงลบ

3. อสมการเศษส่วนพหุนาม
   - ⇨ จัดด้านใดด้านหนึ่งให้เป็น 0 (ห้ามตัวแปรคูณไขว้)
   - ⇨ ให้แยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วน จับทุกตัวประกอบเท่ากับ 0 เพื่อหาค่าวิกฤต
   - ⇨ จุดลงบนเส้นจำนวน และ ทดสอบค่า + หรือ – ของแต่ละช่วง
   - ⇨ อสมการ $>$ และ $\geq$ เอาช่วงบวก ส่วนอสมการ $<, \leq$ เอาช่วงลบ

     ส่วนค่าวิกฤตใดมาจากส่วน ค่าวิกฤตนั้นจะไม่เป็นคำตอบอสมการเสมอ

หมายเหตุ ถ้าต้องการให้เครื่องหมายสลับกันในแต่ละช่วง ตัวประกอบไหนซ้ำกันเป็นจำนวนคู่ ให้ลงจุดค่าวิกฤตินั้น 2 ครั้ง ส่วนตัวประกอบไหนซ้ำกันเป็นจำนวนคี่ ให้ลงจุดค่าวิกฤตนั้นครั้งเดียว

5. ค่าสัมบูรณ์และสมบัติของค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของ a แทนด้วย $|a|$ โดยที่ $|a| = \begin{cases} -a & ; a < 0 \\ a & ; a \geq 0 \end{cases}$

"ถ้าข้างในแอบเป็นลบถอดแล้วติดลบ แต่ ถ้าข้างในแอบเป็นบวกถอดได้เลย"

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|x| = |-x|$
2. $|x|^2 = x$
3. $|x| \geq 0$
4. $|x| \geq x$
5. $|xy| = |x||y|$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ โดยที่ $|y| \neq 0$
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$
8. $|x-y| \geq ||x| - |y||$

หลักการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ :

หลักการ คือ กำจัดค่าสัมบูรณ์ออกจากสมการหรือสมการ

1. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

สมการ $|\square| = a$ หาคำตอบได้จากสมการ $\square = a$ หรือ $\square = -a$

อสมการ $|\square| < a$ หาคำตอบได้จากอสมการ $-a < \square$ และ $\square < a$

อสมการ $|\square| > a$ หาคำตอบได้จากอสมการ $-a > \square$ หรือ $\square > a$

2. $|\Delta| = |\square| \Rightarrow \Delta^2 = \square^2$

$|\Delta| < |\square| \Rightarrow \Delta^2 < \square^2$

3. ถ้าสมการหรืออสมการมีค่าสัมบูรณ์เป็นส่วนๆ การขจัดค่าสัมบูรณ์ต้องแยกเป็นกรณี ดังนี้

(1) ถ้า $\square \geq 0$ จะได้ $|\square| = \square$

(2) ถ้า $\square < 0$ จะได้ $|\square| = -\square$

หลังจากนั้นหาเซตคำตอบของแต่ละสมการหารหรืออสมการของแต่ละกรณีแล้วนำมายูเนียนกัน

6. ขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากสุด

ขอบเขตบน(upper bound) ของเซตใด คือ จำนวนที่มี**ค่ามากกว่าหรือเท่ากับ**จำนวนทุกจำนวนที่เป็นสมาชิกในเซตนั้น และค่าที่น้อยที่สุดเรียกว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound)**

ขอบเขตล่าง(lower bound) ของเซตใด คือ จำนวนที่มี**ค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ**จำนวนทุกจำนวนที่เป็นสมาชิกในเซตนั้นและค่ามากสุดในเซตเรียกว่า **ขอบเขตล่างมากสุด(greatest lower bound)**

4. ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

1. การหารลงตัว

b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$ โดยเขียนแทนด้วย $b|a$
เรียก b ว่าเป็น **ตัวหาร (divisor)** ของ a และเรียก a ว่าเป็น **พหุคูณ (multiple)** ของ b

2. ทฤษฎีบทหลักมูลทางเลขคณิต

กำหนดให้ n จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนที่มากกว่า 1 จะได้ว่า $n = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \ldots \times p_k^{q_k}$
ซึ่ง $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ เป็นจำนวนเต็ม
และเรียกว่า **การแยกตัวประกอบของ n**
จำนวนของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n เท่ากับ $(q_1+1)\times(q_2+1)\times \ldots \times(q_k+1)$ จำนวน

3. ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม q และ r ชุดเดียวซึ่ง

$$a = bq + r \quad \text{โดย} \quad 0 \leq r < |b|$$

เรียก q ว่า ผลหาร (quotient) และ r ว่า เศษเหลือ(remainder)

4. ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ตัวหารร่วมมากของ a และ b คือ จำนวนเต็มบวก d ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่ง $d|a$ และ $d|b$
และเขียนแทนด้วย (a, b)แทน ห.ร.ม. ของ a และ b
เรียกจำนวน a, b ที่มี ห.ร.ม. เป็น 1 ว่าเป็น **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์**

ตัวคูณร่วมน้อยของ a และ b คือ จำนวนเต็มบวก c ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a|c$ และ $b|c$
และเขียนแทนด้วย [a, b] แทน ค.ร.น. ของ a และ b

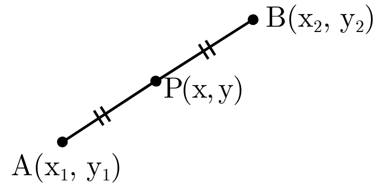
สมบัติของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. $(a, b) \times [a, b] = |ab|$

5. เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

1. สูตรพื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์

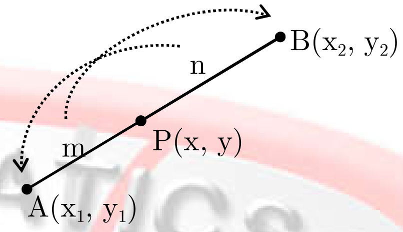
(1) จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

$$P(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



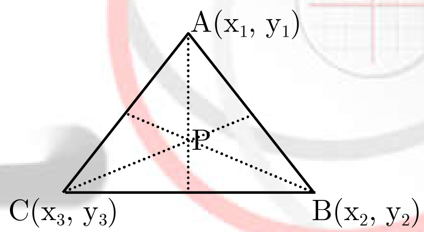
(2) จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง

$$P(x,y) = \left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$



(3) จุดตัดกันของเส้นมัธยฐาน

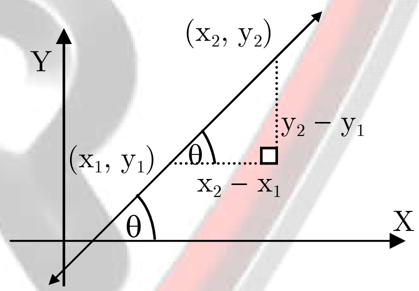
$$P(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



(4) ความชันของเส้นตรง

ความชัน$(m) = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

หรือ $m = \tan\theta$



(5) สมการเส้นตรง

- รูปทั่วไป $Ax + By + C = 0$ จะได้ความชัน(m) $= -\dfrac{A}{B}$
- สมการเส้นตรงที่มี ความชัน $= m$ และ ผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$
- ถ้าเส้นตรงตัดแกน x และตัดแกน y ที่จุด $(a, 0)$ และ $(0, b)$ ตามลำดับ
  จะได้ระยะตัดแกน x คือ a และระยะตัดแกน y คือ b ตามลำดับ
- **ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรง**

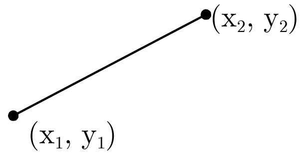
  (1) $L_1 \,//\, L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_{L_1} = m_{L_2}$

  (2) $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1$ หรือ $m_{L_1} = 0$ และ m_{L_2} หาค่าไม่ได้

(6) การวัดระยะทาง

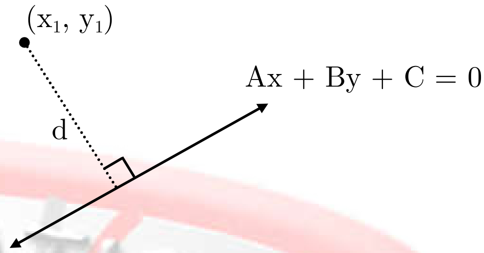
■ **ระยะทางระหว่างจุดสองจุด**

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



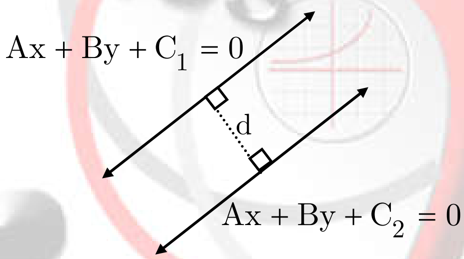
■ **ระยะทางระหว่างจุดและเส้นตรง**

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



■ **ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน**

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



(7) พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ... (x_n, y_n) เป็นจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยม

$$x_2y_1 + x_3y_2 + \ldots + x_1y_n$$

$$\text{พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times |\text{บน} - \text{ล่าง}|$$

$$x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1$$

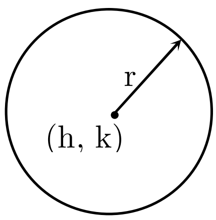
2. ภาคตัดกรวย

2.1 วงกลม (Circle) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบที่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะทางเท่ากัน

สมการมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จุดศูนย์กลางคือ (h, k) และ รัศมี คือ r

สมการรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\text{จุดศูนย์กลางคือ}\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ และ รัศมี } = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$$



2.2 พาราโบลา (Parabola) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง(ไดเรกตริกซ์) และจุดคงที่จุดหนึ่ง(โฟกัส)เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

■ **พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y**

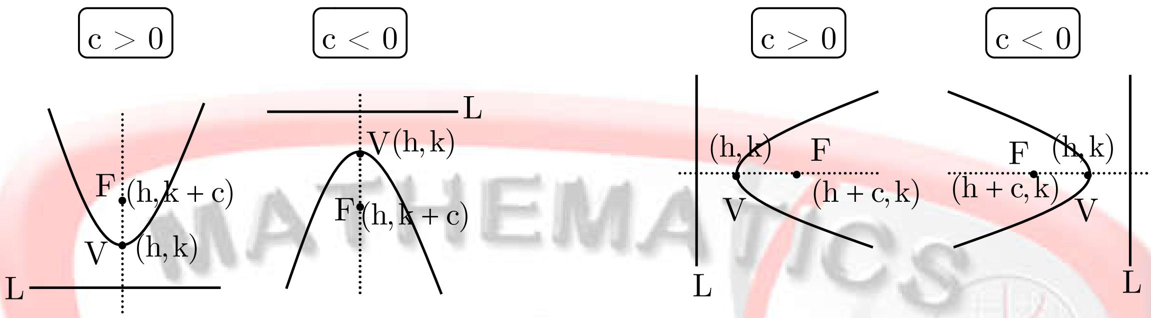
สมการทั่วไป $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

สมการมาตรฐาน $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

■ **พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน x**

สมการทั่วไป $Ay^2 + By + Cx + D = 0$

สมการมาตรฐาน $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



สมบัติ ■ ระยะ $VF = |c|$ และ ระยะจาก V ไปเส้นไดเรกติกซ์ L เท่ากับ $|c|$

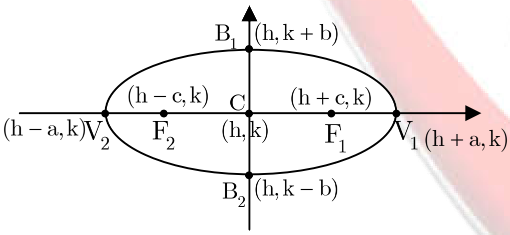
■ ความกว้าง หรือ ความยาวลาตัสเรกตัมของพาราโบลา เท่ากับ $|4c|$

2.3 วงรี (Ellipse) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด (โฟกัส)มีค่าคงที่เสมอ และเท่ากับ $2a$

สมการทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A \neq B$ และ $AB > 0$

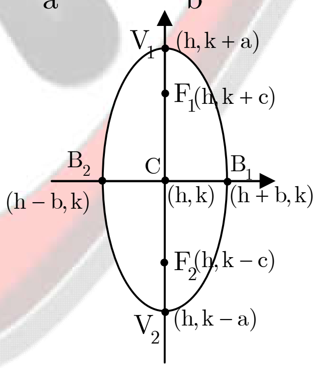
■ **วงรีที่มีแกนเอกขนานกับ แกน X**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



■ **วงรีที่มีแกนเอกขนานกับ แกน Y**

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



สมบัติ ■ ความยาวแกนเอก $= V_1V_2 = 2a$,ความยาวแกนโท $= B_1B_2 = 2b$ และ $F_1F_2 = 2c$

■ $a^2 = b^2 + c^2$ (a มากที่สุด)

■ ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$

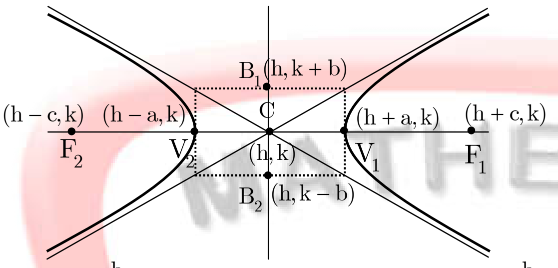
■ ความกว้าง หรือ ความยาวลาตัสเรกตัมของวงรี เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

2.4 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด(โฟกัส)ในระนาบมีค่าคงที่เสมอ และมีค่าเท่ากับ 2a

สมการทั่วไป คือ $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A \neq B$ และ $AB < 0$

ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน X

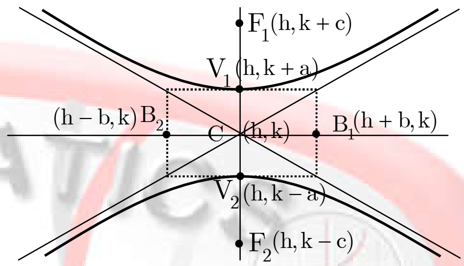
สมการ คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



$L_1 : y-k = \frac{b}{a}(x-h)$ $L_2 : y-k = -\frac{b}{a}(x-h)$

ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน Y

สมการ คือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$



$L_1 : y-k = \frac{a}{b}(x-h)$ $L_2 : y-k = -\frac{a}{b}(x-h)$

สมบัติ

- ความยาวตามขวาง $= V_1V_2 = 2a$,ความยาวสังยุค $= B_1B_2 = 2b$ และ $F_1F_2 = 2c$
- $c^2 = a^2 + b^2$ (c มากที่สุด)
- ความกว้าง หรือ ความยาวลาตัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลา เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product)

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

$n(A \times B) = n(A)n(B)$

2. ความสัมพันธ์ (relation) r เป็นความสัมพันธ์ จากA ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

3. ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งไม่มีคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกข้างหน้าเหมือนกันแต่มีสมาชิกตัวหลังต่างกัน นั่นคือ

r **จะเป็นฟังก์ชัน** ก็ต่อเมื่อทุก $(x_1, y_1) \in r$ และ $(x_2, y_2) \in r$ แล้ว $y_1 = y_2$

r **จะเป็นฟังก์ชัน** ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงใดที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกราฟของ r ครั้งเดียวเสมอ

เทคนิคการหาค่าฟังก์ชัน

■ ถ้าให้ f(x) มา จะหา f(□) แทน x ด้วย □

■ ถ้าให้ f(□) มา จะหา f(x) ให้สมมติ □= A แล้วจัด x ในรูปของ A แล้วจัดรูปให้อยู่ในรูป A แล้วเปลี่ยนตัวแปร A เป็น x ก็จะได้ f(x)

4. โดเมน(D_r) และ เรนจ์(R_r)

หาโดเมน $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$	**หาเรนจ์** $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$
■ จัดสมการให้อยู่ในรูป y = เทอมของ x ■ โดยดูว่า x มีค่าอะไรได้บ้าง ที่ทำให้ y เป็นจริง	■ จัดสมการให้อยู่ในรูป x = เทอมของ y ■ โดยดูว่า y มีค่าอะไรได้บ้าง ที่ทำให้ x เป็นจริง

ความรู้ที่ใช้ในการหาโดเมนและเรนจ์

(1) $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ หาค่าได้เมื่อ $B(x) \neq 0$

(2) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ f(x) หาค่าได้เมื่อ $g(x) \geq 0$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ f(x) หาค่าได้เมื่อ g(x) เป็นจำนวนจริงใดๆ

(3) $f(x) = a^{g(x)}$ หาค่าได้เมื่อ g(x) เป็นจำนวนจริงใดๆ

(4) $f(x) = \log_a g(x)$ หาค่าได้เมื่อ $g(x) > 0$

5. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ และฟังก์ชันอินเวอร์ส

(1) ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ จากA ไป B แล้วอินเวอร์สของความสัมพันธ์ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A

$r = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in r\}$

$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in r\}$ (สลับ x, y ในเงื่อนไข)

(2) **ฟังก์ชันอินเวอร์ส** (Inverse Functions) คือ อินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1}

ถ้า $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = f(y)\}$ (สลับ x, y ในเงื่อนไข)

การหาฟังก์ชันอินเวอร์ส

ขั้นที่ 1 จาก $y = f(x)$ จัด x ในรูปของ y พร้อมกับ หาเรนจ์ของ f

ขั้นที่ 2 เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x พร้อมเขียนโดเมนของ f^{-1} ($x \in R_f$)

สมบัติของฟังก์ชันอินเวอร์สที่ควรรู้

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
2. $D_{f^{-1}} = R_f$ และ $R_{f^{-1}} = D_f$
3. ถ้า $f(\triangle) = \square$ แล้ว $f^{-1}(\square) = \triangle$
4. กราฟของ f และ f^{-1} จะสมมาตรเทียบกับเส้นตรง $y = x$

6. ฟังก์ชันคอมโพสิท(Composite Functions) หรือฟังก์ชันเชิงประกอบ

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ จะได้ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

โดเมนและเรนจ์ของ gof

$D_{gof} = (D_{gof}\text{ ที่หาได้}) \cap D_f$ และ $R_{gof} = (R_{gof}\text{ ที่หาได้}) \cap R_g$

สมบัติที่ควรรู้

- $(f \circ f^{-1})(x) = x$ เมื่อ $x \in R_f$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ เมื่อ $x \in D_f$

7. พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Functions)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง สำหรับ $x \in D_f \cap D_g$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

หมายเหตุ $D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

7. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. รากที่สองของจำนวนจริง(กรณฑ์ที่สอง)

กรณฑ์ที่สองของ a เขียนแทนด้วย $\sqrt{a}$ ซึ่ง $\sqrt{a}$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $a \ge 0$

สมบัติที่ควรรู้
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ เมื่อ $a \ge 0$

หลักการแก้สมการและอสมการรากที่สอง

(1) ต้องกำจัดรากที่สองให้หมดไปโดยการยกกำลังสองทั้งสองข้าง

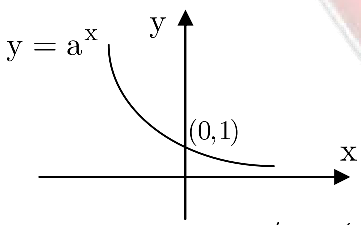
(2) จัดรูปตัวแปรใหม่ให้อยู่ในรูปสมการพหุนาม หรือจะใช้สมบัติ $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \left|\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right|$

หมายเหตุ ต้องมีเงื่อนไขที่ค่าในรากที่สองต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

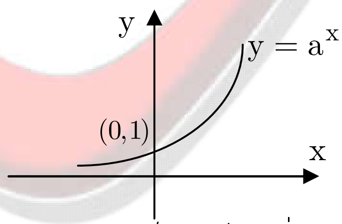
2. สมบัติของเลขยกกำลัง

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^m \times b^m = (ab)^m$
- $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $a^0 = 1, a \ne 0$

2. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \ne 1\}$



$0 < a < 1$ (เป็นฟังก์ชันลด)



$a > 1$ (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

สมบัติที่ควรทราบ

1. $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันชนิด 1 – 1
2. $D_f = (-\infty, \infty)$ $R_f = (0, \infty)$

การแก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

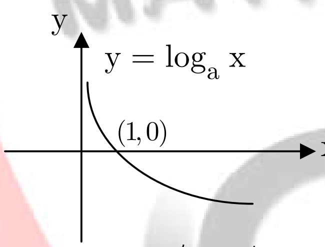
1. ถ้า $a^{\square} = a^{\Delta}$ จะได้ว่า $\square = \Delta$
2. ถ้า $0 < a < 1$ และ $a^{\square} < a^{\Delta}$ จะได้ว่า $\square > \Delta$ (ฐาน <1 เปลี่ยนเครื่องหมาย)

   ถ้า $a > 1$ และ $a^{\square} < a^{\Delta}$ จะได้ว่า $\square < \Delta$ (ฐาน > 1 เครื่องหมายเหมือนเดิม)

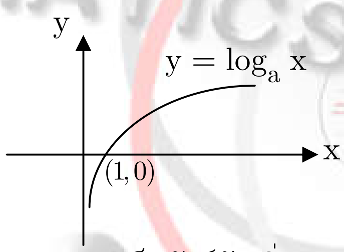
หมายเหตุ

ข้อสอบมักออกข้อสอบให้จัดรูปสมการหรืออสมการในรูปพหุนามดีกรีสองที่จะต้องแยกตัวประกอบก่อน

2. ฟังก์ชันลอการิทึม $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1\}$



$0 < a < 1$ (เป็นฟังก์ชันลด)



$a > 1$ (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

สมบัติที่ควรทราบ

1. $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันชนิด 1 – 1
2. $D_f = (0, \infty)$ $R_f = (-\infty, \infty)$
3. $\log_{10} x$ เขียนแทนด้วย $\log x$ และ $\log_e x$ เขียนแทนด้วย $\ln x$ เมื่อ $e \approx 2.7183...$

การแก้สมการและอสมการลอการิทึม

1. ถ้า $\log_a \square = \log_a \Delta$ จะได้ว่า $\square = \Delta$
2. ถ้า $0 < a < 1$ และ $\log_a \square < \log_a \Delta$ จะได้ว่า $\square > \Delta$ (ฐาน <1 เปลี่ยนเครื่องหมาย)

   ถ้า $a > 1$ และ $\log_a \square < \log_a \Delta$ จะได้ว่า $\square < \Delta$ (ฐาน > 1 เครื่องหมายเหมือนเดิม)

หมายเหตุ

- ต้องตรวจสอบคำตอบสมการและอสมการทุกครั้ง ว่าค่าหลัง log เป็นบวกไหม
- ข้อสอบมักออกข้อสอบให้จัดรูปสมการหรืออสมการในรูปพหุนามดีกรีสองที่จะต้องแยกตัวประกอบก่อน

คุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึม

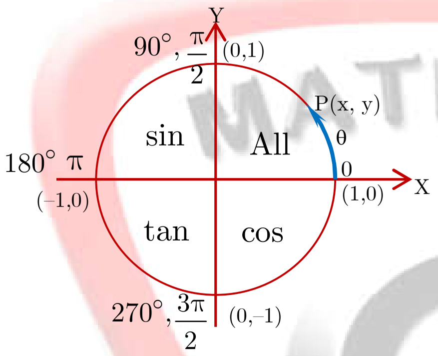
1. ถ้า $\log_a x = y$ จะได้ $x = a^y$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (log ผลคูณ = ผลบวกของ log)
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (log ผลหาร = ผลต่างของ log)
6. $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$
7. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = \frac{\log_b a}{\log_b x}$
8. $a^{\log_a x} = x$
9. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

8. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\sin\,\theta = \frac{\text{ข้ามมุม}}{\text{ข้ามฉาก}} \qquad \cos\,\theta = \frac{\text{ชิดมุม}}{\text{ข้ามฉาก}} \qquad \tan\,\theta = \frac{\text{ข้ามมุม}}{\text{ชิดมุม}}$$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย



วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 = 1$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ

จะได้ $x = \cos\,\theta$ และ $y = \sin\,\theta$

และ $\tan\,\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sec\,\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\,\theta \neq 0$

$\cot\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\operatorname{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\,\theta \neq 0$

3. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มุมขนาดต่างๆที่ควรรู้

ฟังก์ชัน	$0°, 0$	$30°, \frac{\pi}{6}$	$45°, \frac{\pi}{4}$	$60°, \frac{\pi}{3}$	$90°, \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	หาไม่ได้

สมบัติเพิ่มเติม

- $\sin\theta, \cos\theta \in [-1, 1]$
- $\tan\theta \in (-\infty, \infty)$

4. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อมุมที่ขนาดเป็นลบ

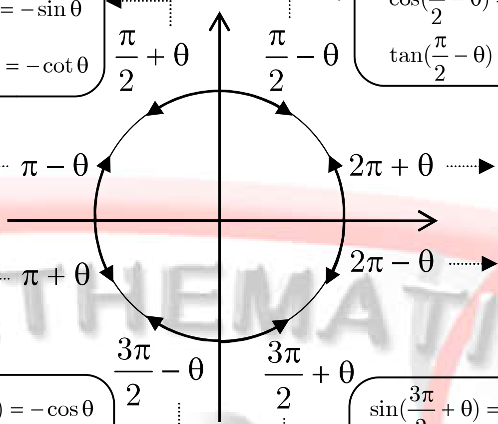
$$\sin(-\theta) = -\sin\,\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\,\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\,\theta$$

5. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\pi \pm \theta$, $2\pi \pm \theta$, $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$
$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$
$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$

$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$



$\sin(2\pi+\theta) = \sin\theta$
$\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta$
$\tan(2\pi+\theta) = \tan\theta$

$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

$\sin(2\pi-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta$
$\tan(2\pi-\theta) = -\tan\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta) = -\cos\theta$
$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta) = -\sin\theta$
$\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta) = -\cos\theta$
$\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta) = \sin\theta$
$\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$

6. เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(1) เอกลักษณ์กำลังสอง

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
- $1 + \cot^2 A = \mathrm{cosec}^2 A$

(2) ผลบวกและผลต่างของมุม

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$, $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B}$

(3) สองเท่าของมุม

- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

หมายเหตุ จากสูตร $\cos 2A$ จะได้ $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

(4) ครึ่งของมุม

- $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$
- $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$
- $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$

(5) สามเท่าของมุม

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

(6) แปลงผลคูณฟังก์ชันเป็นผลบวกฟังก์ชัน

- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

(7) แปลงผลบวกฟังก์ชันเป็นผลคูณฟังก์ชัน

- $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$
- $\sin A - \sin B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$
- $\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$
- $\cos A - \cos B = -2\sin(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$

7. อินเวอร์ส(ค่าผกผัน)ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(1) เรนจ์ของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$\text{arcsin } x$, $\text{arccosec } x$, $\text{arctan } x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\text{arccos } x$, $\text{arcsec } x$, $\text{arccot } x \in [0,\pi]$

(2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x \;;\; -1 \le x \le 1$

$\arctan(-x) = -\arctan x \;;\; x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosec}(-x) = -\operatorname{arccosec} x \;;\; x \le -1,\, x \ge 1$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \;;\; -1 \le x \le 1$

$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x \;;\; x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x \;;\; x \le -1,\, x \ge 1$

(3) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \;;\; -1 \le x \le 1$

$\operatorname{arcstan} x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \;;\; x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2} \;;\; x \le -1,\, x \ge 1$

(4) $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \;;\; |xy| < 1$

$\arctan x + \arctan y = \pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \;;\; |xy| > 1$

เทคนิคการแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณมิติ

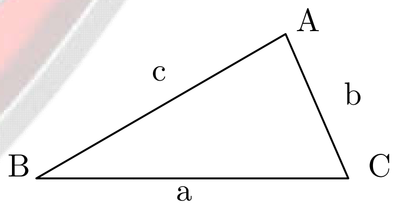
ใช้สมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สฟังก์ชันที่ว่า

- ♦ $(f \circ f^{-1})(a) = a$ และ $(f^{-1} \circ f)(a) = a$
- ♦ ถ้า $f^{-1}(a) = x$ แล้ว $f(x) = a$

8. กฎของไซน์และโคไซน์

กฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

เมื่อ r เป็นความยาวรัศมีของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C

สูตรโปรเจชัน

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

สูตรหาพื้นที่สามเหลี่ยม

$$\text{พื้นที่ } \Delta\, ABC = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

สูตรพื้นที่สามเหลี่ยมของเฮลอน(Hero's Formula)

$$\text{พื้นที่}\Delta\, ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

เมื่อ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

9. เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

1. เมทริกซ์

(1) ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมี m แถว n หลัก จะกล่าวว่า เมทริกซ์ A มีมิติ $m \times n$

เขียนแทนด้วย $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ โดยที่ a_{ij} แทนสมาชิกของ A ในแถวที่ i หลักที่ j

(2) การเท่ากันของเมทริกซ์

กำหนดเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ $i, j = 1, 2, 3, \ldots, m$

(3) เมทริกซ์บางชนิดที่ควรรู้

- **เมทริกซ์จัตุรัส** เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและหลักเท่ากัน
- **เมทริกซ์ศูนย์** เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ทั้งหมด และใช้สัญลักษณ์ $\underline{0}$
- **เมทริกซ์เอกลักษณ์** คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุม หลักมีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกอื่นๆที่เหลือมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด ใช้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ $n\times n$

เช่น $I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(4) ทรานสโพสของเมทริกซ์ A^t คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำเอาสมาชิกในแถวที่ i มาสลับเป็นหลักที่ i

(5) การบวกเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน

$A + B$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกแต่ละเป็นผลบวกของสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของ A และB

สมบัติการบวกของเมทริกซ์

มีสมบัติปิด การเปลี่ยนกลุ่มได้ การสลับที่ได้ มีเอกลักษณ์การบวกคือ $\underline{0}$ และมีอินเวอร์การบวก

(6) การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{q\times n}$ ผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A และ B จะเกิดขึ้นได้

ก็ต่อเมื่อ $p = q$ และผลคูณที่ได้จะมีมิติ $m \times n$ นั่นคือ

$$A \times B = \left[a_{ij}\right]_{m\times \underbrace{p} \times \left[b_{ij}\right]_{q}}{}_{\times n} = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$\text{(}p = q\text{)}$$

เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

(สมาชิกแถวที่ i ของ A คูณ กับสมาชิกหลักที่ j ของ B)

(7) การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ kA คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณ k กับสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A

(8) ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ 2×2

ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A คือ A^{-1} โดย $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

หมายเหตุ ● ถ้า $\det A \neq 0$ จะหา A^{-1} ได้ และเรียก A ว่า **เมทริกซ์ไม่เอกฐาน**

● ถ้า $\det A = 0$ จะหา A^{-1} ไม่ได้ และเรียก A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน**

(9) สมบัติบางประการที่ต้องรู้

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB + AC$
3. $AI_n = I_nA = A$
4. $(A^t)^t = A$
5. $(kA)^t = kA^t$
6. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
7. $(AB)^t = B^tA^t$
8. $(A^{-1})^{-1} = A$
9. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
10. $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$
11. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

ข้อควรระวัง 1. AB และ BA ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

2. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
3. $(A-B)(A+B) = A^2 + BA - AB - B^2$
4. ถ้า $AB = \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$
5. ถ้า $AB = AC$ โดย $A \neq \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $B = C$

2. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

■ เมทริกซ์ที่มีมิติ 1×1 แล้ว $\det(A) =$ สมาชิกของเทริกซ์

■ เมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 แล้ว $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ **(คูณลง – คูณขึ้น)**

■ เมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ $= (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$

(คูณลง – คูณขึ้น)

■ เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ จะได้ $\det = \sum a_{ij}C_{ij}$ (กระจายโคแฟคเตอร์

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

ไมเนอร์ ($M_{ij}(A)$) คือ det(เมทริกซ์ที่เหลือจากตัดแถว i หลัก j ของเมทริกซ์ A)

โคแฟกเตอร์ ($C_{ij}(A)$) $= (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

สมบัติบางข้อของดีเทอร์มิแนนท์

1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A^m) = (\det(A))^m$
4. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
5. $\det(kA) = k^n \det(A)$
6. $\det I_n = 1$
7. ถ้า A มีสมาชิกทุกตัวในแถว(หลัก) เป็น 0 ทั้งหมด จะได้ว่า $\det(A) = 0$
8. ถ้า A มีสมาชิกในสองแถว(หรือในสองหลัก)ใดเท่ากัน จะได้ว่า $\det(A) = 0$
9. ถ้า B เกิดจาก A โดยการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง (หรือสลับหลักคู่ใดคู่หนึ่ง) แล้ว $\det B = -\det A$
10. ถ้า B เกิดจาก A โดยการคูณแถวหนึ่ง(หรือหลักหนึ่ง)ด้วย k แล้ว $\det(B) = k\det(A)$
11. ถ้า B เกิดจาก A โดยการคูณแถวหนึ่ง (หลักหนึ่ง) ด้วยค่าคงตัวแล้วนำไปบวกกับแถวหนึ่ง (หลักหนึ่ง) จะได้ว่า $\det(B) = \det(A)$

3. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

■ **เมทริกซ์ผูกพัน(adjoint matrix)** แทนด้วย adj(A) โดยที่ $\operatorname{adj}(A) = \left[C_{ij}(A)\right]^t$

■ **อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์** ถ้า $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$

ข้อควรจำ
- $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A) I$
- $\det(\operatorname{adj}(A)) = \left(\det(A)\right)^{n-1}$

4. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ ทำได้ 3 วิธี

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นจัดในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$

(1) การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว คำตอบของระบบสมการ คือ $\mathbf{X} = A^{-1}B$

(2) การแก้สมการโดยใช้ กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule)

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว คำตอบของระบบสมการนี้คือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots,\quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

โดยที่ A_i เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ B ไปแทนที่หลักที่ i ของ A เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

(4) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว(Row Operations)

การปฏิบัติการตามแถว สามารถทำได้ ดังนี้

R_{ij} แทนการสลับที่ระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j

kR_i แทนการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ด้วย k

$R_i + kR_j$ แทนการเปลี่ยนแถวที่ i โดยการนำ k คูณสมาชิกแถวที่ j แล้วนำผลไปบวกกับสมาชิกในลำดับเดียวกันของแถวที่ i

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการ จากระบบสมการ $AX = B$

- สร้างเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid B]$
- ดำเนินการตามแถว เปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูป $[C \mid I]$ จะได้ $X = C$

หมายเหตุ

- ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้ดำเนินการตามแถวบน เมทริกซ์ A จะกล่าวว่า **A สมมูลตามแถวกับ B** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \sim B$
- **จากการดำเนินการตามแถว** $[A \mid I] \sim [I \mid B]$ จะได้ $B = A^{-1}$

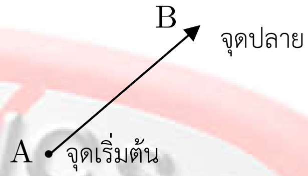
10. เวกเตอร์

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์

(1) **เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน**ในสามมิติ ได้แก่ $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) **เวกเตอร์จากจุด 2 จุด** กำหนด $A(x, y, z)$, $B(a, b, c)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a-x \\ b-y \\ c-z \end{bmatrix} = (a-x)\bar{i} + (b-y)\bar{j} + (c-z)\bar{k}$$



● ข้อสังเกต $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

(3) **ขนาดของเวกเตอร์** $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ จะได้ $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

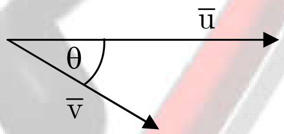
(4) **การขนานกันของเวกเตอร์** $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$: $\bar{u} \parallel \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ มี $k \in R$ ที่ทำให้ $\bar{u} = k\bar{v}$

ถ้า $\bar{u} = k\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานในทิศทางเดียวกัน แสดงว่า $k > 0$

ถ้า $\bar{u} = k\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานในทิศทางตรงข้าม แสดงว่า $k < 0$

ถ้า $\bar{u} = k\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่ขนานกัน แสดงว่า $k = 0$

(5) **มุมระหว่างเวกเตอร์** : มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือมุมที่มีจุดเริ่มต้นของสองเวกเตอร์เป็นจุดยอดมุม โดยมุมขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 180° ดังรูป



(6) **เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์** $\bar{u}$ เท่ากับ $\pm\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

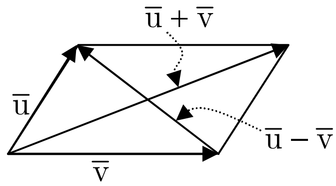
เวกเตอร์ขนาด k หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{k\bar{u}}{|\bar{u}|}$

2. การบวก การลบ การคูณด้วยสเกลาร์ การคูณเวกเตอร์

ให้ $\bar{u} = a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}$, $\bar{v} = a_2\bar{i} + b_2\bar{j} + c_2\bar{k}$ และ $m \in R$

(1) **การบวก ลบ เวกเตอร์**

$$\bar{u} \pm \bar{v} = \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 \\ b_1 \pm b_2 \\ c_1 \pm c_2 \end{bmatrix} = (a_1 \pm a_2)\bar{i} + (b_1 \pm b_2)\bar{j} + (b_1 \pm b_2)\bar{k}$$

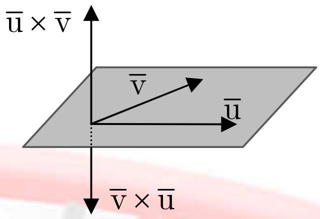


(2) **การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ :** $m\bar{u} = \begin{bmatrix} ma_1 \\ mb_1 \\ mc_1 \end{bmatrix} = (ma_1)\bar{i} + (mb_1)\bar{j} + (mc_1)\bar{k}$

(3) **ผลคูณเชิงสเกลาร์ หรือ dot product :** $\bar{u} \cdot \bar{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

(4) **ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หรือ cross product :**

$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (ทำเหมือน det)



3. สมบัติที่ควรรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์

(1) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$, $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$, $\bar{u} - \bar{v} = -(\bar{v} - \bar{u})$, $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$

(2) $m(\bar{u} \pm \bar{v}) = m\bar{u} \pm m\bar{v}$, $(m\bar{u}) \cdot (n\bar{v}) = (mn)(\bar{u} \cdot \bar{v})$, $(m\bar{u}) \times (n\bar{v}) = (mn)(\bar{u} \times \bar{v})$

(3) $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

(4) $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$

(5) $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$ แต่ $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$

(6) $|\bar{u} \pm \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 \pm 2(\bar{u} \cdot \bar{v})$

(7) การตีความหมายเชิงเรขาคณิตของเวกเตอร์

- $\bar{u} \perp \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$
- $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีมุมระหว่างเวกเตอร์เป็นมุมแหลม ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} > 0$
- $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีมุมระหว่างเวกเตอร์เป็นมุมป้าน ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} < 0$
- $\bar{u} \parallel \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = \pm|\bar{u}||\bar{v}|$
- $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 0$

(8) พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นด้านประชิด เท่ากับ $|\bar{u} \times \bar{v}|$

(9) ปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นด้านประกอบ เท่ากับ $|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$

11. จำนวนเชิงซ้อน

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

(1) ค่า i^n : $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

(2) กำหนดให้ $z = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

ส่วนจริงของ z $\mathrm{Re}(z) = a$ **ส่วนจินตภาพ**ของ z $\mathrm{Im}(z) = b$

(3) **สังยุค**ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

(4) **ค่าสัมบูรณ์**ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(5) จำนวนเชิงซ้อนใน**รูปเชิงขั้ว**(Polar form) $z = a + bi$: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

เมื่อ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

และ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ (θ อยู่ในควอดรันต์ใดขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ a, b)

(6) กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

- ระบบพิกัดฉาก จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ แทนด้วยจุด (a, b)
- ระบบพิกัดเชิงขั้ว จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ แทนด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

2. การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน

(1) การเท่ากัน : $a + bi = x + yi$ ก็ต่อเมื่อ $a = x$ และ $b = y$

(2) การบวกและลบ : $(a + bi) \pm (x + yi) = (a \pm x) + (b \pm y)i$

(3) การคูณด้วย k : $k(a + bi) = (ka) + (kb)i$

(4) การคูณ : $(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$

(5) การหาร : $\dfrac{a + bi}{x + yi} = \dfrac{(a + bi)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \dfrac{(a + bi)(x - yi)}{x^2 + y^2}$

(6) การคูณและการหารในระบบพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

จะได้ $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$(z_1)^n = r_1^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1)$ (กฎของเดอร์มัว)

$\overline{z}_1 = r_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$

3. สมบัติที่ควรรู้

(1) สมบัติของสังยุค $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

(2) สมบัติของค่าสัมบูรณ์ $|\overline{z}| = |z| = |-z|$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(4) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

ข้อควรระวัง ♦ $|z|^2 \neq z^2$ และ $|z_1 \pm z_2|^2 \neq |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2z_1z_2$ (ไม่เหมือนเวกเตอร์)

♦ ที่ถูกคือ $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2)$

4. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$

(1) ถ้า z เป็นจำนวนจริง $\Rightarrow$ ใช้การแยกตัวประกอบ

(2) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จาก $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ใช้สูตรหารากที่ n ของ z ดังนี้

$$z_k = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

5. สมการพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1}x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

(1) สมการพหุนามจะมีคำตอบ(ราก)ทั้งหมด n คำตอบ

(2) ถ้า $a + bi$ เป็นคำตอบ(ราก) จะได้ว่า $a - bi$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

(3) ผลบวกของคำตอบ $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ และ ผลคูณคำตอบ $= \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$

(4) **การสร้างสมการพหุนามจากคำตอบ** ถ้า $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ เป็นคำตอบทั้งหมดของ $P(x) = 0$

จะได้ $P(x) = a(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)\ldots(x-z_n)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

12. ลำดับและอนุกรม

1. ลำดับและอนุกรมเลขเลขคณิตจำกัด เป็นลำดับที่มีสมบัติ $a_{n+1} - a_n = d$ (ผลต่างคงที่)

- พจน์ทั่วไป $a_n = a_k + (n-k)d$
- ผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$

2. ลำดับและอนุกรมเลขเรขาคณิตจำกัด เป็นลำดับที่มีสมบัติ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (อัตราส่วนคงที่)

- พจน์ทั่วไป $a_n = a_k r^{n-k}$
- ผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$

3. สมบัติของ $\sum$

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} k = nk$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} k(a_i \pm b_i) = k\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(5) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4. ลิมิตของลำดับ

(1) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาได้ เรียก a_n ว่าเป็นลำดับลู่เข้า

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาไม่ได้ เรียก a_n ว่าเป็นลำดับลู่ออก

(2) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{a_n} = 0$

(3) ถ้า $|a| < 1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

(4) ลิมิตของลำดับเศษส่วนพหุนาม

- ถ้าเศษและส่วนดีกรีเท่ากัน จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\text{ส.ป.ส.ของพจน์ดีกรีสูงสุดของเศษ}}{\text{ส.ป.ส.ของพจน์ดีกรีสูงสุดของส่วน}}$
- ถ้าดีกรีเศษน้อยกว่าดีกรีส่วน จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ถ้าดีกรีเศษมากกว่าดีกรีส่วน $(k > p)$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาไม่ได้ (∞ หรือ $-\infty$)

(5) ถ้า a_n เป็นลำดับเศษส่วนของฟังก์ชัน expo

- ถ้าฐานสูงสุดของเศษและส่วนเท่ากัน จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\text{ส.ป.ส.ของฐานสูงสุดของเศษ}}{\text{ส.ป.ส.ของฐานสูงสุดของส่วน}}$
- ถ้าฐานสูงสุดของเศษน้อยกว่าของส่วน จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ถ้าฐานสูงสุดของเศษมากกว่าของส่วน จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาไม่ได้ (∞ หรือ $-\infty$)

5. อนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) ขั้นตอนการหาอนุกรมอนันต์ดังนี้

ขั้นที่ 1 หา $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:
- ♦ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้วอนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่ออก**(หาผลบวกอนันต์ไม่ได้)
- ♦ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ดำเนินการต่อในขั้นที่ 2

ขั้นที่ 2 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

ขั้นที่ 3 หา $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:
- ♦ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หาไม่ได้ แล้วอนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่ออก**
- ♦ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ แล้วอนุกรมอนันต์**ลู่เข้า และ** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$

(2) **อนุกรมอนันต์เรขาคณิตอนันต์**

- ถ้า $|r| < 1$ แล้วอนุกรมลู่เข้า และผลบวกอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $s = \dfrac{a_1}{1-r}$
- ถ้า $|r| \geq 1$ แล้วอนุกรมลู่ออก

(3) **อนุกรมอนันต์ที่ใช้แนวคิด Telescoping** : เน้นแนวคิดแยกเศษส่วนย่อย 2 จำนวนลบกัน

(4) **อนุกรมผสมระหว่างเรขาคณิตคูณกับเลขคณิต :**

กำหนดอนุกรม $a_1 + a_2r + a_3r^2 + a_4r^3 + \dots$ เมื่อ a_n เป็นลำดับเลขคณิต และ $|r| < 1$

ให้ $$S = a_1 + a_2r + a_3r^2 + a_4r^3 + \dots \quad \dots(1)$$

นำ r คูณ (1) ; $$rS = a_1r + a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + \dots \quad \dots(2)$$

นำ(1) − (2) ; $$(1-r)S = a_1 + dr + dr^2 + dr^3 + dr^4 + \dots$$

จะได้ $$S = \frac{1}{1-r}\left(a_1 + \frac{dr}{1-r}\right)$$

6. **ดอกเบี้ย**

ดอกเบี้ยเชิงเดียว

การคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว เป็นการคิดดอกเบี้ยเพียงครั้งเดียวหลังจากครบกำหนดเวลาการกู้ยืมหรือการฝาก ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสูตร ดังนี้

กำหนดให้ P คือเงินต้น

n คือระยะเวลาในการกู้ยืมหรือการฝาก (หน่วยเป็นปี)

i คืออัตราดอกเบี้ยต่อปี

r คือ อัตราดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาทในระยะเวลา 1 ปี

ดังนั้น เงินรวมทั้งหมดเท่ากับ $S = P + Prn = P(1 + rn)$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

ดอกเบี้ยทบต้น

การคิดดอกเบี้ยทบต้น

ลักษณะของการคิดดอกเบี้ยวิธีนี้คือ ระยะเวลาจะถูกแบ่งเป็นปีๆและเมื่อถึงกำหนดการคิดดอกเบี้ย ก็จะมีการคิดดอกเบี้ยของปีนั้นและนำดอกเบี้ยที่ได้มารวมเป็นเงินต้นของปีถัด ทำให้เงินต้นมีจำนวนมากขึ้นเรื่อยๆ

เราจะได้ว่าเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $S_n = P(1+r)^n$ บาท

7. มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย i% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี

กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้ คือ $S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{nk}$

เรียก S ว่าเป็นมูลค่าอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่าเป็นมูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ $P = S\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-nk}$

8. ค่างวด

การหาเงินรวมของค่างวด

ถ้าการรับหรือจ่ายแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท รวมทั้งหมด n งวด

และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$ เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

❖ ถ้ารับหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวด จะได้เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}{r}$

❖ ถ้ารับหรือจ่ายค่างวดตอนสิ้นงวด จะได้เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R\left((1+r)^n - 1\right)}{r}$

❖ **การหาค่างวด**

ถ้ามูลค่าปัจจุบัน P บาท แบ่งรับหรือจ่ายแบบรายงวดงวดละ R บาท รวมทั้งหมด n งวด

และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$ เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ค่ารายงวดคำนวณจาก $R = \frac{Pr}{1-(1+r)^{-n}}$

13. แคลคูลัสเบื้องต้น

1. ลิมิตและความต่อเนื่อง

(1) **ลิมิตของฟังก์ชัน** $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ให้ลองแทน x ด้วย a เพื่อหาค่า f(a)

⇨ ถ้า f(a) อยู่ในรูป $\frac{k}{0}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาไม่ได้

ถ้า f(a) อยู่ในรูป $\frac{k}{\infty}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

ถ้า f(a) อยู่ในรูป k จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$

⇨ ถ้า f(a) อยู่ในรูป $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ **(ห้ามตอบทันที)** ให้จัดรูปโดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

- แยกตัวประกอบ
- คูณสังยุค(conjugate)
- ใช้กฎโลปิตาล $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(2) ลิมิตทางเดียว

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ แทนลิมิตทางซ้ายของ a (ดู f(x)ใกล้เคียงกับอะไร เมื่อ $x < a$ แต่ใกล้ๆกับ a)

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ แทนลิมิตทางขวาของ a (ดู f(x)ใกล้เคียงกับอะไร เมื่อ $x > a$ แต่ใกล้ๆกับ a)

หมายเหตุ
- โดยวิธีการหาจะใช้วิธีเดียวกับหัวข้อ (1)
- ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาได้ ก็ต่อเมื่อ $L_1 = L_2$

(3) **ความต่อเนื่องฟังก์ชัน**

f ต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ (1) f(a) หาได้

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาได้

และ (3) $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

(1) **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย**ของ f จาก x_1 ถึง x_2 เท่ากับ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

(2) **อัตราการเปลี่ยนแปลงหรืออนุพันธ์**ของ f ที่ x ใดๆ เท่ากับ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (อนุพันธ์อันดับหนึ่ง)

และ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ (อนุพันธ์อันดับสอง)

หมายเหตุ นิยามอีกแบบของ $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(3) **สูตรของอนุพันธ์**

- ถ้า $f(x) = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว จะได้ $f'(x) = 0$
- ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง จะได้ $f'(x) = nx^{n-1}$
- ถ้า $f(x) = cg(x)$ จะได้ $f'(x) = cg'(x)$
- ถ้า $f(x) = g(x) \pm h(x)$ จะได้ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
- ถ้า $f(x) = g(x)h(x)$ จะได้ $f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$
- ถ้า $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ จะได้ $f'(x) = \dfrac{h(x)g'(x)-g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$
- ถ้า $f(x) = \left(g(x)\right)^n$ จะได้ $f'(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} \cdot g'(x)$
- ถ้า $f(x) = (g \circ h)(x)$ จะได้ $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

(4) **ความชันของเส้นโค้ง และสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง**

กำหนดเส้นโค้ง $y = f(x)$ จะได้ ความชันเส้นโค้งที่จุด $(a, f(a))$ เท่ากับ $f'(a)$

และสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(a, f(a))$ คือ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

(5) **ค่าสูงสุดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** ดำเนินการหาดังนี้

ขั้นที่ 1 หาค่าวิกฤต ซึ่งหาจาก ค่า c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

ขั้นที่ 2 นำค่าวิกฤต c ที่ได้จากขั้นที่ 1 ไปตรวจสอบว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยนำค่าวิกฤตทั้งหมดเขียนบนเส้นจำนวนเรียงจากน้อยไปมากแล้วหาค่า $f'(x)$ ในแต่ละช่วง

- ถ้าค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x ใกล้ๆกับ c เปลี่ยนจาก**บวก**ไปเป็น**ลบ** จุด $(c, f(c))$ ดังกล่าวเป็น**จุดสูงสุดสัมพัทธ์**
- ถ้าค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x ใกล้ๆกับ c เปลี่ยนจาก**ลบ**ไปเป็น**บวก** จุด $(c, f(c))$ ดังกล่าวเป็น**จุดต่ำสุดสัมพัทธ์**

(6) **ค่าสูงสุดค่าต่ำสุดสัมบูรณ์**

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือค่าฟังก์ชันที่มากที่สุดในช่วงปิด โดยเปรียบเทียบค่ามากที่สุดระหว่างค่าสูงสุดสัมพัทธ์ในช่วง ค่าฟังก์ชันเมื่อ x น้อยสุดในช่วง และ ค่าฟังก์ชันเมื่อ x มากสุดในช่วง

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือค่าฟังก์ชันที่น้อยที่สุดในช่วงปิด โดยเปรียบเทียบค่าน้อยที่สุดระหว่างค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ในช่วง ค่าฟังก์ชันเมื่อ x น้อยสุดในช่วง และ ค่าฟังก์ชันเมื่อ x มากสุดในช่วง

3. อินทิกรัลของฟังก์ชัน

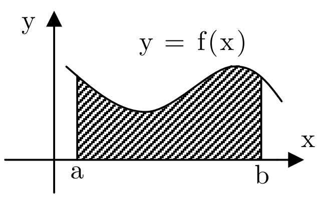
(1) สูตรการอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

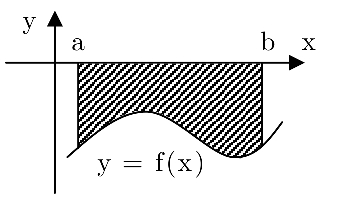
- $\int k\,dx = kx + c$
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- $\int (f(x))^n f'(x)dx = \dfrac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$

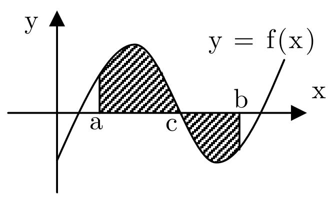
(2) อินทิกรัลจำกัดเขต

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ เมื่อ $F'(x) = f(x)$ (Fundamental Theorem of Calculus)

(3) พื้นที่ปิดล้อม







พื้นที่ $= \int_a^b f(x)\,dx$ พื้นที่ $= \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ พื้นที่ $= \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$

14. ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

1. การหาค่าแฟคทอเรียล (Factorial)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$ และ $0! = 1$

2. กฎการนับเบื้องต้น

ถ้าต้องการทำงาน k ชนิด(ขั้นตอน)ต่อเนื่อง(หรือเกิดพร้อมกัน) โดยที่

มีวิธีทำงานชนิดที่ 1 n_1 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานชนิดที่ 1 มีวิธีของการทำงานชนิดที่ 2 n_2 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 มีวิธีของการทำงานชนิดที่ 3 n_3 วิธี

$\vdots$ $\vdots$

ในแต่ละวิธีของการทำงานชนิดที่ 1 ถึงชนิด $k-1$ มีวิธีของการทำงานชนิดที่ k n_k วิธี

จะได้ จำนวนวิธีการทำงานทั้ง k ชนิดนี้เท่ากับ $n_1\times n_2\times n_3\times\ldots\times n_k$ วิธี

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน

วิธีเรียงสับเปลี่ยน หมายถึงการนำสิ่งของที่มีอยู่ทั้งหมดหรือบางส่วนมาจัดเรียงลำดับสับไปมา โดยคำนึงถึงลำดับหรือตำแหน่งสิ่งของเป็นสำคัญ วิธีการเรียงสับเปลี่ยนแบ่งเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

(1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น สูตรที่ควรรู้ได้แก่

- ถ้ามีสิ่งของที่<u>แตกต่างกันทั้งหมด</u> n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น เท่ากับ $n!$ วิธี

- ถ้ามีสิ่งของที่<u>แตกต่างกันทั้งหมด</u> n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น r สิ่ง $(r\le n)$ เท่ากับ ${}^{n}P_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

- ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ที่<u>แตกต่างกันไม่ทั้งหมด</u> โดยที่ ในกลุ่มที่ 1, 2, …., k มีสิ่งของซ้ำกันเป็น $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับและ $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$
  จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง n สิ่งเท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

(2) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม สูตรที่ควรรู้ได้แก่

- ถ้าสิ่งของที่<u>แตกต่างกันทั้งหมด</u> n สิ่งจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมเท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

หมายเหตุ : แนวคิดการจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมอีกแนวทางหนึ่ง คือ ให้กำหนดตำแหน่งสิ่งของสิ่งหนึ่งสิ่งใดไปแล้ว ให้จัดที่เหลือแบบเชิงเส้น

(3) เทคนิคการเรียงสับเปลี่ยน "ให้อยู่ติดกัน" และ "ไม่มีสิ่งใดติดกัน"

■ การจัดเรียงให้สิ่งของบางสิ่งอยู่**ให้ติดกันเสมอ** ให้มัดรวมสิ่งที่ต้องการให้อยู่ติดกันเป็นสิ่งของหนึ่งสิ่งแล้วเรียงสับเปลี่ยนในกลุ่มด้วย (ใช้เทคนิคมัดมองรวมเป็นหนึ่ง)

■ การจัดเรียงที่ให้สิ่งของบางสิ่ง**ไม่ให้อยู่ติดกันเลย** ให้จัดเรียงสิ่งของอื่นก่อนแล้วนำสิ่งของที่เหลือไปแทรกระหว่างสิ่งที่จัดไว้แล้ว (จัดอย่างอื่นก่อนแล้วแทรกสิ่งที่ไม่ต้องการให้ติดกัน)

4. วิธีจัดหมู่ (Combination)

การนำสิ่งของที่มีความแตกต่างกันทั้งหมดหรือเพียงบางส่วนมาจัดหมู่ โดยไม่ถือตำแหน่งหรือลำดับก่อนหลังเป็นสำคัญ เช่น การเลือกหยิบของพร้อมกันจากจำนวนที่มีอยู่ การสร้างสับเซต

สูตรที่ควรรู้

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด หยิบหรือเลือกออกมา r สิ่งรวมเป็นหมู่ (หยิบพร้อมกัน)

จำนวนวิธีที่ได้ทั้งหมดเท่ากับ $^{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

5. ทษฎีบททวินาม

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^{r} = \binom{n}{0}a^{n}b^{0} + \binom{n}{1}a^{n-1}b^{1} + \ldots + \binom{n}{n}a^{0}b^{n}$$

มีพจน์ทั่วที่ $r + 1$ เท่ากับ $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^{r}$

6. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of Events)

ถ้า S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด และประกอบด้วยผลลัพธ์ที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน

และ E เป็นเหตุการณ์ของ S จะได้ $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

คุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

1. ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $0 \le P(E) \le 1$

2 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในปริภูมิตัวอย่าง S จะได้

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

3. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน จะได้ $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

15. สถิติ

1. การแจกแจงความถี่ข้อมูล

(1) ตารางแจกแจงความถี่

■ **ขอบล่าง**(L) ของอันตรภาคชั้น คือค่ากึ่งกลางระหว่างค่าน้อยที่สุดในอัตรภาคชั้นนั้นกับค่าที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและต่ำกว่า

■ **ขอบบน**(U) ของอันตรภาคชั้น คือค่ากึ่งกลางระหว่างค่าที่มากที่สุดในอันตรภาคชั้นกับค่าที่น้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและสูงกว่า

■ **ความถี่สะสม**(F) คือ ผลรวมของความถี่ของค่านั้นหรืออันตรภาคชั้นนั้นกับความถี่ของค่าหรืออันตรภาคชั้นที่มีช่วงคะแนนต่ำกว่าทั้งหมด

■ **ความกว้างของอันตรภาคชั้น**(I) = ขอบบน – ขอบล่าง

■ **จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น**(x_i) $= \dfrac{\text{ขอบล่าง + ขอบบน}}{2} = \dfrac{\text{ค่ามากสุด + ค่าน้อยสุด}}{2}$

■ **ความถี่สัมพัทธ์** $= \dfrac{\text{ความถี่}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$

(2) แผนภาพต้นใบ(stem-and-leaf plot)

เช่น

0	2
1	3 1 4
2	1 5

อ่านเป็นข้อมูลได้แก่ 2, 13, 11, 14, 21, 25

2. การวัดค่ากลางของข้อมูล (measures of central value)

(1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
ค่าเฉลี่ยเลขคณิตกลุ่มประชากร แทนด้วย μ และกลุ่มตัวอย่าง แทนด้วย $\bar{x}$

■ ข้อมูลแจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น $\mu = \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

■ ข้อมูลแจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น $\mu = \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{N}$, $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

เมื่อ x_i แทนจุดกึ่งกลางชั้น และ f_i แทนความถี่ในอันตรภาคชั้นที่ i

■ ข้อมูลแจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น $\mu = \bar{x} = a + \bar{d}I$, $\bar{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{N}$, $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

เมื่อ $d_i = \dfrac{\text{จุดกึ่งกลางชั้น} - a}{I}$ เมื่อ a เป็นจุดกึ่งกลางชั้นใดชั้นหนึ่ง

■ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตถ่วงน้ำหนัก $\mu = \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ เมื่อ w_i แทนน้ำหนักของค่า x_i

■ ค่าเฉลี่เลขคณิตรวม $\mu = \bar{x}_{\text{รวม}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$

เมื่อ $\bar{x}_i$ แทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ n_i แทนจำนวนค่าของข้อมูลชุดที่ i

(2) มัธยฐาน(median)

■ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น

ให้เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก แล้วหาตำแหน่งมัธยฐาน $= \dfrac{n+1}{2}$

- ถ้าตำแหน่งเป็นจำนวนเต็ม จะได้ข้อมูลในตำแหน่งที่หาได้เป็นมัธยฐาน
- ถ้าตำแหน่งไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้นำค่าที่อยู่ระหว่างตำแหน่งนั้นมาบวกกันแล้วหารด้วย 2

■ ข้อมูลที่แจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น

หาตำแหน่งมัธยฐาน $= \dfrac{n}{2}$ นำไปเทียบกับความถี่สะสมเพื่อดูว่าจะอยู่ในอันตรภาคชั้นใด

จะได้ มัธยฐาน(Med) $= L + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \sum f_L}{f_M} \right) I$

เมื่อ $\sum f_L$ คือผลรวมความถี่ของทุกอันตรภาคชั้นที่คะแนนต่ำกว่า

f_M คือความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐาน

(3) ฐานนิยม(mode)

■ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น

ฐานนิยม คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด(ข้อมูลอาจจะไม่มีฐานนิยมหรือมีสองค่าได้)

■ ข้อมูลที่แจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น

ฐานนิยม คือ จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุด

(4) สมบัติของค่ากลางที่ควรรู้

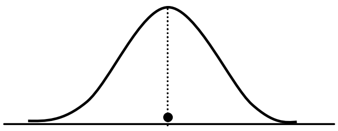
■ $\sum (x_i - \bar{x}) = 0, \ \sum (x_i - \mu) = 0$

■ $\sum (x_i - A)^2$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $A = \bar{x}$ (หรือ $A = \mu$)

■ $\sum |x_i - A|$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $A = \text{Med}$

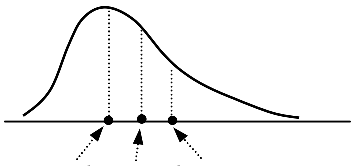
■ **ความสัมพันธ์ระหว่างค่ากลางและการแจกแจงความถี่ของข้อมูล**

เส้นโค้งปกติ



$Mod = Med = \bar{x}$

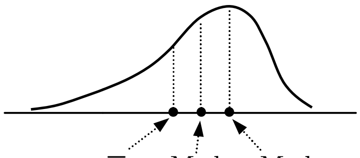
เส้นโค้งเบ้ขวา



$Mod < Med < \bar{x}$

$|Mod - \bar{x}| \approx 3|Med - \bar{x}|$

เส้นโค้งเบ้ซ้าย



$\bar{x} < Med < Mod$

(Pearson's Coefficient of Skewness)

3. การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล

กำหนดข้อมูลชุดหนึ่งมี N จำนวน

ควอร์ไทล์ที่ k (Q_k)เป็นค่าที่มีจำนวนในข้อมูลซึ่งไม่เกินค่านี้อยู่ประมาณ $\frac{kN}{4}$

เดไซล์ที่ k (D_k) เป็นค่าที่มีจำนวนค่าในข้อมูลซึ่งไม่เกินค่านี้อยู่ประมาณ $\frac{kN}{10}$

เปอร์เซ็นไทล์ที่ k(P_k) เป็นค่าที่มีจำนวนค่าในข้อมูลซึ่งไม่เกินค่านี้อยู่ประมาณ $\frac{kN}{100}$

■ **การหาค่าควอไทล์ เดไซน์ และเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น**

(1) นำข้อมูลมากเรียงจากน้อยไปมาก

(2) หาตำแหน่งค่าของค่าที่ต้องการหา

ค่า	Q_k	D_k	P_k
ตำแหน่ง	$\frac{k(N+1)}{4}$	$\frac{k(N+1)}{10}$	$\frac{k(N+1)}{100}$

(3) หาค่าที่อยู่ในตำแหน่งนั้น

ถ้าตำแหน่งเป็นจำนวนเต็มจะได้ว่าข้อมูลที่อยู่ในตำแหน่งนั้นเป็นค่าที่ต้องการ

ถ้าตำแหน่งไม่เป็นจำนวนเต็มใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์ ระหว่างตำแหน่งกับค่าของข้อมูลเพื่อหาค่าตามที่ต้องการ

■ **การหาค่าควอไทล์ เดไซน์ และเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลที่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น**

(1) สร้างความถี่สะสม

(2) หาตำแหน่งค่าของค่าที่ต้องการหา

ค่า	Q_k	D_k	P_k
ตำแหน่ง	$\frac{kN}{4}$	$\frac{kN}{10}$	$\frac{kN}{100}$

(3) นำตำแหน่งไปเทียบกับความถี่สะสมเพื่ออันตรภาคชั้นที่จะมีค่าการวัดตำแหน่งที่ต้องการ

(4) ใช้สูตรในการหาค่าดังนี้

จะได้ $Q_k, D_k, P_k = L + \left(\frac{\text{ตำแหน่งจากข้อ (2)} - \sum f_L}{f}\right) I$

เมื่อ $\sum f_L$ คือผลรวมความถี่ของทุกอันตรภาคชั้นที่คะแนนต่ำกว่า

f คือความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มี Q_k, D_k, P_k

4. การวัดการกระจายของข้อมูล

(1) การวัดการกระจายสัมบูรณ์(measures of absolute variation)

■ พิสัย(Range)

ข้อมูลแจกแจงไม่เป็นอัตรภาคชั้น พิสัย(R) $= x_{max} - x_{min}$

ข้อมูลแจกแจงเป็นอัตรภาคชั้น พิสัย(R) $= U_{max} - L_{min}$

■ ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ (Quartile Deviation : Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

■ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย(Mean Deviation : M.D.)

ข้อมูลแจกแจงไม่เป็นอัตรภาคชั้น M.D.$= \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \mu|}{N}$

ข้อมูลแจกแจงเป็นอัตรภาคชั้น M.D. $= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i |x_i - \mu|}{\sum f_i}$

■ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน(standard deviation)

ข้อมูลประชากรที่แจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2}$

ข้อมูลตัวอย่างที่แจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น $s = \sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$

ข้อมูลประชากรที่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i(x_i-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\dfrac{\sum f_i(x_i^2)}{N} - \mu^2}$

ข้อมูลตัวอย่างที่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น $s = \sqrt{\dfrac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{\sum f_i(x_i^2) - n\bar{x}^2}{n-1}}$

■ ความแปรปรวน(variance) $v = s^2$ หรือ $v = \sigma^2$

(2) การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (mesures of relative variation)

สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \dfrac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}}$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \dfrac{M.D.}{\bar{x}} = \dfrac{M.D.}{\mu}$

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน $= \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\mu}$

(3) สมบัติการวัดการกระจายสมบูรณ์ที่ควรทราบ

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์ทุกชนิดมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
2. <u>การวัดการกระจายสัมบูรณ์เท่ากับศูนย์</u> ก็ต่อเมื่อ ทุกค่าของ<u>ข้อมูลเท่ากัน</u>
3. ถ้าข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ และ ข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ มีความสัมพันธ์ $y_i = ax_i + b$ จะได้ว่า
   - $\bar{y} = a\bar{x} + b$ (การวัดค่ากลางอื่นก็มีสมบัติเหมือนกันกับ $\bar{x}$)
   - $s_y = |a| s_x$, $v_y = a^2 v_x$ (การวัดการกระจายอื่นก็มีสมบัติเหมือนกันกับ s)

4. ความแปรปรวนรวม

- $s^2_{\text{รวม}} = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$ เมื่อ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$
- $s^2_{\text{รวม}} = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + \dots + n_k}$ เมื่อ $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

5. การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ตัวแปรที่กำหนดค่าให้กับผลการทดลองที่เกิดขึ้นโดยที่ค่าเหล่านั้น อาจจะเป็นค่าจริง หรือฟังก์ชันที่มีค่าจริงก็ได้ ในทางสถิติมักใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในการทดลองสุ่มหนึ่ง ๆ ถ้ารวมทุกๆเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ในการทดลองสุ่มเข้าเป็นเซตแล้ว จะเรียกเซตนั้นว่าเป็น ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space) ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ S ตัวอย่างของตัวแปรสุ่ม เช่น

ตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็น 2 ชนิดดังนี้

ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นสับเซตของจำนวนนับ หรืออาจกล่าวได้ว่าทุกๆค่าของ X ถูกกำหนดได้ด้วยจำนวนนับใดๆ

ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นสับเซตของจำนวนจริง หรืออาจจะมีค่าเป็นจำนวนใดๆก็ได้ในช่วงที่ต่อเนื่องกัน ซึ่งไม่สามารถนับได้ว่ามี X จำนวนเท่าใดในช่วงนั้นๆ

ค่าคาดหมายหรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม (Expected Value หรือ Expectation)

(1) ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

$$E(X) = \mu_X = \sum_{\text{all}\,x} x f(x)$$

(2) ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

$$E(X) = \mu_X = \int_{\text{all}\,x} x f(x)\,dx$$

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม (Variance Value of Random Variable)

(1) ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง หาได้ดังนี้

$$\operatorname{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X-\mu_X)^2 = \sum_{\text{all } x} (x-\mu_X)^2 f(x) = \sum_{\text{all } x} x^2 f(x) - \mu_X^2$$

(2) ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง หาได้ดังนี้

$$\operatorname{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X-\mu_X)^2 = \int_{\text{all } x} (x-\mu_X)^2 f(x)\,dx = \int_{\text{all } x} x^2 f(x)\,dx - \mu_X^2$$

5.1 การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง (Discrete Uniform Distribution)

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นไปได้ k ค่า คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$

โดยแต่ละค่าของตัวแปรสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากันจะเรียกตัวแปรสุ่มนี้ว่า

"ตัวแปรสุ่มเอกรูปไม่ต่อเนื่อง" และเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนี้ว่า "การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง"

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง

$$f(x;k) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & ; \quad x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k \\ 0 & ; \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim \text{Uni}(k)$ หรือ $X \sim U(k)$

เรียก k ว่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง

ค่าคาดหมายของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง $E(X) = \mu_X = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$

ความแปรปรวนของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \mu_X\right)^2$

5.2 การแจกแจงทวินาม

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution) คือการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งคือจำนวนครั้งของการเกิดผลสำเร็จจากการทดลองสุ่ม n ครั้ง ที่เป็นอิสระกัน โดยในแต่ละครั้งมีโอกาสเกิดผลสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p และไม่เกิดผลสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $1 - p$

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ที่มีการแจกแจงทินาม

โดยที่ n แทนจำนวนครั้งของการทดลองสุ่ม

และ p แทนความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง จะได้ว่า

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม

$$f(x;n,p) = \begin{cases} \dbinom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & ; \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ค่าคาดหมายของของการแจกแจงทวินาม $E(X) = \mu_X = np$

ความแปรปรวนของการแจกแจงทวินาม $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = np(1-p)$

5.3 การแจกแจงปกติ

กำหนดให้ X แทนตัวแปรสุ่มปกติ (normal random variable)

จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ว่า การแจกแจงปกติ (normal distribution) ซึ่งมี

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & ; \quad -\infty < x < \infty , -\infty < \mu < \infty , \sigma > 0 \\ 0 \quad ; & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ $e \approx 2.718$ และ $\pi \approx 3.1416$

ค่าคาดหมายของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $E(X) = \mu_X = \mu$

ความแปรวนของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $Var(X) = V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$

การแจกแจงปกติมาตรฐาน

ถ้า Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

แล้ว จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z ว่า

การแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)

ซึ่งมี ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน คือ

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} & ; \quad -\infty < z < \infty \\ 0 & ; \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Z \sim N(0,1)$

ค่าคาดหมายของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $E(Z) = \mu_Z = 0$

ความแปรวนของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $Var(Z) = \sigma_Z^2 = Var(z) = 1$

การหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 หรือ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

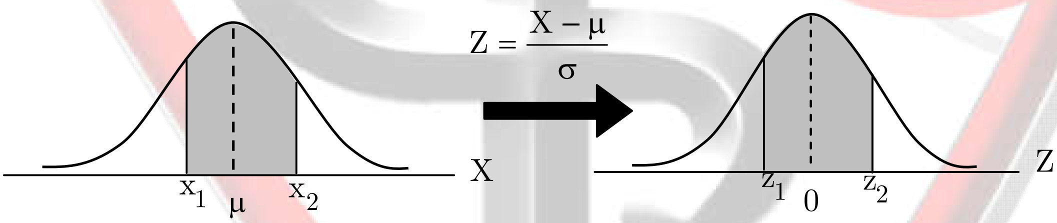
ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็น $P(x_1 < X < x_2)$ ทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนค่าตัวแปรสุ่ม x_1 และ x_2 ให้เป็นค่าตัวแปรสุ่มมาตรฐาน z_1 และ z_2

ตามลำดับ โดยใช้สมบัติ $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

ขั้นที่ 2 หาค่า $P(z_1 < Z < z_2)$ จากตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

จะได้ $P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$ ดังแผนภาพ

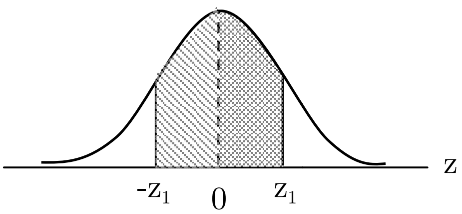


ข้อควรจำ

(1) ค่ามาตรฐาน (standard score) $z_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$

สมบัติของค่ามาตรฐาน ■ $\sum_{i=1}^{N} z_i = 0$, ■ $\sum_{i=1}^{N} z_i^2 = N$

(2) การแจกแจงปกติและเส้นโค้งปกติ



สมบัติของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

- พื้นที่มีค่าเท่ากับ 1 (หรือคิดเป็น 100 %)
- แบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วนๆละ 0.5 (หรือ 50%)
- พื้นที่สองฝั่งสมมาตรกัน

หมายเหตุ พื้นที่ที่กำหนดมาให้ในตาราง เป็นพื้นทางขวาของแกนสมมาตรที่จาก 0 ถึง z

(3) ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นไทล์กับพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน

$$\boxed{\text{คะแนนจริง}(x)} \rightleftarrows \boxed{\text{คะแนนมาตรฐาน}(z)} \rightleftarrows \boxed{\text{พื้นที่ทางขวาจากแกนสมมาตร}} \rightleftarrows \boxed{P_k}$$

โดยที่ k = (พื้นที่ทางซ้ายของค่ามาตรฐาน z) $\times 100$

หมายเหตุ ถ้าจะหา Q_k หรือ D_k สามารถทำด้วยขั้นตอนเดียวกันกับ P_k