

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في
اليمن

<http://ye-thirdsecondr.blogspot.com>

الأعداد المركبة

2013

مجموعات

[1] ط مجموعة الأعداد الطبيعية. [2] ص مجموعة الأعداد الصحيحة.

[3] ن مجموعة الأعداد النسبية. [4] ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

: ط \supset ص \supset ن \supset ح ، ن \cup ن' = ح : ن مجموعة أعداد غير نسبية.
لاحظ:

$$[1] \text{ ص } = 8 + 2 \leftarrow \text{س} \leftarrow 8 - 2 = \text{س} \leftarrow \text{س} = (-) \nabla \nexists \text{ ط.}$$

: هذه المعادلة ليس لها حل في ط ولكن لها حل في ص.

$$[2] \text{ ص} = 5 \leftarrow \text{س} \leftarrow \frac{5}{2} = \text{س} \nexists \text{ ص.}$$

: هذه المعادلة ليس لها حل في ص ولكن لها حل في ن.

$$[3] \text{ س} = 5 = 2^2 \leftarrow \text{س} = \pm 5 \text{ ليس لها حل في ن. ولكن لها حل في ح.}$$

$$[4] \text{ س} = 1 + 2^2 = 0 \leftarrow \text{س} = 1 - 2^2 = -1 \leftarrow \text{س} = \pm \sqrt{-1}$$

: ليس لها حل في ح ولكن لها حل في الأعداد المركبة.

لاحظ:

الغرض من دراسة الأعداد المركبة:

هو حل المعادلات من الدرجة الثانية من الشكل $\text{س}^2 + 2\text{أ} + 0 = 0$ والتي لا يمكن حلها في ح ولكن يمكن حلها في الأعداد المركبة ومن هنا جاءت الفكرة من دراسة الأعداد المركبة.

تعريف العدد التخيلي ت:

عند حل المعادلة $\text{س}^2 = -1$: $\text{س} = \pm \sqrt{-1}$ ولكن السؤال ما هو العدد الذي

إذا ضرب في نفسه كان الناتج (-1).

يمكن أن نسميه بالعدد "ت" : $\text{ت} = \sqrt{-1}$: $\text{ت}^2 = -1$

$$\text{س}^2 = -1 \leftarrow \text{س}^2 = 2^2 \leftarrow \text{ت}^2 = 2^2 \leftarrow \text{س} = \pm \text{ت}$$

∴ مجموعة الحلول = { ± ت } ∴ ت ∉ ح

مثال: حل المعادلة: $0 = 16 + 2س$

الحل:

$$16 - \sqrt{\pm} = س \leftarrow \quad ∴ س = 2^{-} = 16$$

$$\leftarrow س = 4 \pm ت$$

∴ خواص العدت

$$(1) ت = \sqrt{1-}$$

$$(2) ت = 2^{-} = 1$$

$$(3) ت = 3^{-} = -$$

$$(4) ت = 4^{-} = 1 - \times ت = 2^{-} = 1 - \times 1 = 1$$

ت	ت ²	ت ³	ت ⁴
ت	1 -	-ت	1

مثال:

ضع في أبسط صورة:

$$(3) ت^{15}$$

$$(2) ت^{104}$$

$$(1) ت^{22}$$

$$(6) \frac{1}{ت}$$

$$(5) ت^{26^{-}}$$

$$(4) ت^{36}$$

$$(7) ت^{2+4ن} : ن \in ص \oplus$$

الحل:

$$(2) ت^{104} = ت^0 = (1)$$

$$(1) ت^{22} = ت^2 = (1-)$$

$$(4) ت^{36} = ت^0 = 1$$

$$(3) ت^{15} = ت^3 = (1-)$$

$$(5) ت^{26^{-}} = \frac{1}{ت^{26}} = \frac{1}{2ت} = \frac{1}{1-} = (1-)$$

$$(6) \frac{1}{ت} = \frac{ت^4}{ت} = ت^{-3} = ت^{-}$$

$$(7) ت^6 = ت^2 = (1-)$$

ملحوظة:

$$ت^4 = ت^3 + ت^2 + ت + 1$$

لايجاد ت⁴: نطبق القانون

مثال: أثبت أن

$$صفر = \frac{1}{ت} + \frac{1}{ت^2} + \frac{1}{ت^3} + \frac{1}{ت^4}$$

الحل:

$$1 + ت + ت^2 + ت^3 = 1 + \frac{ت^4}{ت^3} + \frac{ت^4}{ت^2} + \frac{ت^4}{ت} =$$

$$0 = 1 + ت + 1 - ت - =$$

$$\therefore ط_1 = ط_2$$

مثال: أثبت أن:

$$0 = 128ت + 406ت + 305ت + 2003ت$$

الحل:

$$1 - = ت^2 = 406ت \quad 1 = ت = 128ت$$

$$ت - = ت^3 = 2003ت \quad ت = 305ت$$

$$\therefore ط_1 = ط_2 \quad 0 = 1 - 1 = ت - ت = 0$$

تعريف العدد المركب:

هو ما كان على صورة (س + ت ص) : س، ص \in ح ويسمى س بالجزء

الحقيقي، ص بالجزء التخيلي.

ملحوظة:

(1) إذا كان ع = س + ت ص وكان ص = 0 فإن ع = س ويقال أن ع حقيقي صرف.

(2) إذا كان ع = س + ت ص وكان س = 0 فإن ع = ت ص ويقال أن ع تخيلي بحت.

تعريف العدد المركب رمزياً:

$$ع = \{ (س + ت ص) : س \in ح ، ص \in ح ، ت = 1 - \}$$

مثال:

أكتب الجزء الحقيقي والتخيلي لكل الأعداد التالية:

$$\sqrt{25} + 7 \text{ [3]} \quad \sqrt{36} \text{ [2]} \quad 5 + 6 - \text{ [1]}$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{5} \text{ [5]} \quad 1 + \sqrt{49} \text{ [4]}$$

الحل:

$$\text{[1]} \text{ الجزء الحقيقي} = (6-) ، \text{ الجزء التخيلي} = (5)$$

$$\text{[2]} \sqrt{36} = 6 = 2^2 \text{ ت}$$

$$\text{[3]} \text{ الجزء الحقيقي} = 0 \quad \text{[4]} \text{ الجزء التخيلي} = (6+)$$

$$\sqrt{25} + 7 = 5 + 7 \text{ ت}$$

$$\text{[5]} \text{ الجزء الحقيقي} = 7 \quad \text{[6]} \text{ الجزء التخيلي} = 5$$

$$\sqrt{49} + 1 = 7 + 1 \text{ ت}$$

$$\text{[7]} \text{ الجزء الحقيقي} = 1 \quad \text{[8]} \text{ الجزء التخيلي} = 7$$

$$\sqrt{35} - \sqrt{35} = 0 = 2^2 \text{ ت}$$

$$\sqrt{35} - \sqrt{35} = 0 = \sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{7} \times \sqrt{5} \text{ [5]}$$

$$\text{[9]} \text{ الجزء الحقيقي} = - \sqrt{35} \quad \text{[10]} \text{ الجزء التخيلي} = \text{صفر}$$

مثال: أثبت أن:

$$16 = (t+1)^4 \left(\frac{1}{t} + 1\right)^4$$

الحل:

$$\text{ط}_1 = (t+1)^4 \left(\frac{1}{t} + 1\right)^4 = (t+1)^4 (t+1)^4 (t-1)^4$$

$$16 = 2^4 = (1+1)^4 = [(t-1) \times (t+1)]^4$$

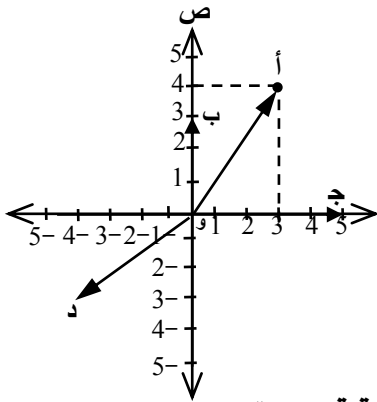
$$\text{ط}_2 = \text{ط}_1$$

تمثيل الأعداد المركبة في المستوى:

- (1) العدد المركب $ع = (س + ت ص)$ يمثل نقطة في المستوى والعكس.
- (2) العدد $(س ، 0) = س$ يمثل الجزء الحقيقي ومحور السينات ونسبي محور السينات بالمحور الحقيقي.
- (3) العدد $(0 ، ص) = ت ص$ يمثل الجزء التخيلي و نسبي محور الصادات بالمحور التخيلي.

مثال: مثل الأعداد التالية في مستوى (أرجاند)

[1] $3 + 4ت$ [2] $3ت$ [3] 5 [4] $-4 - 3ت$



الحل:

[1] $(3 + 4ت)$ يمثل نقطة $(3، 4)$

ويمثل بالمتجه \vec{OA} ويسمى عدد مركب.

[2] $3ت$ يمثل نقطة $(0، 3)$

ويمثل بالمتجه \vec{OB} ويسمى عدد تخيلي بحت.

[3] 5 يمثل نقطة $(5، 0)$ بالمتجه \vec{OC} ويسمى عدد حقيقي بحت.

[4] العدد $(-4 - 3ت)$ يمثل نقطة $(-4، -3)$ ويمثل بالمتجه \vec{OD} .

تعريف: تساوي عددين مركبين

إذا كان $ع_1 = (س_1 + ت_1 ص)$ ، $ع_2 = (س_2 + ت_2 ص)$

يقال: للعددين $ع_1$ ، $ع_2$ أنهما متساويان إذا كان $س_1 = س_2$ ، $ت_1 = ت_2$ ،
أي أن:

$$(1) (س_1 + ت_1 ص) = (س_2 + ت_2 ص) \iff س_1 = س_2 \text{ و } ت_1 = ت_2$$

(2) إذا كان $س + ت ص = 0$ فإن $س = 0$ و $ت = 0$

مثال: أوجد: قيمة $س$ ، $ص$ إذا كان $س + ت ص = 12 + 5ت$

الحل:

$$\therefore \text{س} + \text{ت} = 12 + 5 = 17 \quad \therefore \text{س} = 5 \quad , \quad \text{ص} = 12$$

مثال: أوجد قيمة س ، ص إذا كان $6\text{س} + 4\text{ت} - \text{ص} = 12$ ، $\text{س} + \text{ت} = 0$

الحل:

$$\therefore 0 = (12 - 6\text{س}) + 4\text{ت} - \text{ص} = 12 - 6\text{س} + 4\text{ت} - \text{ص}$$

$$\therefore 0 = 12 - 6\text{س} \quad \therefore 6\text{س} = 12$$

$$\therefore 0 = 1 + 2 - \text{ص} \quad \therefore 2 = \text{ص}$$

$$\boxed{\frac{1}{4} = \text{ص}}$$

$$\therefore 1 = 4\text{ص}$$

$$\boxed{2 = \text{س}}$$

مثال: أوجد قيمة س ، ص الحقيقيتين التي تحقق المعادلة

$$(1+\text{ت})\text{س} + (\text{ت}-1)\text{ص} = 2$$

الحل:

$$\therefore \text{س} + \text{ت} + \text{س}\text{ت} - \text{ص} + \text{ص}\text{ت} = 2 \quad \therefore (\text{س} + \text{ص}) + \text{ت}(\text{س} - \text{ص}) = 2$$

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \text{س} - \text{ص} = 2 \quad (2) \text{ بالجمع}$$

$$2\text{س} = 2 \quad \leftarrow \text{س} = 1$$

$$\therefore 1 + \text{ص} = 0 \quad \leftarrow \text{ص} = -1 \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = (1, -1)$$

مثال: أوجد س، ص إذا كان

$$0 = (\sqrt{3}\text{ت} + 2\text{ص}) + (\sqrt{2}\text{س} - \text{ص})$$

الحل:

$$\therefore \sqrt{2}\text{س} = \text{ص} \quad \leftarrow \quad 0 = \sqrt{2}\text{س} - \text{ص}$$

$$\therefore \sqrt{3}\text{ت} - \text{ص} = 2 \quad \leftarrow \quad 0 = \sqrt{3}\text{ت} + 2\text{ص}$$

$$\frac{\sqrt{3}\text{ت}}{2} - \text{ص} = \text{ص} \quad \leftarrow$$

مثال: أثبت أن

$$+ \text{ص} \ni \text{ن} : 4 - = 4 [(1+\text{ن}^2)^2 (\sqrt{1-\text{ن}}) - 3+\text{ن}^4 (\sqrt{1-\text{ن}})]$$

الحل:

$$\begin{aligned} 1 = \text{ن} \quad & 4 [2+\text{ن}^4 (\text{ت}) - 3+\text{ن}^4 (\text{ت})] = \text{ط}_1 \\ 2(2 - 1 + 1-) = 2 [2(1+ \text{ت} -)] = \text{ط}_1 \quad & 4 [\text{ت}^6 - \text{ت}^7] = \text{ط}_1 \\ \text{ط}_2 = \text{ط}_1 \quad \therefore \quad & 4- = 1- \times 4 = 2 \text{ت} \quad 4 = 2(2 -) = \text{ط}_1 \end{aligned}$$

حل تمارين الكتاب المدرسي تمارين ومساائل (1-1) ص (11)

61 □ بسط كلاً مما يلي:

(أ) t^9 (ب) t^{342} (ج) t^{-63} (د) $t^3 + \frac{1}{t^3}$

(هـ) $t^{37} + \frac{1}{t^{67}}$ (و) $t^5 - t^6$ (ز) $\frac{5}{t^7}$

(ح) $t + 2t^2 + 3t^3 + 4$ (ي) $(1 - \sqrt{t})^{45}$

(ك) $t^{104} + t^{109} + t^{114} + t^{119}$

الحل:

نقسم الأس على 4 ونكتب ت مرفوع للأس الباقي من القسمة.

[أ] $t^9 = t$ [ب] $t^{342} = t^2 = 1 - t$

[ج] $t^{-63} = \frac{1}{t^{63}} = \frac{t}{t} \times \frac{1}{t^{63}} = \frac{t}{t^{64}} = \frac{t}{1}$

[د] $t^3 + t = t + \frac{t}{t^3} = t + \frac{1}{t^2} = t + \frac{1}{t^2} + t^3 = t + \frac{1}{68} = t + \frac{1}{67}$ [هـ] $t^5 - t^6 = t - t = 0$

[و] $t + 1$ [ي] $(1 - \sqrt{t})^{45} = t^{45} = t$ [ك] $t^{104} + t^{109} + t^{114} + t^{119}$ بنفس الأسلوب.

62 □ أكتب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد التالية:

(أ) $4 - 3i$ (ب) $3 + \sqrt{5}$ (ج) $7 + \sqrt{49}$

(د) $\sqrt{3}i$ (هـ) $2 - \sqrt{2} + 2$ (و) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}}$

(ح) 011 (ز) $\sqrt{169}$

الحل:

(أ) الجزء الحقيقي = $4 -$ ، الجزء التخيلي = 3

(ب) $3 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$ \therefore الجزء الحقيقي = 3 والتخيلي = $\sqrt{5}$

(ج) $7 + \sqrt{49} = 7 + 7 = 14$ \therefore الجزء الحقيقي = 7 والتخيلي = 7

د) $\sqrt{3} \sqrt{t} = 0 + 3 = \sqrt{t}$: الجزء الحقيقي = 0 والتخيلي = 3
والباقي بنفس الأسلوب.

3 محلول كمثال.

64 أثبت صحة ما يلي:

أ) $\frac{1}{4} = \frac{4t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 1}{4t^4 - 2t^2 - 2}$
ب) $0 = 1000t + 100t + 10t + 1$

ج) $(1+t+t^2+t^3)^4 = 1 : n \ni v^+$ د) $0 = (t+1)^4 - (t-1)^4$

الحل:

أ) الأيمن $\frac{1}{4} = \frac{t-1}{(t-1)4} = \frac{t-1}{4t-4} = \frac{1+(-1)t}{4-1 \times 2-2} =$

ب) الأيمن $0 = 1 - 1 = 1 - 1 + 2t + 1 =$

ج) الأيمن $1 = (1)^4 = (1+t-t)^4 =$

د) الأيمن $0 = (2)^2 - (2)^2 =$

$0 = (2t+1)^2 - (2t-1)^2 =$

$0 = (2t)^2 - (2t)^2 =$

$0 = [2(2t)]^2 - [2(2t)]^2 =$

$0 = (4t)^2 - (4t)^2 =$

65 أوجد قيمة س ، ص التي فيما يلي:

أ) $2 + س + ت = ص - 3 = ت$ ب) $4 + ت = ص + 3$

ج) $2س + ت = ص + 3 = ت$ د) $12 - 5 = 2(ص + ت)$

الحل:

أ) $2 + س + ت = 3 \leftarrow س = 1$ ، $ص = 1 -$

ب) $س = 3 + ص \dots\dots (1)$ ، $4ص = س \dots\dots (2)$

من (2) نعوض في (1) $4ص = 3 + ص \therefore 3ص = 3 \therefore ص = 1 \therefore س = 4$

ج) نفس الحل. د) ليس هنا مكانها سنحل مع الجذور التربيعية جبرياً.

6 محلول كمثال.