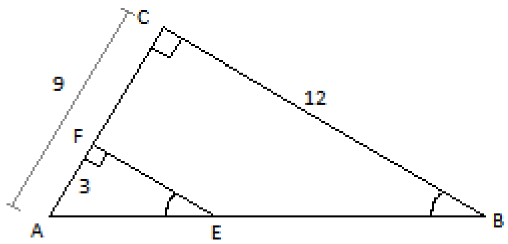
De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

## Opgave 1

a) Givet trekanten:




Vi bestemmer forstørrelsesfaktoren (skalafaktor) $k$:

$$k = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{9}{3} = 3$$

Dernæst bestemmer vi længden $|EF|$:

$$|EF| = \frac{|CB|}{k} = \frac{12}{3} = 4$$

Vi bevæger os videre og bestemmer $|AB|$, men først bestemmes $|AE|$:

$$|EF|^2 + |AF|^2 = |AE|^2$$

Tallene indsættes:

$$4^2 + 3^2 = |AE|^2 \Leftrightarrow |AE| = \sqrt{16+9} = 5$$

Nu kan vi finde $|AB|$:

$$|AB| = |AE| \cdot k = 5 \cdot 3 = 15$$

Som er det ønskede.

## Opgave 2

a) Givet ligningssystemet:

$$3x + y - 11 = 0 \quad (1)$$
$$2x - 3y + 11 = 0 \quad (2)$$

Vi isolerer $y$ i $(1)$:

$$3x + y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 11 - 3x$$

Vi indsætter nu ovenstående i ligningen $(2)$:

$$2x - 3 \cdot (11 - 3x) + 11 = 0 \Leftrightarrow 2x - 33 + 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow 11x = 22 \Leftrightarrow x = 2$$

Og denne $x$-værdi indsættes i $(1)$:

$$3 \cdot 2 + y - 11 = 0 \Leftrightarrow 6 + y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 5$$

Så koordinatsættet er:

$$\{x = 2; y = 5\}$$

Vi kunne også løse det på en anden måde, som vi viser på næste side.

Vi betragter igen ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 3x + y - 11 = 0 \quad (1) \\ 2x - 3y + 11 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Denne gang ganger vi ligning $(1)$ med 3:

$$\begin{aligned} 9x + 3y - 33 = 0 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{aligned}$$

Vi lægger ligningerne til hinanden:

$$11x - 22 = 0$$

Dermed har vi kun en ubekendt:

$$11x - 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Derfra kan vi indsætte denne værdi i $(2)$ eller $(1)$. Begge muligheder vises:

$$\begin{matrix} 3 \cdot 2 + y - 11 = 0 \\ 2 \cdot 2 - 3y + 11 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6 + y = 11 \\ 4 - 3y = -11 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 5 \\ -3y = -15 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 5 \\ y = 5 \end{matrix}$$

Som er det ønskede.

## Opgave 3

a) Givet differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot (x - 1)$$

Og grafen for $f$ løser differentialligningen. Ligeledes er punktet $P(3; 5)$ givet. Vi bestemmer ligningen for tangenten i $P$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Vi indsætter $P$:

$$y = f'(x_0)(x - 3) + 5$$

Vi bestemmer $f'(x_0)$ vha. differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot (3 - 1) = 10$$

Så tangentligningen er:

$$y = 10 \cdot (x - 3) + 5 \Leftrightarrow y = 10x - 25$$

## Opgave 4

a) Vi aflæser teksten og får at: $b = 5382$ og $r = -70\%$ så vi ved allerede nu, at det er en aftagende eksponentiel funktion med $0 < a < 1$. Vi bruger fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r$:

$$a = 1 + \left(-\frac{70}{100}\right) = 0.30$$

Så vores forskrift er:

$$f(x) = 5382 \cdot 0.30^x$$

Der beskriver faldet af malariamyg fra år $2004$.

## Opgave 5

a) Givet to funktioner:

$$f(x) = (2x+1)\cdot\ln(x)\,, \qquad x>0$$
$$g(x) = \frac{1}{x} + 2\cdot\ln(x)\,, \qquad x>0$$

Hvis $f(x)$ skal være en stamfunktion til $g(x)$, så skal man differentiere $f(x)$ eller integrere $g(x)$. Vi starter med at differentiere $f(x)$:

$$f'(x) = (2x+1)\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\ln(x) = \frac{2x+1}{x} + 2\cdot\ln(x)$$

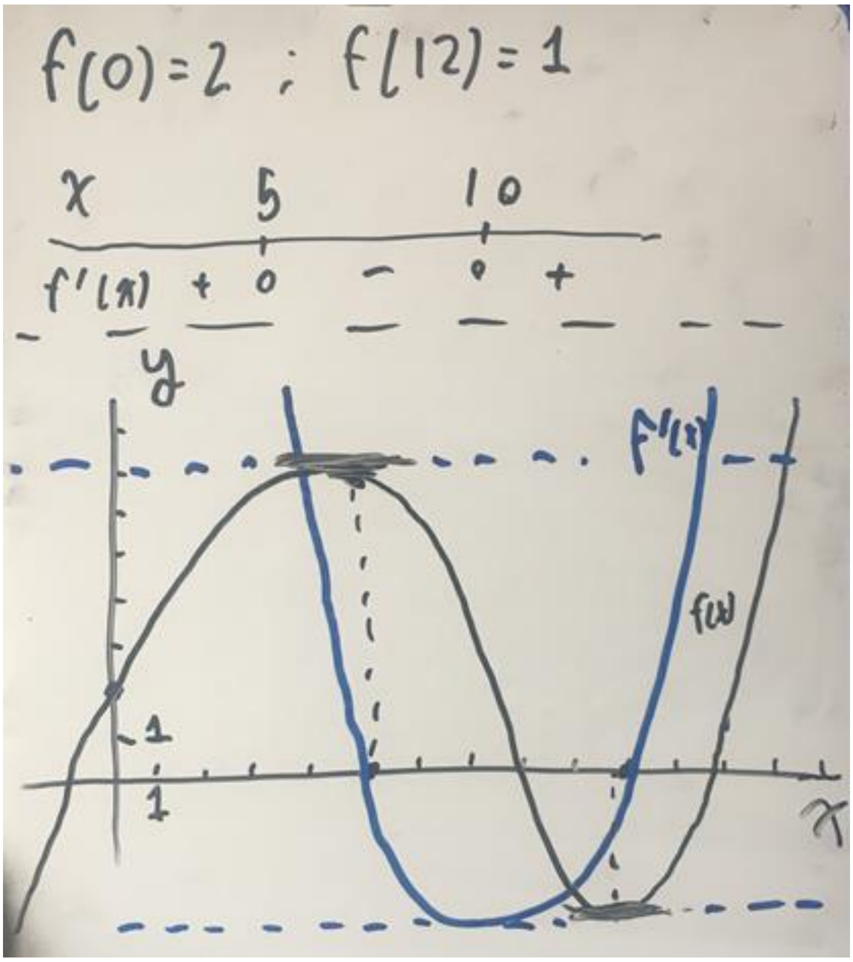
Vi ser, at $f'(x) \neq g(x)$. Vi prøver at integrere $g(x)$:

$$G(x) = \int \frac{1}{x} + 2\cdot\ln(x)\,dx = \ln(x) + 2\cdot(x\cdot\ln(x) - x) = \ln(x) + 2\cdot x\cdot\ln(x) - 2x + k$$

Som overhovedet ikke passer. Med andre ord er $f(x)$ ikke nogen stamfunktion til $g(x)$.

## Opgave 6

a) Givet monotonilinjen og punkterne $f(0) = 2$ og $f(12) = 1$. Vi tegner grafens forløb nedenfor:




Den blå linje repræsenterer $f'(x)$ og den sorte er $f(x)$. De stiplede blå linjer angiver de vandrette vendetangenter for maksimum og minimum.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler.
Bemærk endvidere, at vektorer ikke har pil, men er skrevet med fed. Eks. $\boldsymbol{p} = \vec{p}$

## Opgave 7

a) Der er givet en tabel med oplysninger og disse definerer vi i CAS programmet Maple.

```
restart :; with(Gym) :
L1 := [0, 1, 2, 3] :; L2 := [0.3, 0.8, 1.6, 4.9] :
f(t) := ExpReg(L1, L2, t) :
f(t)
```

$$0.300326500419849\, 2.47756722422762^{t}$$

Vi fik hermed bestemt tallene $a$ og $b$ samt fået angivet en forskrift for den ellers kraftige udvikling af certifikater på fondsbørsen.

b) Omsætningen i år $2015$ svarer til $t = 4$, så vi har:

$$f(4) = 0.300326500419849 \cdot 2.47756722422762^4 = 11.3160652726945$$

Så i år $2015$ vil omsætningen af certifikater på fondsbørsen være $11.316$ mia. kr. Dernæst bestemmer vi hvor meget den årlige vækstrate er. Vi bruger:

$$r_y = (a^{\Delta x} - 1) \cdot 100\%$$

Dvs.

$$r_y = (2.4775^1 - 1) \cdot 100\% = 147.75\%$$

Dvs. for hvert år der går, efter år $2011$, stiger omsætningen af certifikater på fondsbørsen med $147.75\%$.

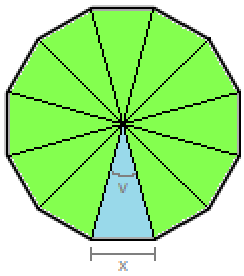
c) Fordoblingstiden bestemmes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2.47756722422762)} = 0.7639861787619581$$

Dvs. fordoblingstiden regnes til at være $T_2 \approx 0.76399$ Så allerede inden årsafslutningen af år $2011$ har man allerede fordoblet omsætningen af certifikater på fondsbørsen.

## Opgave 8

a) Der er givet en figur over en hytte set fra toppen.




Vinkel $v$ bestemmes og pr. definition er en vinkel hele vejen rundt om en cirkel $360^o$ og da der er 12 ligebenede trekanter, så er:

$$v = \frac{360^o}{12} = 30^o$$

Og hermed fandt vi den ønskede vinkel.

b) Vi ved, at arealet af hele hytten er $22m^2$, så en trekant må have arealet

$$\frac{22m^2}{12} \approx 1.83333333m^2$$

Da trekanten er ligebenet så kan vi kalde de to sidelængder for $y$, og derfra udnytte ½-appelsinformlen. Formlen i vores tilfælde ser sådan ud:

$$T = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \sin(v)$$

Og med tallene indsat så er:

$$\frac{22}{12} = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \sin(30) \Leftrightarrow y^2 = \frac{\frac{22}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \sin(30)} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{\frac{22}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \sin(30)}} \approx \pm 2.708$$

Og da vi nu ikke arbejder med negative tal, så er $y = 2.708$ og hermed kan vi nu benytte os af cosinusrelationerne for at bestemme $x$. Formlen i vores tilfælde er:

$$x = \sqrt{2 \cdot y^2 - 2 \cdot y^2 \cdot \cos(v)}$$

Med tallene indsat er:

$$x = \sqrt{2 \cdot 2.708^2 - 2 \cdot 2.708^2 \cdot \cos(30)} = 1.402$$

Som altså er den ønskede værdi af $x$.

## Opgave 9

a) Vi har fået angivet en funktion $f(x)$, som følger:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$$

Vi bestemmer nulpunkterne for funktionen.

$$f(x) = 0$$

Dvs.

$$x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

Vi bruger nulreglen, så:

$$x(x^2 - 5x + 4) = 0$$

Vi har:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Som er en andengradsligning. Vi finder diskriminanten.

$$d = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9, \qquad d > 0$$

Vi regner $x$ for $d > 0$ så $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Så rødderne for tredjegradspolynomiet er:

$$x = 0 \lor x = 1 \lor x = 4$$

Vi kunne naturligvis også regne det i Maple:

$restart :; with(Gym) :$
$f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x :$
$f(x) = 0$

$$x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 4], [x = 1]]$$

b) Vi løber hurtigt videre og bestemmer monotoniforholdene for $f(x)$. Vi viser begge mulige metoder. Funktionen differentieres:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$$

Og løser ligningen $f'(x) = 0$ og dette sker i Maple. (Kan også gøres i hånden).

$restart :; with(Gym) :$
$f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x :$
$f'(x) = 0$

$$3x^2 - 10x + 4 = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}\right], \left[x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}\right]\right]$$

$evalf[5](\%)$

$$[[x = 2.8686], [x = 0.4648]]$$

Fortsættes på næste side

Da vi nu har de afledede rødder fra ligningen $f'(x) = 0$, så kan vi bestemme grafens forløb.

**Metode 1**

Vi benytter os af tallene $0$, $1$ og $4$ eftersom rødderne fra ligningen ligger mellem disse tal.

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 4 = 4$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 4 = -3$$
$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4 + 4 = 12$$

Og her kan vi nu tegne vores monotoniskema:

| $x$ | | $0.4648$ | | $2.8686$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Og hermed er konklusionen, at:

$f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty; 0.4648]$ og $[2.8686; \infty)$ samt aftagende i intervallet $[0.464; 2.868]$.

**Metode 2**

Vi bruger rødderne fra $f'(x) = 0$ i den dobbelte afledede funktion. Den bestemmes:

$$f''(x) = 6x - 10$$

Vi indsætter rødderne.

$$f''(0.4648) = 6 \cdot 0.4648 - 10 = -7.2112$$

Og da $-7.2112 < 0$, så er der lokalt maksimum.

$$f''(2.8686) = 6 \cdot 2.8686 - 10 = 7.2116$$

Og da $7.2116 > 0$, så er der lokalt minimum.

Dermed er konklusionen:

$f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty; 0.4648]$ og $[2.8686; \infty)$ samt aftagende i intervallet $[0.464; 2.868]$.

c) Der er givet en ligning for tangenten i $P(3, f(3))$ og det vides, at vi har en anden tangentligning med samme hældningskoefficient, så $l \parallel m$. Vi skal nu bestemme røringspunktet og dette gøres ved at bruge den afledede funktion samt $a = 1$ fordi det er hældningskoefficienten til $l$. Vi løser derfor ligningen:

$$f'(x) = a$$

Så

$$3x^2 - 10x + 4 = 1$$

I Maple regnes ligningen.

$restart :; with(Gym) :$
$f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x :$
$a := 1 :$
$f'(x) = a$

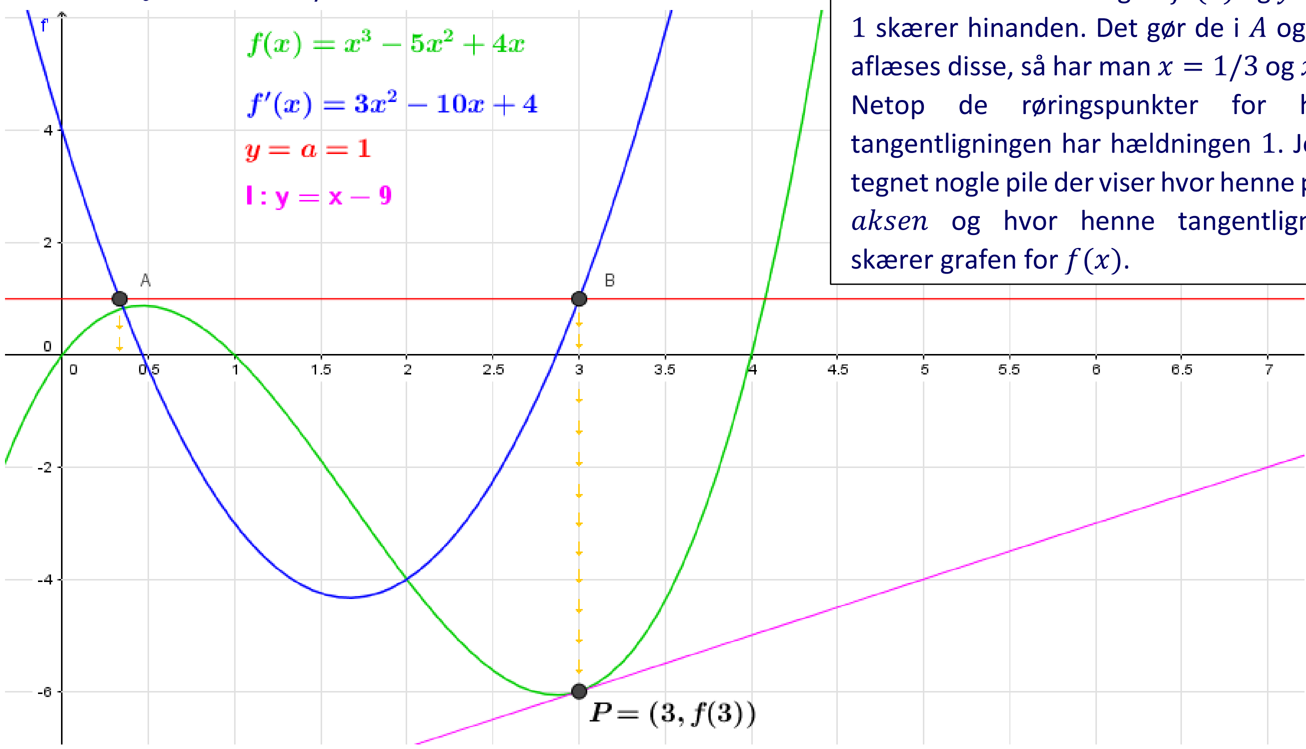
$$3x^2 - 10x + 4 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$\left[[x = 3], \left[x = \frac{1}{3}\right]\right]$$

Så da vi allerede kender $x = 3$ som værende førstekoordinaten til $P$, så må førstekoordinaten til $Q$ være $x = 1/3$. I GeoGebra vises det:

Vi kan se hvor den blå graf $f'(x)$ og $y = a = 1$ skærer hinanden. Det gør de i $A$ og $B$, og aflæses disse, så har man $x = 1/3$ og $x = 3$. Netop de røringspunkter for hvilket tangentligningen har hældningen 1. Jeg har tegnet nogle pile der viser hvor henne på $x-aksen$ og hvor henne tangentligningen skærer grafen for $f(x)$.




<u>*Det overlades til læseren at overbevise sig om, at det passer, evt. tegn begge tangenter og undersøg, om hældningen rent faktisk er* 1.</u>

## Opgave 10

a) Der er givet oplysninger omkring børns BMI ud fra hvilken forældre man bor sammen med, eller om man bor med den ene.

| $\boldsymbol{Observerende\ værdier}$ | $Bor\ sammen\ med\ begge\ forældre$ | $Bor\ sammen\ med\ én\ forældre$ | $Sum$ |
|---|---|---|---|
| $BMI\ under\ 25$ | 120 | 201 | 321 |
| $BMI\ over\ 25$ | 75 | 173 | 248 |
| $Sum$ | 195 | 374 | 569 |

Vi opstiller derfor vores nulhypotese:

$$H_0 = \text{Familietype og BMI er uafhængig}$$

Vi bestemmer nu de forventede værdier. Vi bruger formlen:

$$Forventede = \frac{vandret\ sum}{sum\ i\ alt} \cdot lodret\ sum$$

Så vi har:

$$BMI\ under\ 25 = \frac{Sum_{BMI\ under\ 25}}{total} \cdot Begge\ forældre = \frac{321}{569} \cdot 195 \approx 110$$

$$BMI\ over\ 25 = \frac{Sum_{BMI\ over\ 25}}{total} \cdot Begge\ forældre = \frac{248}{569} \cdot 195 \approx 85$$

$$BMI\ under\ 25 = \frac{Sum_{BMI\ under\ 25}}{total} \cdot En\ forældre = \frac{321}{569} \cdot 374 \approx 211$$

$$BMI\ over\ 25 = \frac{Sum_{BMI\ over\ 25}}{total} \cdot En\ forældre = \frac{248}{569} \cdot 374 \approx 163$$

Vi kan nu lave et skema over de forventede værdier:

| $\boldsymbol{Forventede\ værdier}$ | $Bor\ sammen\ med\ begge\ forældre$ | $Bor\ sammen\ med\ én\ forældre$ | $Sum$ |
|---|---|---|---|
| $BMI\ under\ 25$ | 110 | 211 | 321 |
| $BMI\ over\ 25$ | 85 | 163 | 248 |
| $Sum$ | 195 | 374 | 569 |

Vi kan regne vores $\chi^2$-test i hånden via formlen:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(O_k - F_k)^2}{F_k} = \frac{(O_1 - F_1)^2}{F_1} + \cdots + \frac{(O_n - F_n)^2}{F_n}$$

Her er det græske bogstav sigma et tegn for sum. Vi regner vores teststørrelse:

$$\chi^2 = \frac{(120 - 110)^2}{110} + \frac{(75 - 85)^2}{85} + \frac{(201 - 211)^2}{211} + \frac{(173 - 163)^2}{163}$$

$$\chi^2 = 3.1729$$

Inden vores konklusion, så regner vi også vores teststørrelse i Maple.

$restart :; with(Gym) :$
$obs_1 := \langle\langle 120, 75 | 201, 173\rangle\rangle$

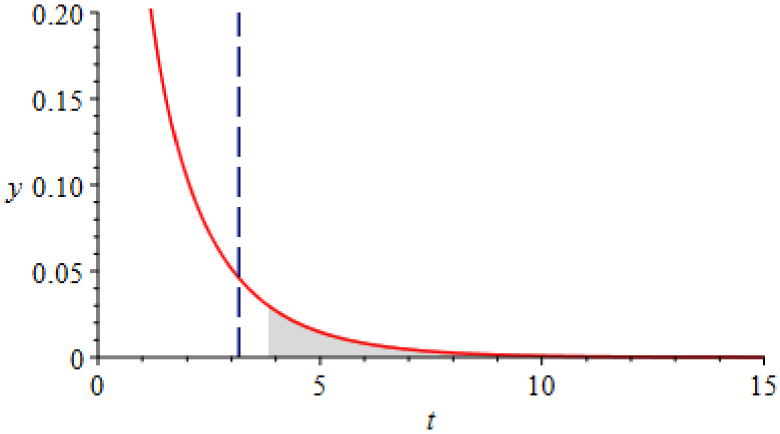
$$\begin{bmatrix} 120 & 201 \\ 75 & 173 \end{bmatrix}$$

$forventet(obs_1)$

$$\begin{bmatrix} 110.01 & 210.99 \\ 84.991 & 163.01 \end{bmatrix}$$

$ChiKvadratUtest(obs_1, level = 0.05)$

$\chi^2$-teststørrelse = 3.1675
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.075119




Og da $p$-værdien er $7.5119\%$ hvilket er over de $5\%$, som vi testede med, så accepteres nulhypotesen. Der er ingen signifikans forskel på børns BMI og familietyper.

b) Nu opdeles tabellen. Man har foretaget en stikprøve, og det fordeler sig således:
*BMI under 25:På skift mellem forældre*
*BMI over 25:På skift mellem forældre*

Altså har man tabellen:

| ***Observerende værdier*** | *Bor sammen med begge forældre* | *Bor på skift mellem forældre* | *Bor udelukkende med den ene forældre* | *Sum* |
|---|---|---|---|---|
| *BMI under 25* | 120 | 100 | 101 | 321 |
| *BMI over 25* | 75 | 61 | 112 | 248 |
| *Sum* | 195 | 161 | 213 | 569 |

Vi gør nu præcis det samme som i spørgsmål a. Denne gang vælger vi blot at regne testen i Maple. Dette foregår på næste side.

$restart :; with(Gym) :$

$obs_2 := \langle\langle 120, 75 | 100, 61 | 101, 112\rangle\rangle$

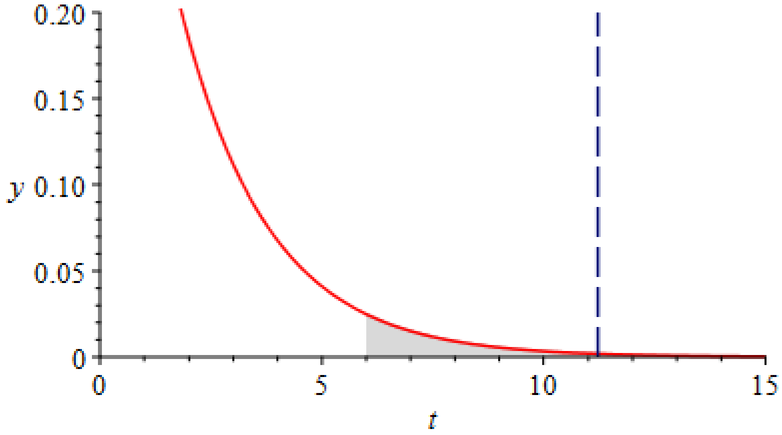
$$\begin{bmatrix} 120 & 100 & 101 \\ 75 & 61 & 112 \end{bmatrix}$$

$forventet(obs_2)$

$$\begin{bmatrix} 110.01 & 90.828 & 120.16 \\ 84.991 & 70.172 & 92.837 \end{bmatrix}$$

$ChiKvadratUtest(obs_2, level = 0.05)$

$\chi^2$-teststørrelse = 11.219
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.0036629




Og da $p$-værdien denne gang er på $0.366\%$ så skal man i den grad forkaste sin nulhypotese. Her vil der være et signifikans forskel på familietypen og børns BMI.

## Opgave 11

a) Vi har fået givet et hav af punkter og skal benytte os af tre af dem for at bestemme arealet af glasfladen $CDE$. Vi opstiller to vektorer:

$$\boldsymbol{CD} = D - C = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -68 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CE} = E - C = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -68 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Da vi nu har fået disse to vektorer, så skal vi foretage os et krydsprodukt. Dette gør vi i hånden* som sker på næste side. Det vises naturligvis også i Maple.

For vektorerne har vi:

$$\boldsymbol{CD} \times \boldsymbol{CE} = d_{23}, d_{31}, d_{12} = \left( \begin{vmatrix} CD_2 & CD_3 \\ CE_2 & CE_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} CD_3 & CD_1 \\ CE_3 & CE_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} CD_1 & CD_2 \\ CE_1 & CE_2 \end{vmatrix} \right)$$

Dvs.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{CD} \times \boldsymbol{CE} &= \left( \begin{vmatrix} -68 & 0 \\ -68 & 11 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -68 \\ 9 & -68 \end{vmatrix} \right) \\ &= -68 \cdot 11 - (-68) \cdot 0; 0 \cdot 9 - 11 \cdot 0; 0 \cdot (-68) - 9 \cdot (-68) \\ &= -748;\ 0;\ 612 \\ &= \begin{pmatrix} -748 \\ 0 \\ 612 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Som er vores krydsprodukt af vektorerne $\boldsymbol{CD}$ og $\boldsymbol{CE}$. I Maple vises det også, og formentlig nok også nemmere for de fleste.

$restart :; with(Gym) :$
$\boldsymbol{CD} := \langle 0, -68, 0 \rangle :; \boldsymbol{CE} := \langle 9, -68, 11 \rangle :$
$\boldsymbol{CD} \times \boldsymbol{CE}$

$$\begin{bmatrix} -748 \\ 0 \\ 612 \end{bmatrix}$$

Man kunne også bruge kommandoen: *linalg[crossprod](x, y)*

Da vi nu har vores krydsprodukt, så anvendes formlen for arealet:

$$T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot |\boldsymbol{CD} \times \boldsymbol{CE}|$$

Og med tallene indsat er:

$$T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-748)^2 + 0^2 + 612^2} = 483.24$$

Så arealet af glasfladen $CDE$ er $483.23m^2$. I Maple kunne man bestemme arealet uden de store problemer:

$restart :; with(Gym) :$
$\boldsymbol{CD} := \langle 0, -68, 0 \rangle :; \boldsymbol{CE} := \langle 9, -68, 11 \rangle :$
$arealT(\boldsymbol{CD}, \boldsymbol{CE})$

$$34\sqrt{202}$$

$evalf[5](\%)$

$$483.24$$

*<u>Dette træner læseren i, at læseren formentlig skal til en mundtlig eksamen hvor dette måske kan indgå i et spørgsmål. Overbevis dig om, at metoden passer.</u>*

b) Glasfladen CDE har normalvektoren

$$\boldsymbol{n_{CDE}} = \begin{pmatrix} -748 \\ 0 \\ 612 \end{pmatrix}$$

Normalvektoren for $xy$ planen er:

$$\boldsymbol{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så vinklen bestemmes mellem vektorerne:

$$v = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{n_{CDE}} \cdot \boldsymbol{n_{xy}}}{|\boldsymbol{n_{CDE}}| \cdot |\boldsymbol{n_{xy}}|}\right)$$

Og vi har:

$$v = \arccos\left(\frac{-748 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 612 \cdot 1}{\sqrt{(-748)^2 + 0^2 + 612^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}\right) \approx 50.71^o$$

Og dermed har vi bestemt den stumpe vinkel mellem $\boldsymbol{n_{CDE}}$ og gulvplanen $\boldsymbol{n_{xy}}$. Dette er den korrekte vinkel eftersom vi søgte den stumpe vinkel mellem glasfladen og gulvplanen. Vi kunne også udregne pivtøjet i Maple:

```
restart :; with(Gym) :
n_CDE := ⟨-748, 0, 612⟩ :; n_xy := ⟨0, 0, 1⟩ :
vinkel(n_CDE, n_xy)
                    50.71059313
```

c) Vi skal nu bruge punkterne $A$, $B$, $C$ og $D$ eftersom der skal monteres en stålwire fra $B$ til $D$ og $A$ til $C$. Dvs. vi skal opstille to parameterfremstillinger. Vi benytter $A$ og $B$ som to faste punkter og vi bestemmer $AC$ og $BD$ som to retningsvektorer.

$$\boldsymbol{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 18 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BD} = D - B = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -62 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Og dernæst opstilles parameterfremstillingerne, lad dem være kaldt $l$ og $m$:

$$l \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$m \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -62 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Hvis de begge skal have et skæringspunkt, så løses der to ligninger med to ubekendte. Vi tager ligningerne:

$$22 - 4t = 22 - 4s \quad (1)$$
$$68t = 62 - 62s \quad (2)$$

Og på næste side løser vi ligningerne i Maple (og i hånden til dem der har interesse i at se det).

```
restart :; with(Gym) :
solve({22 − 4 t = 22 − 4 s, 68 t = 62 − 62 s})
```

$$\left\{s = \frac{31}{65}, t = \frac{31}{65}\right\}$$

Vi kan også regne den i hånden.

$$\begin{matrix} 22 - 4t = 22 - 4s \\ 68t = 62 - 62s \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 68 \cdot (-4t) = 68 \cdot (-4s) \\ 4 \cdot 68t = 4 \cdot (62 - 62s) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -272t = -272s \\ 272t = 248 - 248s \end{matrix} \Leftrightarrow 0$$

$$= -520s + 248 \Leftrightarrow 248 = 520s \Leftrightarrow s = \frac{248}{520} = \frac{31}{65}$$

Vi indsætter denne værdi af $s$ i en af ligningerne (1) eller (2). Vi vælger (2):

$$68t = 62 - 62 \cdot \left(\frac{31}{65}\right) \Leftrightarrow 68t = \frac{2108}{65} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{2108}{65}}{68} = \frac{2108}{65} \cdot \frac{1}{68} = \frac{31}{65}$$

Så værdierne af $s$ og $t$ er:

$$\left\{s = \frac{31}{65}; t = \frac{31}{65}\right\}$$

Præcis som Maple fik. Indsættes disse værdier i parameterfremstillingerne fås koordinatsættet til monteringspunktet $S$

$$l \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{31}{65} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1306/65 \\ 2108/65 \\ 992/65 \end{pmatrix}$$

$$m \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{31}{65} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -62 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1306/65 \\ 2108/65 \\ 992/65 \end{pmatrix}$$

Dvs. koordinatsættet til monteringspunktet $S$ er:

$$S = \left\{x = \frac{1306}{65}; y = \frac{2108}{65}; z = \frac{992}{65}\right\}$$

## Opgave 12

a) Givet differentialligningen:

$$y'(t) = -0.03 \cdot y(t)$$

Vi bestemmer veksthastigheden, som klorkoncentrationen aftager med, når koncentrationen er på $1.2mg/liter$, dvs.:

$$y'(t) = -0.03 \cdot 1.2 = -0.036$$

Dvs. når koncentrationen er på $1.2mg/liter$, så aftager koncentrationen hver time med $0.036mg/liter$.

b) Vi udnytter, at denne type differentialligning har den fuldstændige løsning:

$$y(t) = c \cdot e^{-0.03 \cdot t}$$

Og her ønsker vi at bestemme $c$, til det har vi at $y(0) = 1.8$ så:

$$1.8 = c \cdot e^{-0.03 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 1.8$$

Dvs. differentialligningen har den partikulære løsning:

$$y(t) = 1.8 \cdot e^{-0.03 \cdot t}$$

Vi ønsker nu at bestemme klorkoncentrationen dagen efter første observation, dvs. $t = 24$:

$$y(24) = 1.8 \cdot e^{-0.03 \cdot 24} = 0.876$$

Så efter et døgn er koncentrationen på $0.876mg/liter$. Vi kunne også bestemme forskriften i Maple:

*restart* :; *with*(*Gym*) :
*dsolve*($\{y'(t) = -0.03 \cdot y(t), y(0) = 1.8\}, y(t)$)

$$y(t) = \frac{9}{5} \mathrm{e}^{-\frac{3}{100} t}$$

Og dermed kunne man så arbejde videre derfra.

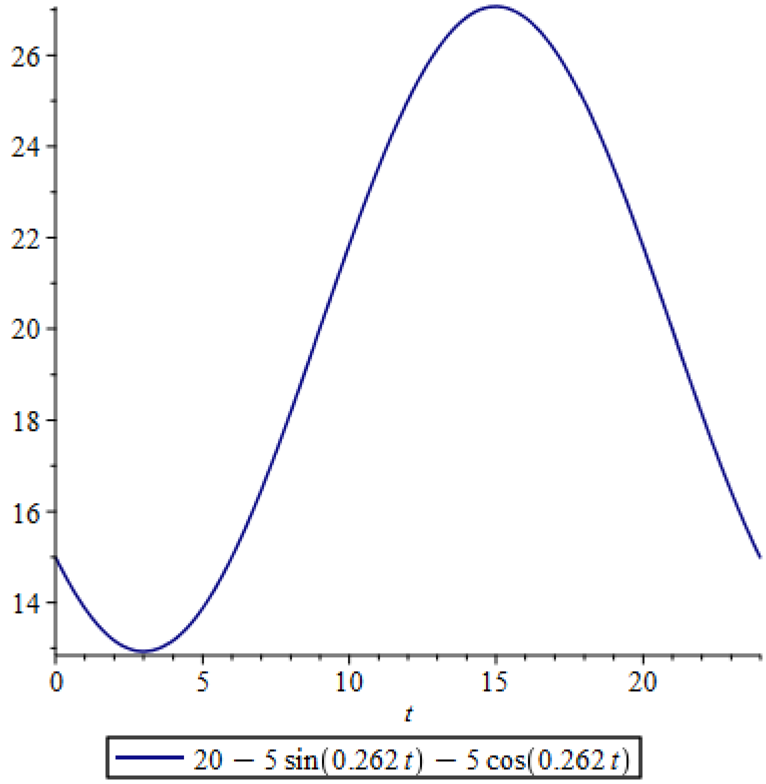
## Opgave 13

a) Der er givet en trigonometrisk funktion over et bestemt sommerdøgn.

$$f(t) = 20 - 5 \cdot (\sin(0.262 \cdot t) + \cos(0.262 \cdot t)), \qquad 0 \leq t \leq 24$$

Vi tegner grafen i Maple.

$restart :; with(Gym) :$
$f(t) := 20 - 5 \cdot (\sin(0.262 \cdot t) + \cos(0.262 \cdot t)) :$
$plot(f(t), t = 0 ..24, legend = [f(t)], color = ["Navy"])$




Vi kan strengt taget blot aflæse grafen vi har tegnet og give os et skøn over, hvordan temperaturen er. Vi kan også differentiere funktionen $f(t)$ og løse ligningen $f'(t) = 0$ hvorefter at benytte os af den dobbelte afledede.

$restart :; with(Gym) :$
$f(t) := 20 - 5 \cdot (\sin(0.262 \cdot t) + \cos(0.262 \cdot t)) :$
$intervalsolve(f'(t) = 0, t = 0 ..24)$

$$[2.997702914, 14.98851457]$$

$f(2.997702914); f(14.98851457)$

$$12.92893218$$

$$27.07106782$$

$f''(2.997702914)$

$$0.4853863789$$

Lokalt minimum for $0.4853863789 > 0$.
$f''(14.98851457)$

$$-0.4853863788$$

Lokalt maksimum for $-0.4853863789 < 0$.

På næste side fortsættes konklusionen.

Da den dobbelte afledede for $t = 2.998$ nu giver et positiv output, så har vi et minimum og da $t = 14.989$ nu giver et negativt output, så er der et maksimum. Dvs. den laveste temperatur kan man opleve kl. $3$ om natten og den højeste temperatur kan man opleve kl. $15$ om dagen. I Maple kunne man også bestemme disse værdier alternativt:

$$maximize(f(t))$$
$$27.07106781$$
$$minimize(f(t))$$
$$12.92893219$$

b) I Maple indsætter vi $f'(8)$, dvs.:

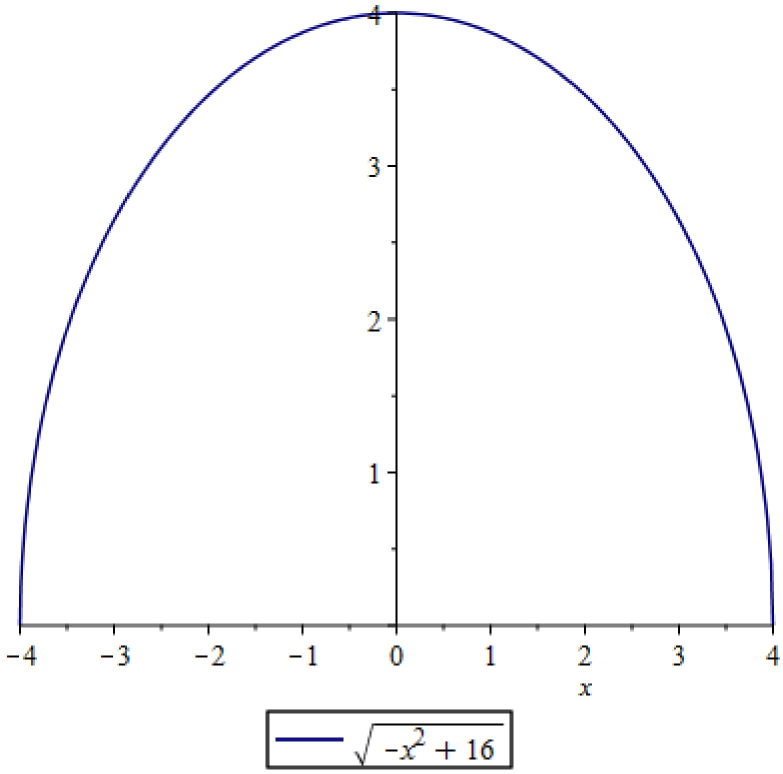
$$restart :; with(Gym) :$$
$$f(t) := 20 - 5\cdot(\sin(0.262\cdot t) + \cos(0.262\cdot t)) :$$
$$f'(8)$$
$$1.790260511$$

Dvs. væksthastigheden for $t = 8$ betyder, at fra kl. 8 om morgenen stiger temperaturen med $1.80^oC$ pr. time.

## Opgave 14

a) I Maple tegner vi grafen over den givende funktion $f(x) = \sqrt{4^2 - x^2}$ afgrænset i intervallet $-4 \leq x \leq 4$.

$$restart :; with(Gym) :$$
$$f(x) := \sqrt{4^2 - x^2} :$$
$$plot(f(x), x = -4 ..4, legend = [f(x)], color = ["Navy"])$$




Arealet af området bestemmes på næste side.

Vi bestemmer arealet i Maple.

$$restart :; with(Gym) :$$
$$f(x) := \sqrt{4^2 - x^2} :$$
$$M = \int_{-4}^{4} f(x)\,dx$$
$$M = 8\pi$$
$$evalf[5](\%)$$
$$M = 25.133$$

Hermed er arealet bestemt til at være $M_{f(x)} = 25.133$, afgrænset af $x = -4$ og $x = 4$ som ønsket.

b) I Maple bestemmes $a$ for funktionen $g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, afgrænset af intervallet $-a \leq x \leq a$, desuden er $a$ et positivt tal. Vi bestemmer $a$ i Maple, sådan så arealet af $M_{g(x)}$ bliver $4$.

$$restart :; with(Gym) :$$
$$g(x) := \sqrt{a^2 - x^2} :$$
$$4 = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx$$
$$4 = \frac{1}{2}\,\mathrm{csgn}(a)\,a^2\,\pi$$
$$\xrightarrow{\text{solve for a}}$$
$$\left[\left[a = -\frac{2\,\mathrm{I}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right], \left[a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right]\right]$$
$$evalf[5](\%)$$
$$[[a = -1.5957\,\mathrm{I}], [a = 1.5957]]$$

Da vi på matematik A ikke arbejder med komplekse tal, så forkastes denne værdi og dermed må konklusionen være, at for $a = 1.5957$ får man arealet af $M$ til at være $4$, afgrænset af intervallet $-1.5957 \leq x \leq 1.5957$ som ønsket.