الرياضيـــات السوريـــة

سلسلـة النهايـات المميـزة

تأليف الأستاذ

عبد الحميد السيد

الجمهورية العربية السورية - حلب 2014

سلسلة النهايات المميزة (1) تأليف الأستاذ : عبد الحميد السيد

1 – العمليات على النهايات : (فيما يأتي a و a' أعداد حقيقية)

1) نهاية مجموع :

نهاية f	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $f+g$	$a+a'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم تعيين

2) نهاية الجداء :

نهاية f	a	$a>0$	$a>0$	$a<0$	$a<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g	a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $f\cdot g$	$a\cdot a'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين

3) نهاية كسر :

I) نهاية g لا تساوي الصفر :

نهاية f	a	a	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية g	$a'\neq 0$	$+\infty$ أو $-\infty$	$a'>0$	$a'<0$	$a'>0$	$a'<0$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{a}{a'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين

II) نهاية g تساوي الصفر :

نهاية f	$a>0$ أو $+\infty$	$a>0$ أو $+\infty$	$a<0$ أو $-\infty$	$a<0$ أو $-\infty$	0
نهاية g	قيم g موجبة	قيم g سالبة	قيم g موجبة	قيم g سالبة	0
نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين

4) صيغ عدم التعيين :

- هناك حالات لا نستطيع إعطاء الجواب مباشرةً تدعى حالات عدم التعيين وهي سبعة :

$$\lim_{x\to a} f(x)=(1)^{\infty} \quad , \quad (0)^0 \quad , \quad (\infty)^0 \quad , \quad 0\cdot\infty \quad , \quad +\infty-\infty \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty}$$

وتزال حالة عدم التعيين بإعادة صياغة قاعدة ربط التابع

(التحليل لعوامل مشتركة ، الضرب والتقسيم ....)

وبطريقة خاصة الضرب والتقسيم على المرافق أو باستخدام قاعدة لوبيتال .

* ملاحظة : هذه الكتابة هي رموز لتسهيل كتابة حالات عدم التعيين وليس لها معنى رياضي .

* قاعدة لوبيتال : تستخدم في حالتي عدم التعيين من النمط : $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

نشتق البسط ونشتق المقام ونعيد الانهاء ونكرر ذلك حتى التخلص من حالة عدم التعيين

2 – مبرهنات المقارنة :

1) مبرهنة الإحاطة الأولى :

إذا كان : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

وكان : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = a$

عندئذٍ : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = a$

* خلاصة : أي تابع محصور بين تابعين كل منهما ينتهي إلى a ، تكون نهايته a (حقيقية أو لانهائية)

2) مبرهنة الإحاطة الثانية :

إذا كان : $|f(x) - a| \leq g(x)$ ، وكان : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 0$

عندئذٍ : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = a$

* ملاحظة : تصح المبرهنتين السابقتين عندما تسعى x إلى $-\infty$ أو إلى عدد حقيقي .

3) مبرهنة المقارنة عند اللانهاية :

ليكن f و g تابعين معرفين على مجال $I =]b, +\infty[$

1 إذا كان $f(x) \geq g(x)$ عند كل x من I

وكان $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، كان : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 إذا كان $f(x) \leq g(x)$ عند كل x من I

وكان $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ، كان : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

* ملاحظة : أيضاً تصح هذه المبرهنة عندما تسعى x إلى $-\infty$ (حيث $I =]-\infty, b[$)

3 – مبرهنات في نهاية التوابع الأسية واللوغاريتمية :

$1)\ \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$2)\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{ax}}{x^n} = +\infty : a > 0 \ , n \geq 0$

$3)\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0 \ : \ n \geq 0$

$4)\ \lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0 = \begin{cases} 0^- & n \text{ فردية} \\ 0^+ & n \text{ زوجية} \end{cases}$ تجاوزاً $n \in N$

$5)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - 1}{ax} = 1 \ : a \neq 0$

$6)\ \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ , \ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$

$7)\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(ax)}{ax} = 0 \ , \ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{ax}{\ln(ax)} = +\infty \ : a > 0$

$8)\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x \cdot \ln x = 0 = 0^-$ تجاوزاً

$9)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + ax)}{ax} = 1 \ , \ \lim_{x \to 0} \dfrac{ax}{\ln(1 + ax)} = 1 \ : a \neq 0$

$10)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x} = 1 \ , \ \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$

$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^y = e$ و $\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$

* **قضية :** نهاية تابع كسري عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية خارج قسمة الحد المسيطر في البسط على الحد المسيطر في المقام . ونهاية تابع كثير الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية الحد المسيطر .

4 – مبرهنة : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

* نتيجة وتعميم : أياً كان $a \in R^*$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin a x}{a x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan a x}{a x}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a x}{\sin a x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a x}{\tan a x} = 1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \cot x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \cot x = -\infty$$

* قضية : إذا كان $f : R \to R$ تابعاً دورياً وغير ثابت . عندئذٍ لا يوجد للتابع نهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$

أي أن : $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \sin x$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \cos x$ غير موجودة .

5 – تعرف العدد المشتق :

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I من D_f ، ولتكن a نقطة من I .

- نقول أن $b \in R$ هو العدد المشتق للتابع f عند a إذا تحقق أحد الشرطين :

$$1)\ \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b \quad : x \in I \setminus \{a\}$$

$$2)\ \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \quad : a + h \in I$$

- عندها نكتب : $f'(a) = b$ أي قيمة مشتق التابع f عند a

- إذا كانت النهاية السابقة $+\infty$ أو $-\infty$ يكون التابع f ليس اشتقاقي عند a

- إذا كانت قيمة النهاية السابقة من اليمين عند a لا تساوي قيمة النهاية من اليسار عند a يكون التابع f ليس اشتقاقي عند a .

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 1)

باستخدام قاعدة لوبيتال ثم بطريقة أخرى أثبت أن :

$$\lim_{x \to e} \frac{e \cdot x^{n} - e^{n+1}}{x - e} = n \cdot e^{n}$$ حيث : $n \in N^*$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 2)

أثبت أن : $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 3)

ابحث عن النهاية الآتية : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{\tan x}}{1 + e^{\tan x}}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 4)

أثبت أنه يوجد قيمة وحيدة للعدد الحقيقي $x \neq 0$ تحقق :

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{x+t} - e^{x-t}}{2 \sin x\, t} = e$$

(بدون استخدام لوبيتال في حساب النهاية والجواب : $x = 1$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 5)

إذا كان : $\lim_{x \to a} \frac{\cos 3x - \cos 3a}{x - a} = 3 \cos 2a$

حيث $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ فاستنتج أن : $a = \frac{3\pi}{10}$

(بدون استخدام لوبيتال في حساب النهاية)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 6)

جـد قيمة العدد الحقيقي $(a \neq 0)$ حتى تتحقق المساواة الآتية :

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(1 + a \cdot e^{x}\right)^{a \cdot e^{-x}} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(e^{a} + e^{x} \cdot \sin x\right)$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 7)

جـد : $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 8)

أثبت أنه يوجد قيمة وحيدة للعدد الحقيقي $a \in R_{+}^{*}$ بحيث يتحقق :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{2\cos^{2} x - \sin 2x + a \cdot e^{x}}{e^{x} + 1}\right) = \ln a$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 9)

جـد العدد الحقيقي $a > 1$ وبدون استخدام لوبيتال إذا علمت أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{x - a}{\ln(x-1) - \ln(a-1)} = 1$$

(الجواب : $a = 2$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 10)

ليكن التابع العددي : $f(x) = \dfrac{\ln(-\ln(x))}{\ln(e \cdot x)}$

عين بالتفصيل مجموعة تعريف (مجال) التابع f

ثم ابحث عن نهايته عند الأطراف المفتوحة لمجالات استمراره

بدون استخدام لوبيتال في حال وجود عدم تعيين

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 11)

ليكن التابع العددي : $f(x)=\dfrac{\ln(\cos x-\sin x)}{\ln(\cos x+\sin x)}$

جد أوسع مجالات محتواة في $[-\pi,\pi]$ يكون التابع معرفاً عليها

ثم ابحث عن نهايته عند الأطراف المفتوحة لتلك المجالات بدون لوبيتال

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 12)

بدون استخدام لوبيتال ، جد العدد الحقيقي a إذا كان :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sqrt{e^{x}+a}-\sqrt{e^{a}+x}}{e^{x}-e^{a}}=0$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 13)

أثبت أنه يوجد قيمة وحيدة للعدد الحقيقي $x>0$ بحيث تتحقق :

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x+\ln t}{\ln t}\right)^{\ln t}=x^{e}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 14)

جد : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(a)^{\ln x}-(b)^{\ln x}}{x-1}$

حيث : $a\neq b$ عددان حقيقيان موجبان تماماً

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 15)

بدون استخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 16)

أثبت بدون لوبيتال أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln\left(2-e^{x}\right)}{e^{x}+\ln x}=-1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 17)

جد العدد الحقيقي $a>0$ إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{a\cdot\sin x}-\sqrt{a\cdot\cos x}}{4x-\pi}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 18)

أثبت أنه أياً يكن $a\in R^{*}$ فإن :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{ax-\tan ax}{ax-\sin ax}=-2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 19)

ابحث عن نهاية التابع : $f(x)=e^{x\cdot\sin\frac{1}{x}}$

عندما تسعى x إلى الصفر ، ثم عندما تسعى x إلى $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 20)

بدون استخدام قاعدة لوبيتال

وبفرض $a\in R$ ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{e^{x\cdot\ln(x-a)}}{x-a}$$

في حال $a=1$ ثم في حال $a\neq1$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 21)

جد العدد الحقيقي $a \neq 0$ لتكون :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\sin\left(ax + \frac{a\pi}{3}\right)} = 12$$

(الجواب : $a = 2$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 22)

جد العدد الحقيقي a بحيث تتحقق المساواة الآتية :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{a}{x}}}{x} (x + a) \right)^x = e^2$$

(الجواب : $a = 1$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 23)

بدون لوبيتال أثبت أن :

$$1)\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x - \ln^2 x}{x + \ln^2 x} = 1$$

$$2)\ \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{x - \ln^2 x}{x + \ln^2 x} = -1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 24)

بدون لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(e^{\sin x} - e^{\cos x}\right) - \cos x}{\ln(\sin x - \cos x)} = 0$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 25)

أثبت أنه يوجد عدد حقيقي a وحيد (يطلب إيجاده)

بحيث تتحقق المساواة الآتية :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{|x|}{e + \sin\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{a \cdot e^{x+1} - x \cdot e^{a} - a \cdot e}{x} \right)$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 26)

بدون لوبيتال احسب النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\cos x - \sin x}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 27)

بدون لوبيتال احسب قيمة العدد الحقيقي $1 \neq a > 0$ إذا كان :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{2x} - a^{x}}{x} = 1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 28)

بدون استخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\pi x - x^2}{e^{\sin x} - e^{\tan x}} = \frac{\pi}{2}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 29)

باستخدام قاعدة لوبيتال ثم بطريقة أخرى

أثبت أن : $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(\sin a x)}{\ln(\sin b x)} = 1$

a , b ثابتين حقيقيين موجبين تماماً ومختلفين بالقيمة

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 30)

بدون لوبيتال ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{\theta \xrightarrow{>} \frac{\pi}{4}} e^{\tan 2\theta} \times \ln\left(e^{\sin\theta} - e^{\cos\theta}\right)$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 31)

ابحث عن النهاية الآتية باستخدام قاعدة لوبيتال

ثم تحقق من ذلك بطريقة أخرى :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{\cos x - e^{\sin x}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 32)

ابحث عن نهاية التابع :

$$f(x) = x \cdot \cos(\ln x)$$

عندما تسعى x إلى الصفر من اليمين (بقيم أكبر)

وعندما تسعى x إلى $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 33)

جد العدد الحقيقي a إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x + 2\ln\left(e^{x} + e^{-x}\right)}{2x} = e^{a} - e^{-a}$$

(بدون استخدام لوبيتال في حساب النهاية)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 34)

بدون استخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \longrightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x} = 2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 35)

بدون استخدام قاعدة لوبيتال احسب :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x - \sin x}{2 - \sin x}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 36)

بدون استخدام لوبيتال ابحث عن :

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 37)

بدون لوبيتال احسب قيمة العدد الحقيقي $a>1$ إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a^{x\cdot\cos x} - 1}{x} = 1$$

(الجواب : $a=e$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 38)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\cos x} - e^{x}}{e^{\cos x} + e^{x}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 39)

احسب : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e \ln(\cos x)}{e - e^{\frac{1}{\cos^2 x}}}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 40)

جد العدد الحقيقي $a \neq 0$ إذا كان :

$$\lim_{x \to a} (a-x)\tan\frac{\pi x}{2a} = \frac{2}{\pi}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 41)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{e^x - e}{\ln x}\right)^{x-1}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 42)

بدون استخدام لوبيتال ابحث عن :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{\ln x} - \ln\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 43)

أثبت أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (\ln x)^{\ln x} = 1$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 44)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to 0} \left(e^x + e^{-x} - 2\right)^x$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 45)

ناقش بحسب قيم العدد الحقيقي $a\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$

نهاية التابع : $f(x)=\dfrac{a^{\ln x}-1}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 46)

إذا كان العدد الحقيقي $a>0$ فاحسب :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{\sqrt[3]{x^3-a^3}-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt[3]{x^3-a^3}+\sqrt{x^2-a^2}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 47)

إذا كان : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin 3x-\sin 3a}{a-x}=3\sin a$

احسب قيم الوسيط الحقيقي $a\in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

(بدون استخدام لوبيتال في حساب النهاية)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 48)

أثبت أن : $\lim\limits_{x \to 0} (1-\cos x)^{\sin x}=1$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 49)

بدون لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x\cdot\sin x}=-\frac{1}{2}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 50)

ليكن التابع : $f(x) = x \cdot \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)$ حيث $a \in R_-^*$

أثبت أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

ثم جد قيمة a التي من أجلها يكون $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 51)

أثبت أنه أياً كان العددين a,b من R^* فإن :

$$\lim_{x \to 0} (\cos ax)^{\frac{b}{\sin ax}} = 1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 52)

ليكن التابع f المستمر على كل من $]0,1[\,,\,]1,+\infty[$

حيث : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$

ابحث عن نهاية f عند كل طرف من أطراف مجالات استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 53)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\ln x - \sin x} - \ln x\right)$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 54)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to 1} \frac{e - e^{\sqrt{1 - \ln x}}}{(x-1)\ln x}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 55)

إذا كان العدد الحقيقي $a<1$

فأثبت بدون استخدام لوبيتال أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} a} \frac{\sin a-\sin x}{\ln(1-x)-\ln(1-a)}=(1-a)\cos a$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 56)

ليكن التابع : $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}}{\ln\left(e^{x}-1\right)}$

عين مجالات استمرار التابع f

ثم ابحث عن نهاية f عند الأطراف المفتوحة لمجالات استمراره

(بدون استخدام لوبيتال)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 57)

بدون استخدام لوبيتال ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\cdot \ln x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 58)

ابحث عن نهاية التابع : $f(x)=\dfrac{\pi-x}{1+\cos x}$

عندما x تسعى إلى π ، ثم عندما x تسعى إلى $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 59)

بدون استخدام لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} (x)^{\tan x}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 60)

بدون استخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi-\cot x}{2x-\pi-\cos x}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 61)

ابحث عن نهاية التابع : $f(x)=\sin x \cdot \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

عندما x تسعى إلى الصفر ثم عندما x تسعى إلى π

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 62)

أثبت بدون لوبيتال أنه أياً كان العدد الحقيقي $a>0$ فإن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a^2} \frac{\ln\left(x+a\sqrt{x}-2a^2\right)}{\ln\left(\sqrt{x}-a\right)}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 63)

ليكن التابع f المستمر على كل من المجالين $]-\infty,0[\,,\,]0,+\infty[$

والمعين وفق : $f(x)=\frac{x\cdot e^x}{x-e^x+1}$

ابحث عن نهاية f عند كل طرف من أطراف مجالات استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 64)

أثبت أن :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{2}{\cos x+1}\right)^{\frac{2}{1-\cos x}}=e$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 65)

احسب قيمة العدد الحقيقي $a>1$

وبدون استخدام لوبيتال إذا كان :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right)}{\sin(x-a)}=1$$

(الجواب : $a=2$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 66)

أثبت بدون استخدام لوبيتال أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x}{x^{\cos x}}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 67)

ابحث بدون لوبيتال عن نهاية التابع : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}-\ln x}{\ln x}$

عندما x تسعى إلى الصفر من اليمين ، ثم عندما x تسعى إلى الواحد

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 68)

جد قيمة العدد الحقيقي $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

وبدون استخدام قاعدة لوبيتال إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin a}}{x-a}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 69)

ابحث عن النهاية الآتية : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\sin x}}{x+e^{\sin x}}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 70)

جـد أصغر قيمة للعدد الطبيعي $n \geq 2$ ليكون :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{2n} - 2x^{n} + x}{x^{n} - x} = \frac{1}{4}$$

(بدون استخدام لوبيتال وبدون تجريب)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 71)

ابحث بدون لوبيتال عن نهاية التابع : $f(x) = \dfrac{\ln \dfrac{e}{x+e}}{x + 1 - e^{x}}$

عندما x تسعى إلى الصفر ثم عندما x تسعى إلى $+\infty$.

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 72)

احسب قيمة العدد الحقيقي $a > 0$

وبدون استخدام لوبيتال إذا كان :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{e^{x} - e^{a} - x + a}{e^{x} - e^{a} + x - a} = \frac{1}{3}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 73)

ابحث عن نهاية التابع : $f(x) = \left(1 - e^{\cos x}\right)\tan x$

عندما تسعى x إلى $\dfrac{\pi}{2}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 74)

احسب القيمة الوحيدة للعدد الطبيعي $a > 1$ إذا كان :

$$\lim_{x \to a} \frac{x \cdot a^{\ln x} - a \cdot x^{\ln a}}{a \cdot e^{x} - x \cdot e^{a}} = e^{\ln^2 a - 2}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 75)

ليكن التابع : $f(x)=\dfrac{e^{\tan x}-e^{\cot x}}{e^{\tan x}+e^{\cot x}}$

المستمر على كل من المجالين $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

ابحث عن نهاية f عندما تسعى x إلى $\frac{\pi}{2}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 76)

ليكن التابع f المعين وفق : $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x\cdot\ln x}$

جد مجالات استمرار التابع f

ثم ابحث عن نهاية f عند أطراف مجالات استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 77)

احسب قيمة العدد الحقيقي a إذا كان :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{\sin x}{x}}+a\cdot e^{\frac{\cos x}{x}}\right)=2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 78)

ليكن التابع f المعين وفق : $f(x)=e^{\cos x-1}-x$

ابحث عن نهاية f عندما تسعى x إلى $+\infty$ وعندما تسعى x إلى $-\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 79)

أثبت أنه أياً كان العدد الحقيقي $a>0$ وبدون استخدام لوبيتال تكون :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-a}-\sqrt{x^2-2a}}{\sqrt{x^2-3a}-\sqrt{x^2-4a}}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 80)

جـد العدد الحقيقي $a>0$ وبدون استخدام لوبيتال إذا كان :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} e^a} \frac{x-e^a}{\ln(x-1)-\ln\left(e^a-1\right)}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 81)

أثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي $a\neq 0$ فإن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin x^a}{\sin^a x-\sin x^a}\left[\ln\left(\sin^a x\right)-\ln\left(\sin x^a\right)\right]=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 82)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\, e^{\sin(\ln x)}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 83)

ليكن التابع : $f(x)=\dfrac{\ln\left(\sqrt{2}\cos x\right)}{\ln(\tan x)}$

المستمر على كل من المجالين $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\,,\,\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

ابحث عن نهايته عند أطراف مجالات استمراره

(بدون استخدام لوبيتال)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 84)

بدون لوبيتال أثبت أن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cdot e^x-\sin x\cdot e^{\sin x}}{x\cdot \sin x}=0$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 85)

ابحث بحسب قيم العدد الحقيقي $a \neq 0$ عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{a\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 86)

جـد القيمة الشهيرة للزاوية $\theta \in]0,\pi[$ وبدون لوبيتال إذا كان :

$$\lim_{x \to \theta} \frac{\cos^3 x - \cos^3 \theta}{\theta - x} = \frac{9}{8}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 87)

أثبت أن : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - e^{\cos x}}{e^x - \cos x} = 0$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 88)

ليكن التابع f المستمر على المجال $]0,+\infty[$

والمعين وفق : $f(x) = x \cdot \ln(x - \sin x)$

ابحث عن نهاية f عند كل طرف من طرفي مجال استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 89)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{\sin x} - e^{\sqrt{\sin x}}}{e^x - e^{\sqrt{x}}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 90)

جد قيمة العدد الحقيقي $a>0$ إذا كان :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x+\ln a}-e^{-x+\ln a}}{\ln(x+1)}=2e$$

(بدون استخدام لوبيتال والجواب : $a=e$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 91)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x-\sin x)}{\ln(\cos x)-\ln(\sin x)}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 92)

ليكن التابع f المستمر على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{x^{\sin x}}{e^x}$

ابحث عن نهاية f عند كل طرف من طرفي مجال استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 93)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{|\cos x|}-x}{x}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 94)

احسب قيم العدد الحقيقي $a\neq 0$ لتكون :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^x-e^{\frac{\pi}{2}}}{\sin\left(ax-\frac{a\pi}{2}\right)}=a\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 95)

جـد قيمة العدد الحقيقي $a \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

وبدون استخدام لوبيتال أو العدد المشتق إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\ln(x-1) - \ln(a-1)}{\sin x - \sin a} = \frac{2}{1-a}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 96)

ليكن f التابع المعرف والمستمر على المجال $]0, +\infty[$

والمعين وفق : $f(x) = \left(e^{\sin x} - e^{x}\right)\ln x$

ابحث عن نهاية f عند كل طرف من طرفي مجال استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 97)

جـد قيمة العدد الحقيقي $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ وبدون أوبيتال إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow \sin\theta} \left(\frac{(\sin\theta)^{\sin\theta} - (\sin\theta)^{x}}{(\sin\theta)^{\sin\theta} \cdot x - (\sin\theta)^{1+\sin\theta}} \right) = \ln 2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 98)

بدون لوبيتال ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cot^2 x - \tan^2 x}{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 99)

ليكن التابع f المعرف والمستمر على كل من المجالين $]-\infty,0[\,,\,]1,+\infty[$

وفق : $f(x)=\frac{1}{x}\cdot a^{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\;;\;a\in R_+^*\setminus\{1\}$

ابحث عن نهاية f عند كل طرف من أطراف مجالات استمراره

في كل حالة من الحالتين : $1)\;a=\frac{1}{e}\;\;,\;\;2)\;a=e$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 100)

ليكن f تابعاً كسرياً معرفاً على $R\setminus\{1\}$

وفق : $f(x)=\frac{x^3-(bx-1)^3}{(x-1)^a}$

احسب a و b الحقيقيين ليكون $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 101)

بدون استخدام لوبيتال ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{a+1}}{\sqrt[3]{x-a}}\;;\;a\in R\setminus\{-1\}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 102)

ليكن التابع : $f(x)=\ln\left(e^x-e^{\sin x}\right)$

ابحث عن نهاية f عندما تسعى x إلى $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 103)

بفرض العدد الحقيقي $a \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ أثبت أن :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{a^{x} - a^{a}}{a^{a} \cdot x - a^{a+1}} \right) = \ln a$$

1) باستخدام قاعدة لوبيتال .

2) بالإعتماد على تعريف العدد المشتق .

3) بطريقة مختلفة عما سبق .

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 104)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{x-1}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 105)

ابحث عن نهاية التابع : $f(x) = (x-2) \dfrac{\ln\left(e^{x-1} - e\right)}{\ln\left(e^{x-2} - 1\right)}$

عندما تسعى x إلى (2) من اليمين – بقيم أكبر –

وعندما تسعى x إلى ($2 + \ln 2$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 106)

جد قيمة العدد الحقيقي $(a > 0)$ ليكون :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x - \ln a}{x} \right)^{x} = a^{2} - 2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 107)

ابحث بدون استخدام لوبيتال عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\ln x)}{x-1}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 108)

ليكن التابع العددي f المعين وفق :

$$f(x)=\frac{\sqrt{e^{x}-1}-\sqrt{e-x}}{e^{x}-e}$$

جد مجالات استمرار التابع f

ثم ابحث عن نهاية f عند أطراف مجالات استمراره

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 109)

ليكن التابع : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\ln|x|$

ابحث عن نهاية f عندما تسعى x إلى الصفر

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 110)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to \pi} (1+\tan x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 111)

ليكن التابع : $f(x)=\frac{\cot x+\tan x}{\cot x-\tan x}$

عين مجموعة تعريف f المحتواة في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

ثم ابحث عن نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه .

(بدون استخدام لوبيتال)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 112)

أثبت أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^{x \cdot \cos(\ln x)} = 1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 113)

إذا كان : $\lim_{t \to e} \dfrac{x - t^{\ln x}}{t - e} = \dfrac{1}{e^2}$

فأثبت وجود قيمة وحيدة لـ $x \in R_+^*$ يطلب إيجادها

(بدون استخدام لوبيتال في حساب النهاية)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 114)

جد قيم العدد الحقيقي $\theta \in]0, \pi[$

حتى تتحقق المساواة الآتية :

$$\lim_{x \to \theta} \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\theta - x} = 2\cos 4\theta$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 115)

ابحث عن نهاية التابع : $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{1 - e^x - \sin x}$

عندما x تسعى إلى الصفر

ثم عندما x تسعى إلى $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 116)

ادرس نهاية كل تابع مما يأتي عند الواحد

مبيناً وجود أو عدم وجود النهاية

$$f(x)=\begin{cases} |x-1| & : x\neq 1 \\ 1 & : x=1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} |1-x| & : x\neq 1 \\ 0 & : x=1 \end{cases}$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 117)

ليكن التابع العددي : $f(x)=\dfrac{x-1-\ln x}{x-1+\ln x}$

ابحث بدون لوبيتال عن نهاية التابع f عندما :

1) x تسعى إلى الصفر من اليمين .

2) x تسعى إلى الواحد . 3) x تسعى إلى $+\infty$.

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 118)

جد قيم العدد الحقيقي $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ إذا كان :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin 4x-\sin 4a}{(x-a)\sin 2a}=4$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 119)

ليكن التابع العددي : $f(x)=\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln(x-1)}$

ابحث بدون لوبيتال عن نهاية التابع f عندما :

1) x تسعى إلى الواحد ، 2) x تسعى إلى $+\infty$.

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 120)

ليكن التابع f المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x} & : x>1 \\ \dfrac{x}{a-x} & : x<1 \\ b & : x=1 \end{cases}$$

جـد العددين الحقيقيين a و b ليكون للتابع f

نهاية حقيقية عند الواحد

(الجواب : $a=2\ ,b=1$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 121)

ليكن التابع f المعرف على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{e}\cos 2x}{e^{\sin^2 x}-e^{\cos^2 x}} & : x\neq\dfrac{\pi}{4} \\ 1 & : x=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

ادرس نهاية التابع f عند $x=\frac{\pi}{4}$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 122)

أثبت أن :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2\cot x}=1$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 123)

ليكن التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a+E(x)}{x+1} & : 0\le x<1 \\ \dfrac{b+x}{E(x)} & : 1\le x<2 \\ E(x) & : x=2 \end{cases}$$

حيث $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد x

جـد العددين الحقيقيين a و b ليكون للتابع f

نهاية حقيقية عند كل من 1 و 2

(الجواب : $a=2\ ,b=0$)

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 124)

أثبت وبالتفصيل أن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sin x-x}=-2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 125)

أثبت بدون لوبيتال أنه أياً كان العدد الحقيقي $a>0$ فإن :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{\ln\left(x^3-ax^2-a^2x+a^3\right)}{\ln(x-a)}=2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 126)

ابحث عن النهاية الآتية :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x-e^{x\cdot\ln x}\right)$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 127)

جـد العدد الحقيقي $a \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ إذا كان :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{x^{\ln x} - a^{\ln a}}{(x-a)\ln x} = 2$$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 128)

ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \ln \frac{E(x)}{x-1}$$

حيث $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد x

ادرس نهاية التابع f عند $x=2$ ثم في جوار $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 129)

ليكن التابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

ابحث عن نهاية التابع عند كل من الصفر و $-\infty$ و $+\infty$

(سلسلة النهايات المميزة – تمرين 130)

ليكن f تابعاً كسرياً معيناً

وفق : $f(x) = \dfrac{a x^2 - (x-1)^2}{x^n - 1}$

جـد بالتفصيل قيم العددين الحقيقيين n و a

ليكون $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 2$

(الجواب : $n = a = 1$ أو $n = 2, a = 3$)