Основы теории управления

Лекции по курсу

Часть 1

Обнинский Государственный Технический Университет
Атомной Энергетики

Литература

- Бесекерский В.А., Попов Е.П. *Теория систем автоматического управления.* — СПб.: Изд-во «Профессия», 2003
- Попов Е.П. *Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.* — М.: Наука, 1978
- Трофимов А.И., Егупов Н.Д., Слекеничс Я.В. *Принципы построения автоматических регуляторов теплоэнергетических процессов АЭС.* — М.: Энергоатомиздат, 1999

Основные понятия

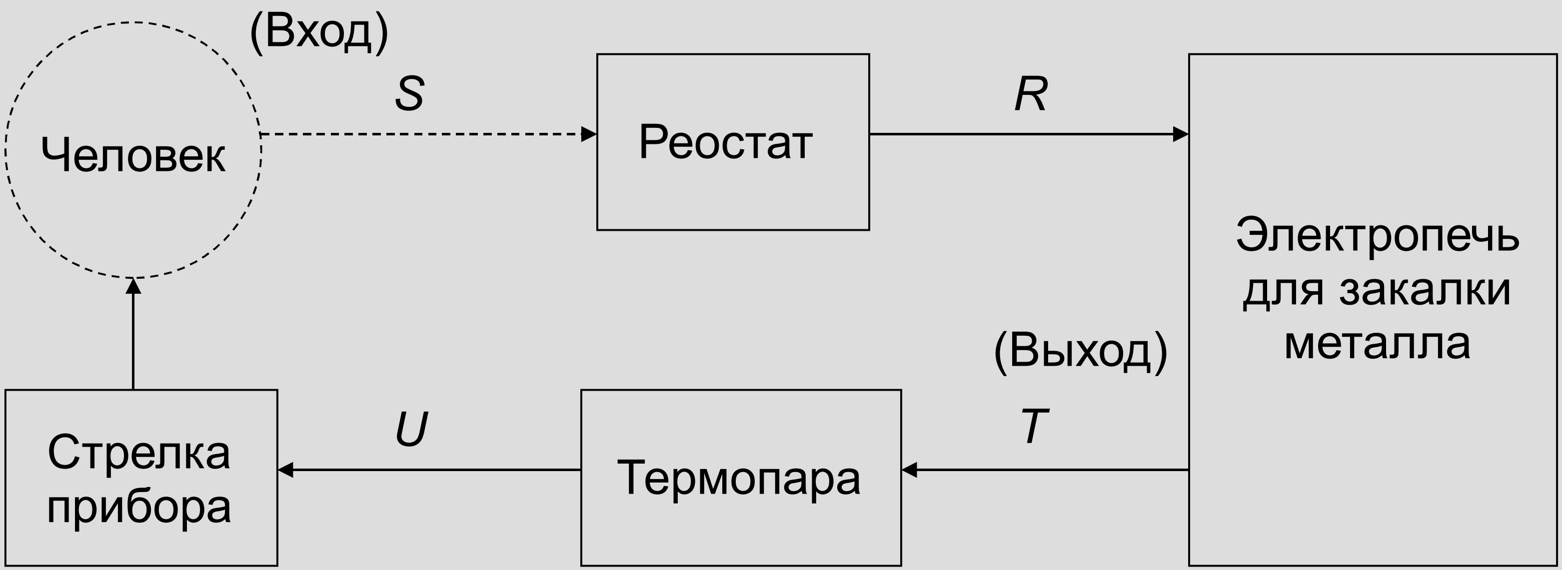
- Управление — совокупность действий, обеспечивающих протекание процесса с целью достижения требуемых результатов.
- Системы автоматического управления (САУ)
- Автоматизированные системы управления (АСУП и АСУТП)
- САУ состоит из объекта управления и автоматического управляющего устройства (регулятора)

Основные задачи САУ

- Обеспечение изменения выходной величины системы в соответствии со входной величиной с требуемой точностью (управление)
- Поддержание заданного значения входной величины при наличии внешних возмущений (регулирование)

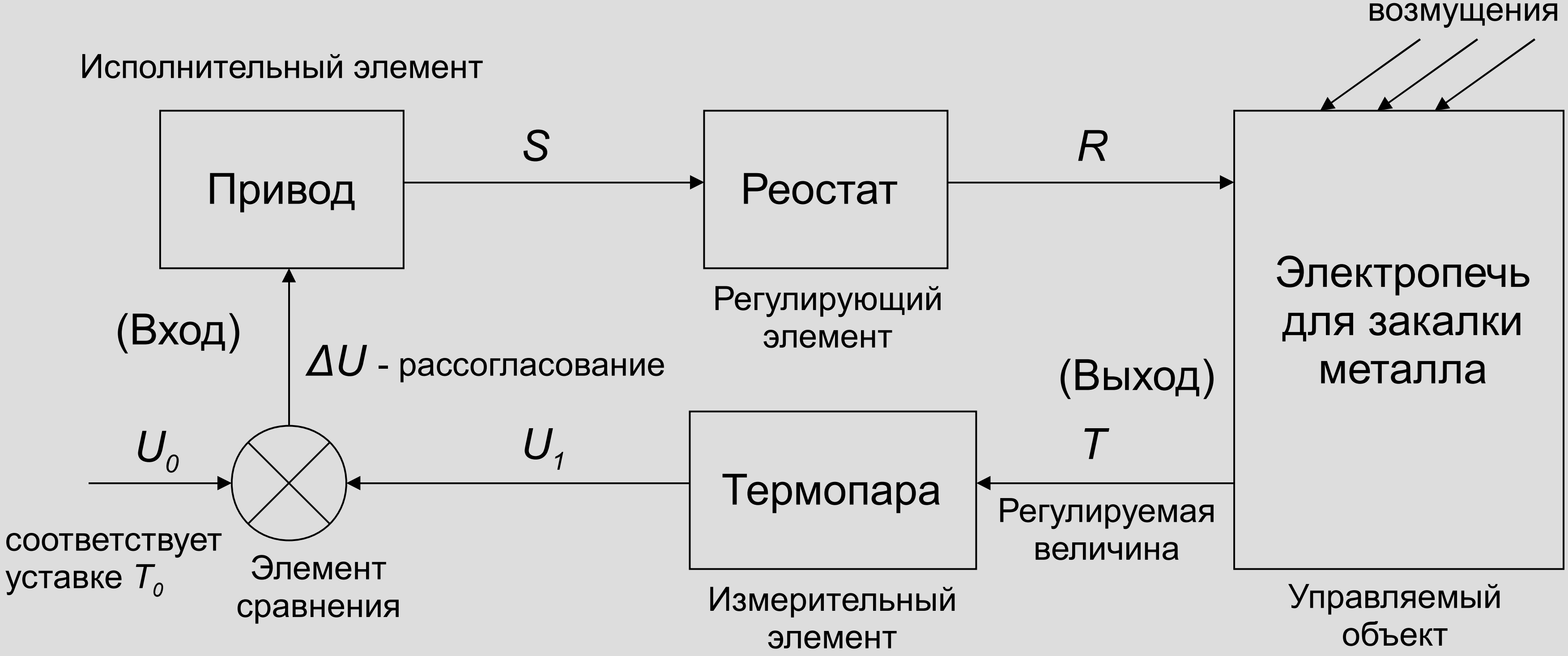
Пример

- Система регулирования температуры в электропечи с ручным управлением



Пример

- Система автоматического регулирования температуры в электропечи



Типовые функциональные элементы САУ

- Чувствительные (измерительные) элементы
- Элементы сравнения
- Усилительные элементы
- Исполнительные элементы
- Регулирующие элементы объекта управления
- Корректирующие элементы

Классификация САУ

- По виду цикла управления:
  - разомкнутые
  - замкнутые
- По характеру изменения регулируемого параметра:
  - стабилизирующие
  - программные
  - следящие
  - адаптивные (экстремальные и самонастраивающиеся)

Классификация САУ

- По характеру внутренних динамических процессов:
  - линейные и нелинейные
  - непрерывного, дискретного (импульсные и цифровые) и релейного действия
- По принципу управления:
  - по отклонению регулируемого параметра
  - по возмущению
  - комбинированные

Математическое описание САУ

- Для линейных САУ справедлив принцип суперпозиции
- Элементы САУ, различные по физической природе и конструктивному исполнению, могут обладать одинаковыми динамическими свойствами
- Для описания САУ вводится понятие динамического звена системы
- Звено обладает свойством направленности действия

Уравнение динамики

- Пример: электрический четырехполюсник (LRC-цепь)
- Уравнение динамики:

$$CL\frac{d^2U_C(t)}{dt^2}+RC\frac{dU_C(t)}{dt}+U_C(t)=U_{вх}$$

$$T_2^2y''(t)+T_1y'(t)+y(t)=kx(t)$$

- Как определить передаточный коэффициент?

$$K=\frac{y(t)}{x(t)}$$

Преобразование Лапласа

- Пусть есть исходная функция (оригинал)

$$f(t): f(t)=0\, при\, t<0$$

- Изображение (прямое одностороннее преобразование Лапласа):

$$F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

  - p — оператор комплексного переменного (комплексная частота) $p=\sigma+j\omega$
- Краткое обозначение: $F(p)=L[f(t)]$

Таблица соответствия

Оригинал *f(t)*	Изображение *F(p)*
$\alpha f(t)$	$\alpha F(p)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(p) \pm F_2(p)$
$\dfrac{d^n[f(t)]}{dt^n}$	$p^n F(p)$
$\int f(t)\,dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$

Уравнение динамики в пространстве Лапласа

- Исходное уравнение:

$$T_2^2 y''(t) + T_1 y'(t) + y(t) = kx(t)$$

- Уравнение динамики после преобразования Лапласа:

$$T_2^2 p^2 Y(p) + T_1 p Y(p) + Y(p) = kX(p)$$

$$Y(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} X(p)$$

Передаточная функция

- Уравнение для линейной САУ в общем случае:

$$C_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + C_1 \frac{dy(t)}{dt} + C_2 y(t) = b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t)$$

$$(C_0 p^2 + C_1 p + C_2) Y(p) = (b_0 p + b_1) X(p)$$

- Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \ldots + C_n} = \frac{E(p)}{D(p)}, \quad n \geqslant m$$

Возвращение в исходное пространство

- Обратное преобразование Лапласа:

$$f(t)=L^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(p)e^{pt}\,dp$$

- Использование таблиц соответствия
- Разложение функции изображения на простые дроби (напр., с помощью метода неопределенных коэффициентов)

Временные характеристики САУ

- Переходная функция *h(t)* — реакция системы на единичный ступенчатый сигнал

$$1(t)=\begin{cases}1, t>0\\ 0, t\leqslant 0\end{cases}$$

- Импульсная переходная функция *w(t)* — реакция системы на единичный импульс

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, t=0\\ 0, t\neq 0\end{cases} \qquad w(t)=\frac{d}{dt}h(t)$$

Частотные характеристики САУ

- Входной сигнал:

$$x_{вх}=x_1 e^{j\omega t} \qquad e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$$

- Выходной сигнал (после окончания переходного процесса):

$$x_{вых}=x_2 e^{j(\omega t+\theta)}=x_2 e^{j\omega t} e^{j\theta}$$

- Комплексная частотная функция (комплексный коэффициент усиления):

$$K=\frac{x_{вых}}{x_{вх}}=\frac{x_2}{x_1}e^{j\theta} \qquad K=W(p)_{p=j\omega}=\frac{E(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Частотные характеристики САУ

- Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ):

$$W(j\omega)=R(\omega)+jJ(\omega) \qquad W(j\omega)=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

- Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$A(\omega)=|W(j\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+J^2(\omega)}$$

- Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\theta(\omega)=arg(W(j\omega))=arctg\frac{J(\omega)}{R(\omega)}$$

Логарифмические частотные характеристики

$$\ln W(j\omega)=\ln A(\omega)e^{j\theta(\omega)}=\ln A(\omega)+j\theta(\omega)$$

- Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ):

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)$$

- Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)
- Значения частоты указываются в октавах и декадах (1 декада = 3,32 октавы)

Типовые динамические звенья САУ

- Классификация звеньев по виду статической характеристики в установившемся режиме:
  - позиционного (статического) типа

$$x_2 = kx_1$$

  - интегрирующего типа

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1 \quad x_2 = k\int x_1\,dt$$

  - дифференцирующего типа

$$x_2 = k\frac{dx_1}{dt}$$

Типовые динамические звенья САУ

- Позиционные:
  - Безынерционное (усилительное)
  - Апериодическое 1-го порядка (инерционное)
  - Апериодическое 2-го порядка
  - Колебательное
  - Консервативное
- Интегрирующие:
  - Идеальное интегрирующее
  - Интегрирующее с замедлением
  - Изодромное
- Дифференцирующие:
  - Идеальное дифференцирующее
  - Дифференцирующее с замедлением

Безынерционное звено

$$x_2 = kx_1$$

$$W(p) = W(j\omega) = k$$

- Примеры: рычаг, механический редуктор, широкополосный усилитель, делитель напряжения
- Временные характеристики:

$$h(t) = k\,1(t) \qquad w(t) = k\,\delta(t)$$

- Частотные характеристики:

$$A(\omega) = k \qquad \theta(\omega) = 0 \qquad L(\omega) = 20\lg k$$

Апериодическое звено 1-го порядка

$$T\frac{dx_2}{dt}+x_2=kx_1$$

$$W(p)=\frac{k}{1+Tp}$$

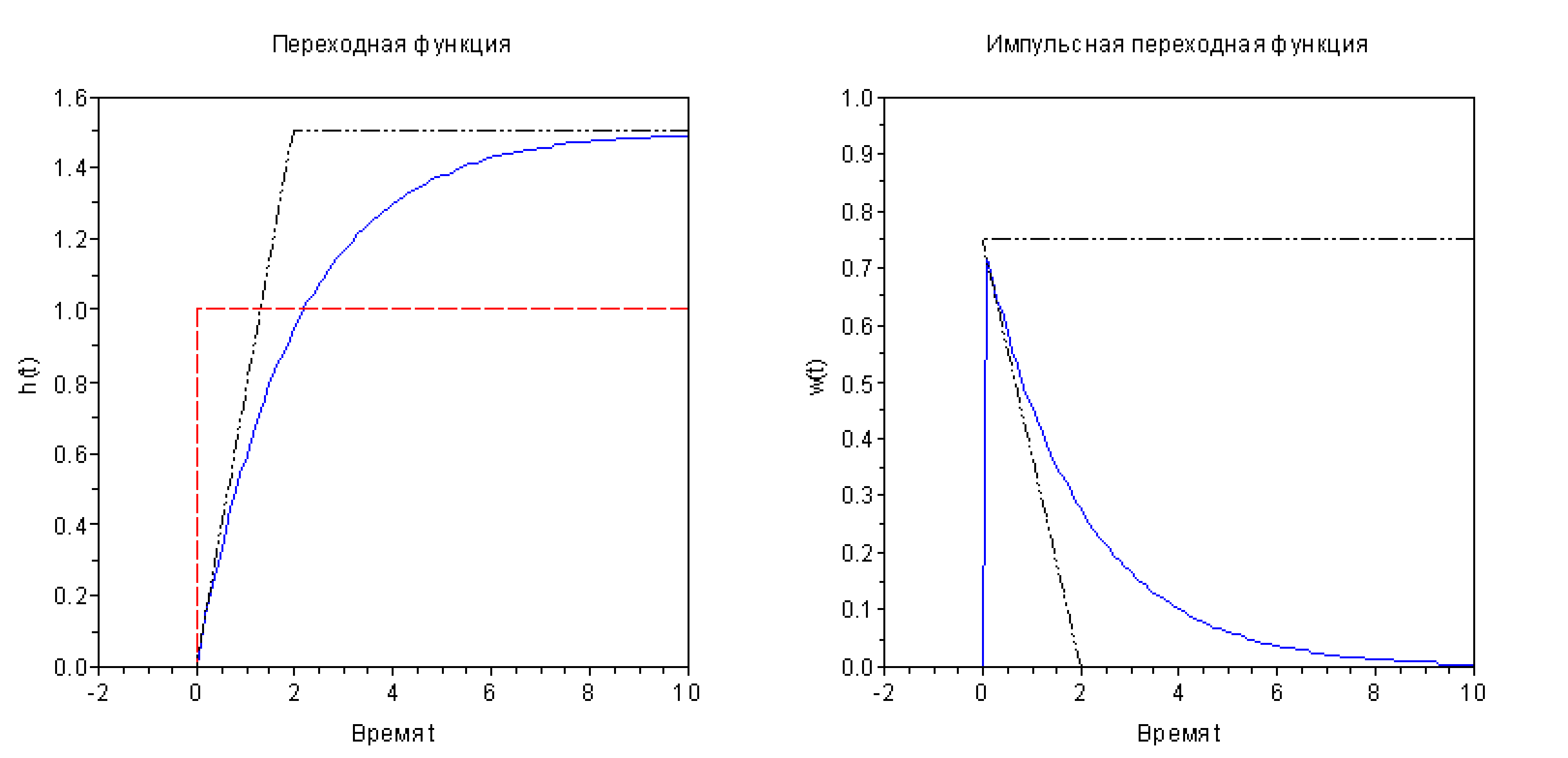
- Примеры: двигатель любого типа с механическими характеристиками в виде параллельных прямых, электрический генератор постоянного тока, RC- и LR-цепи

Апериодическое звено 1-го порядка

- Временные характеристики

$$h(t)=k(1-e^{-t/T})$$

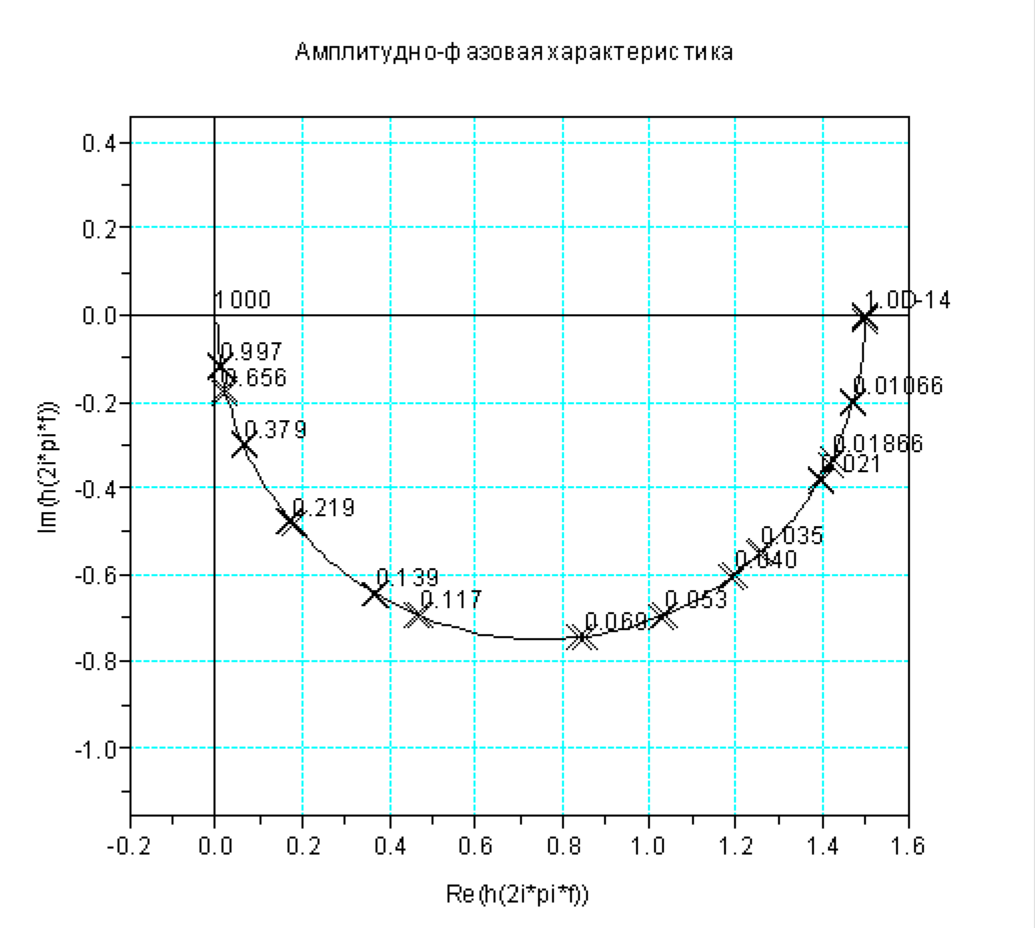
$$w(t)=\frac{k}{T}e^{-t/T}$$



Апериодическое звено 1-го порядка

- Амплитудно-фазовая характеристика

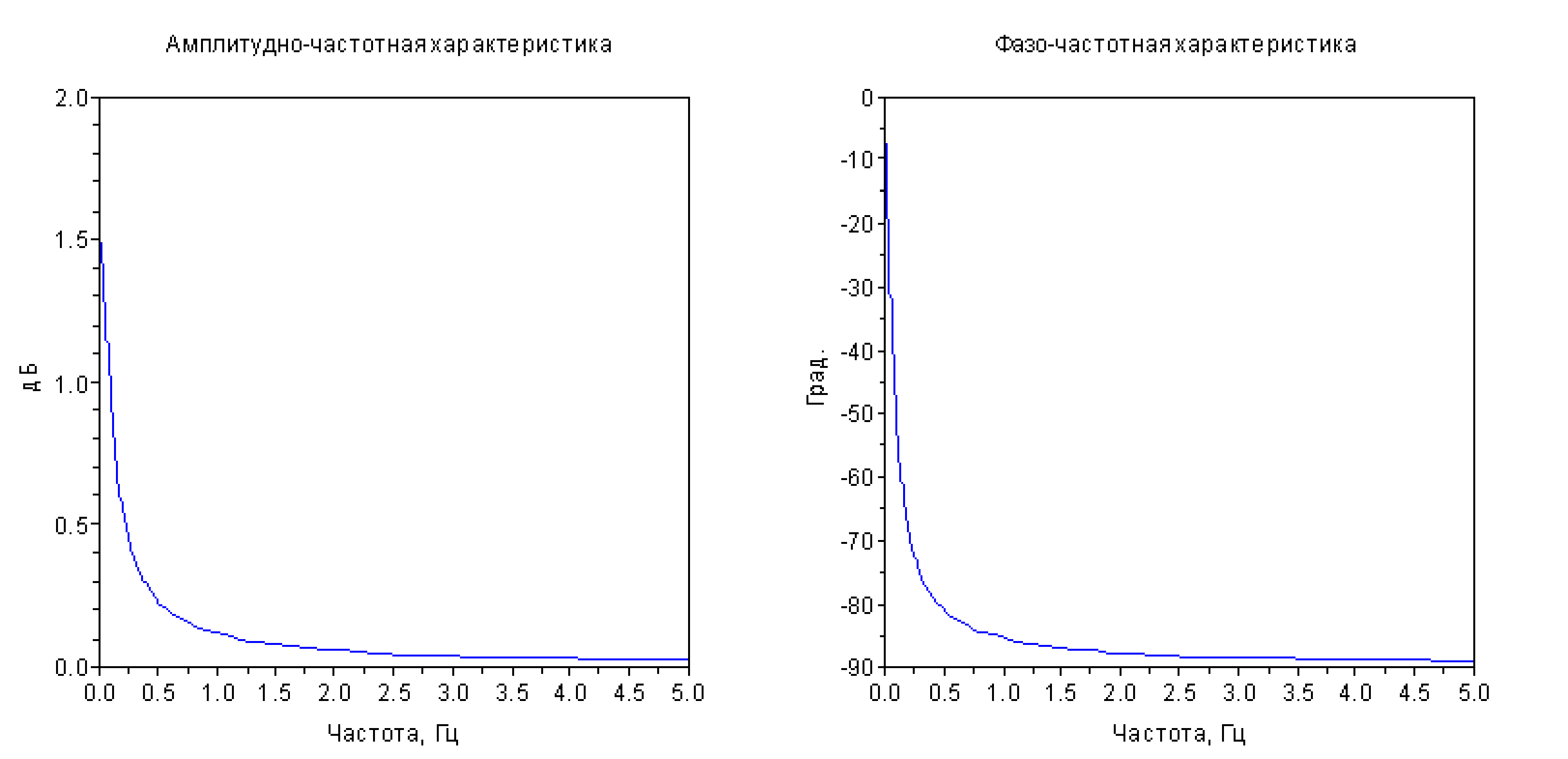
$$W(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}$$



Апериодическое звено 1-го порядка

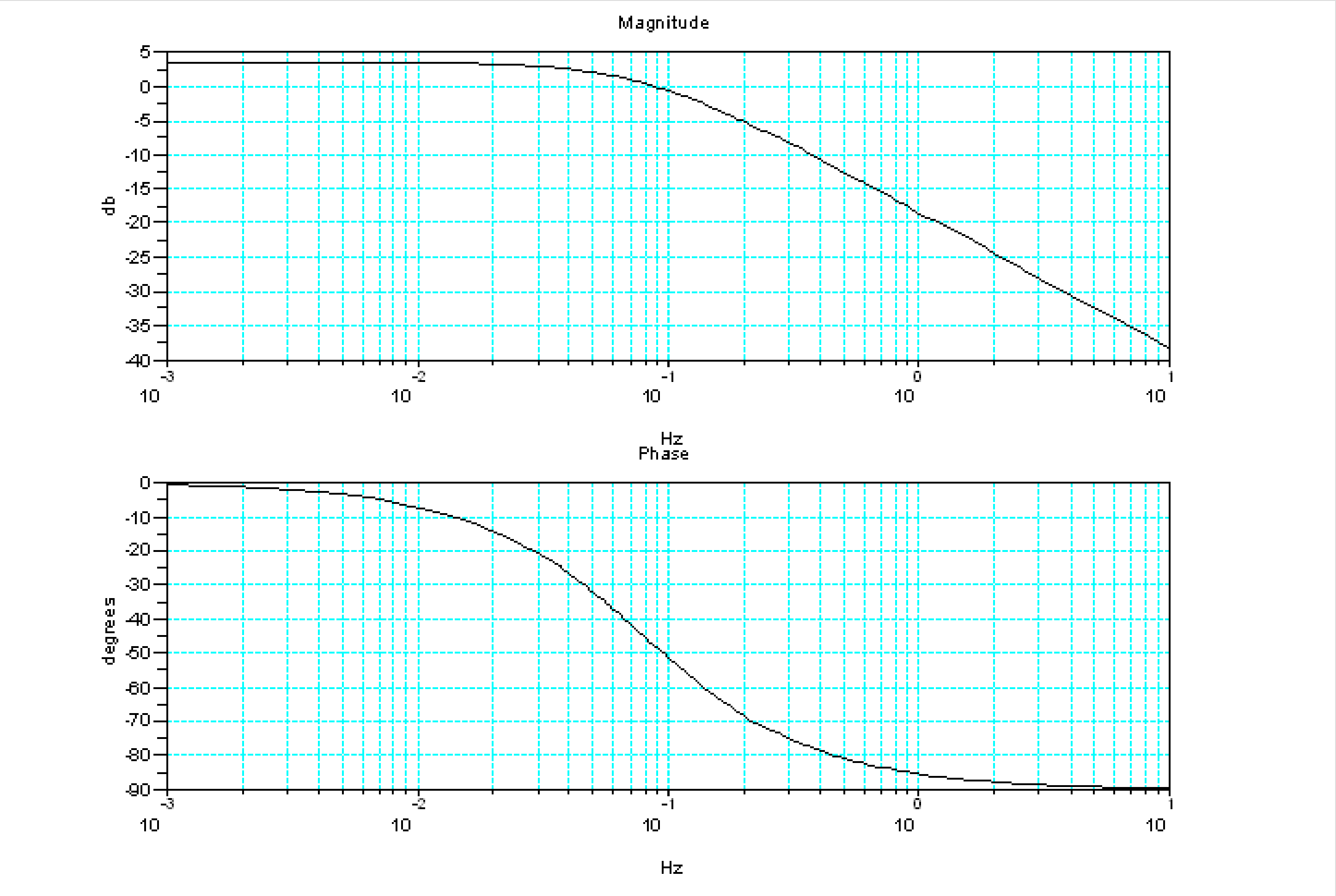
- АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \qquad \theta(\omega)=-arctg\,\omega T$$



Апериодическое звено 1-го порядка

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Апериодическое звено 2-го порядка

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1$$

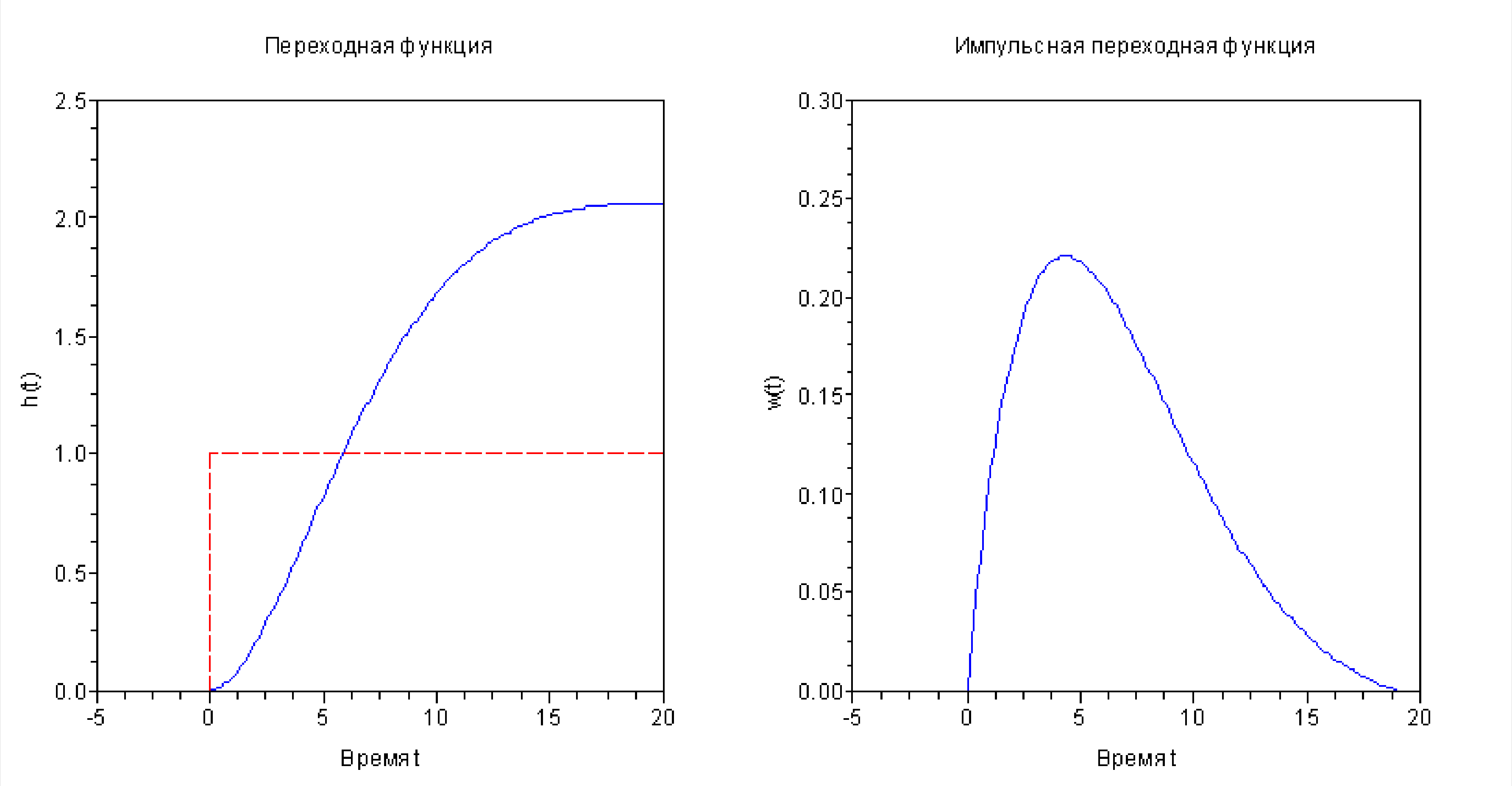
$$W(p) = \frac{k}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2} = \frac{k}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}$$

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2} \qquad T_1 \geqslant 2\mathrm{T}_2 ;\, T_3 > T_4$$

- Пример: двигатель постоянного тока

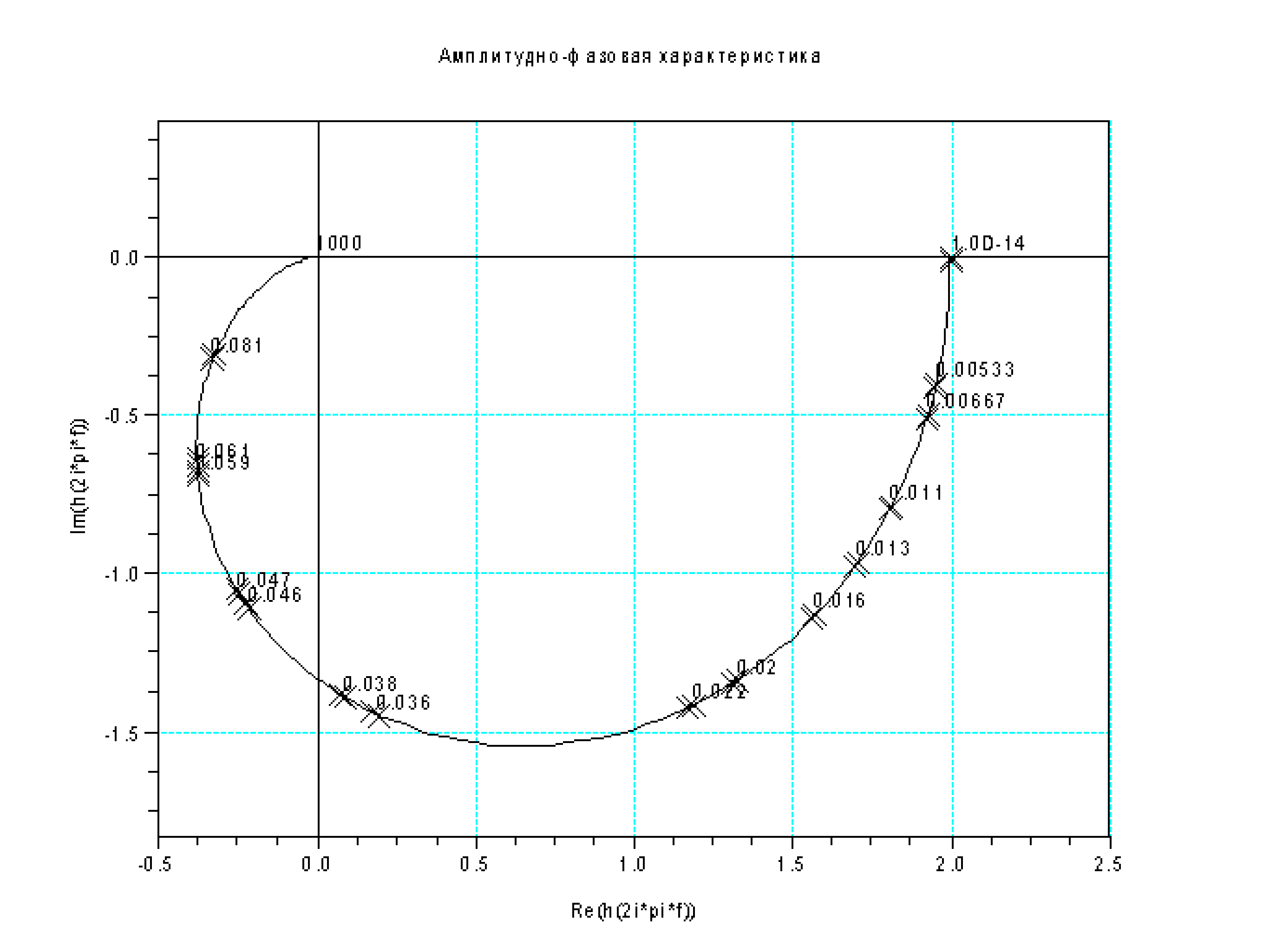
Апериодическое звено 2-го порядка

- Временные характеристики



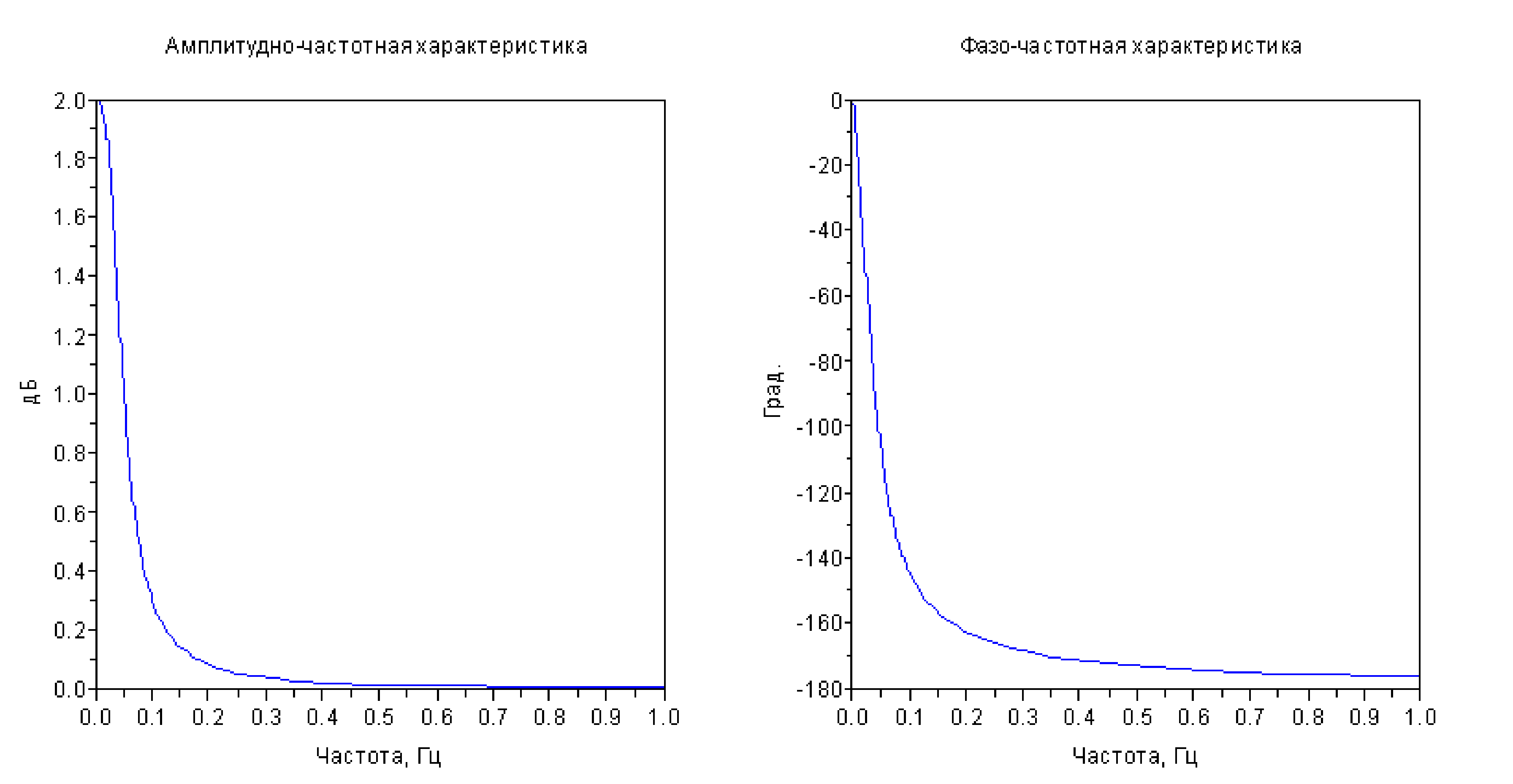
Апериодическое звено 2-го порядка

- Амплитудно-фазовая характеристика



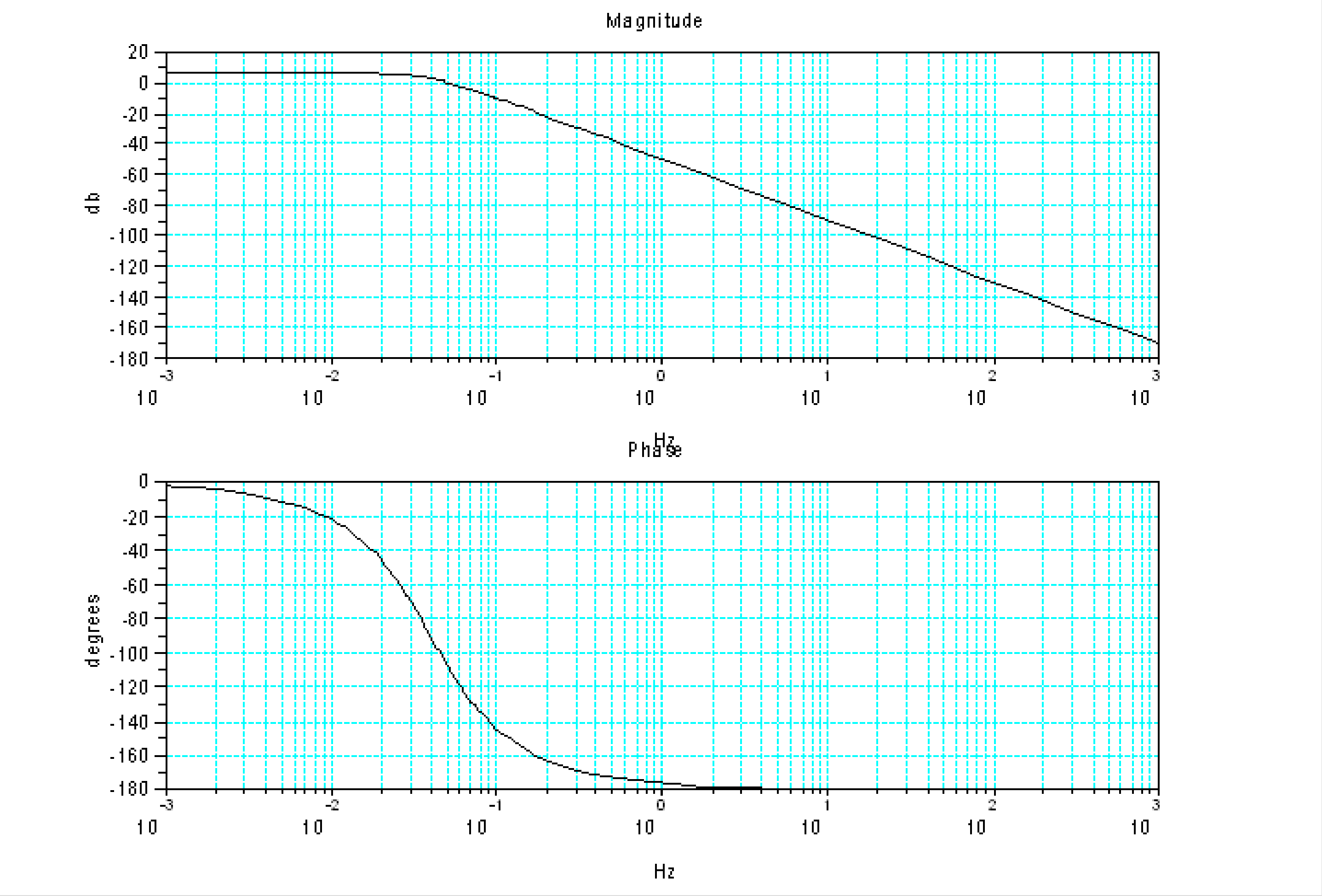
Апериодическое звено 2-го порядка

- АЧХ и ФЧХ



Апериодическое звено 2-го порядка

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Колебательное звено

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1 \qquad T_1 < 2\mathrm{T}_2$$

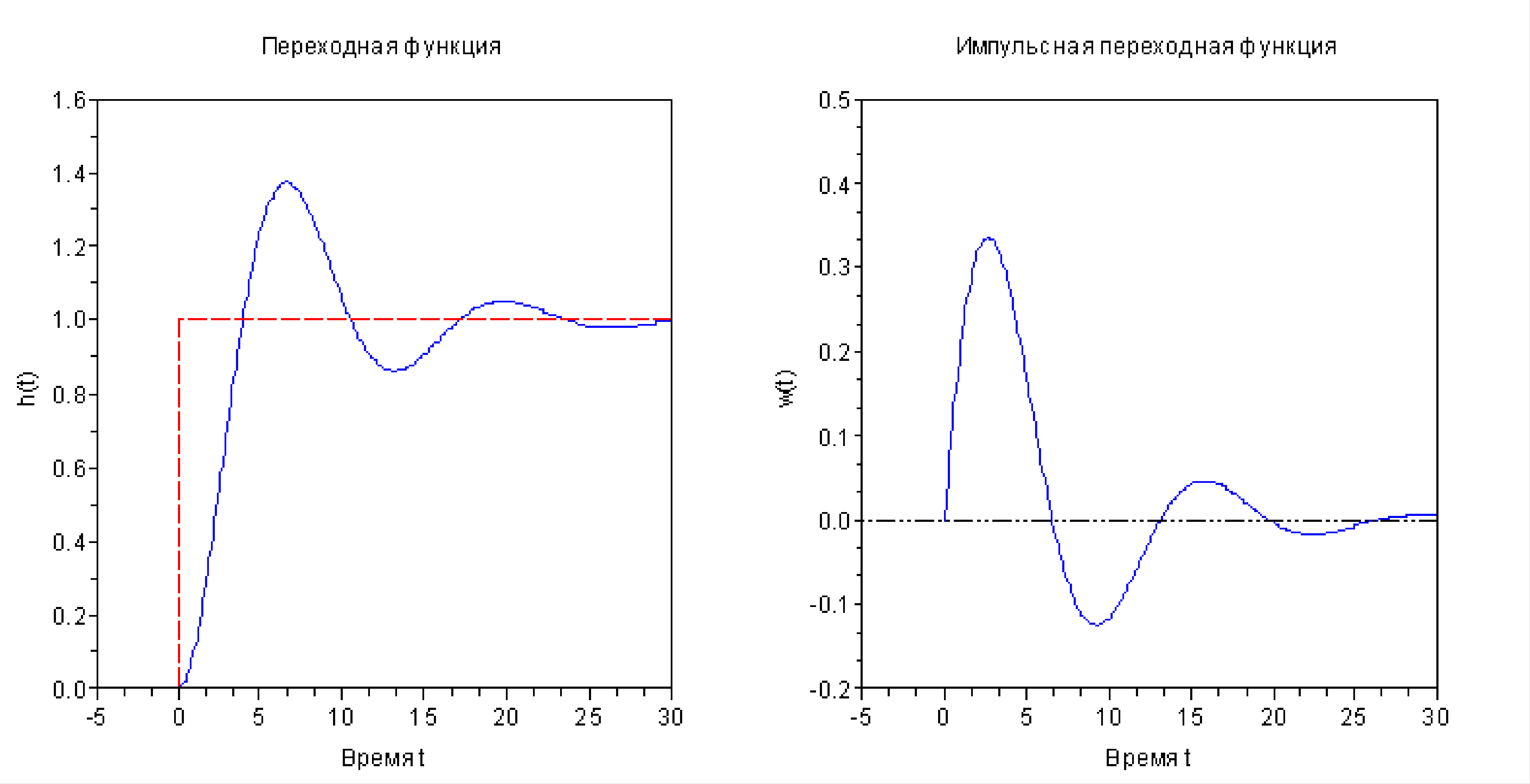
$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta p}{q} + \frac{p^2}{q^2}}$$

$$q = \frac{1}{T}, 0 < \zeta < 1$$

- Пример: колебательные RLC-цепи, двигатель постоянного тока (при определенных условиях)

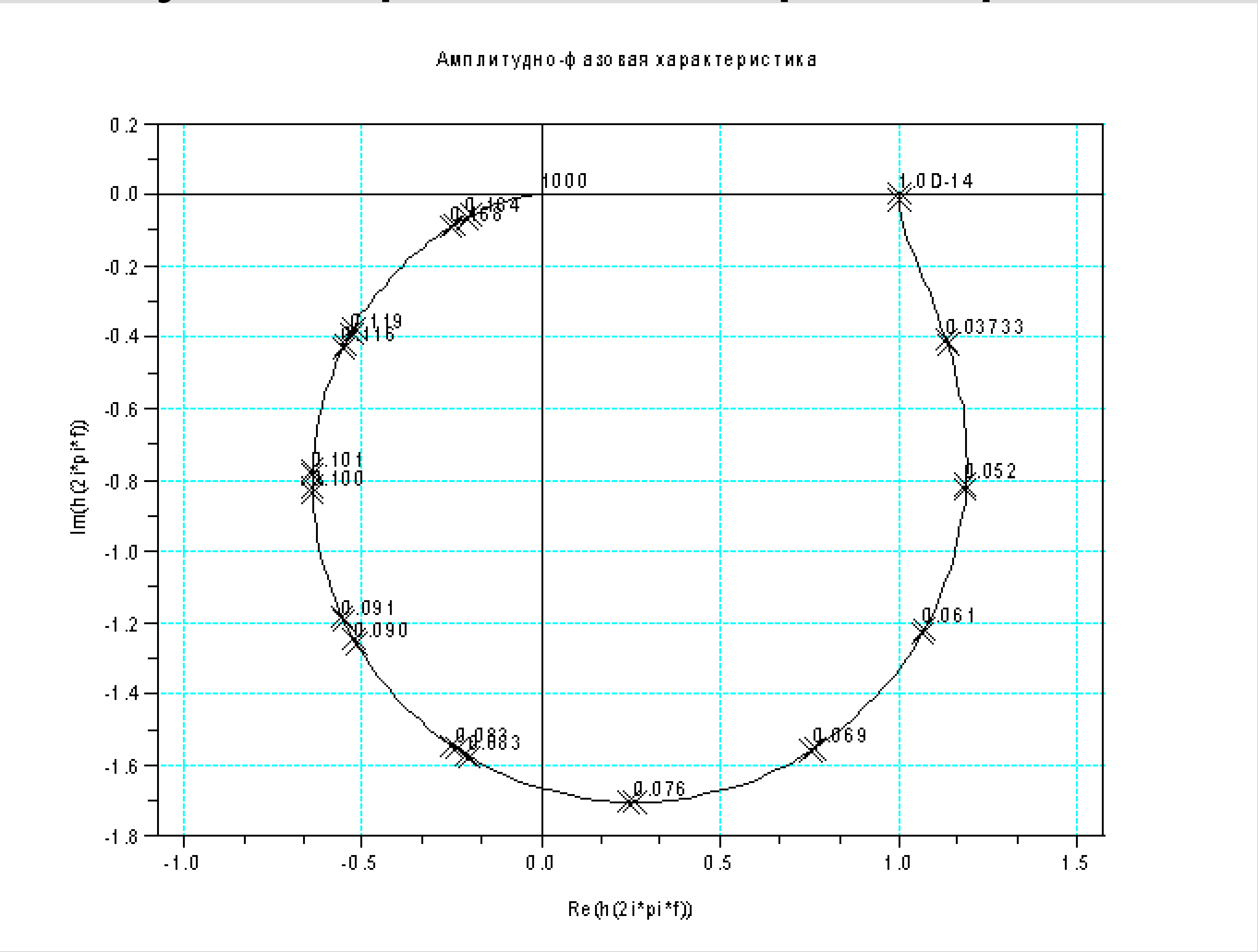
Колебательное звено

- Временные характеристики



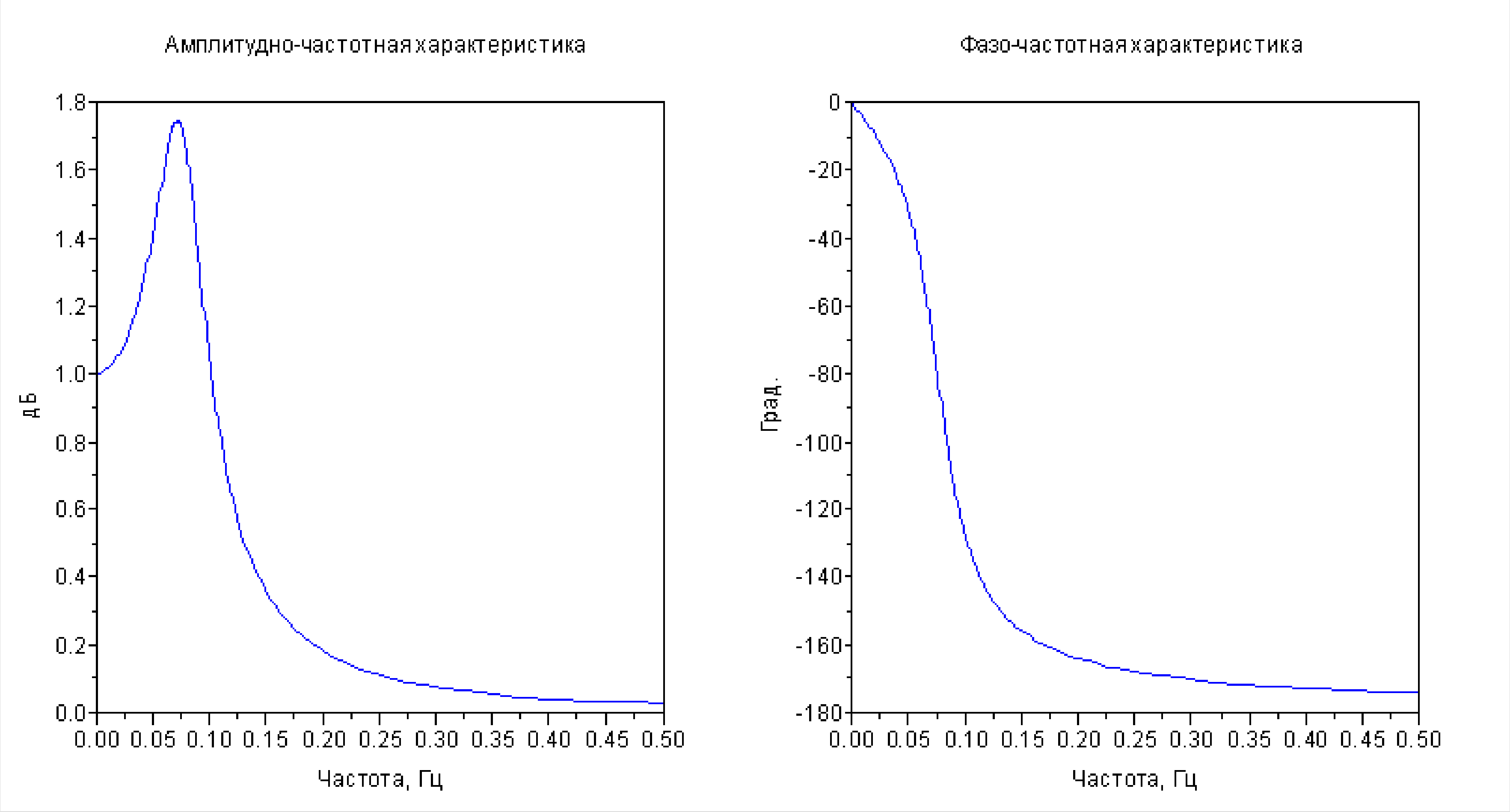
Колебательное звено

- Амплитудно-фазовая характеристика



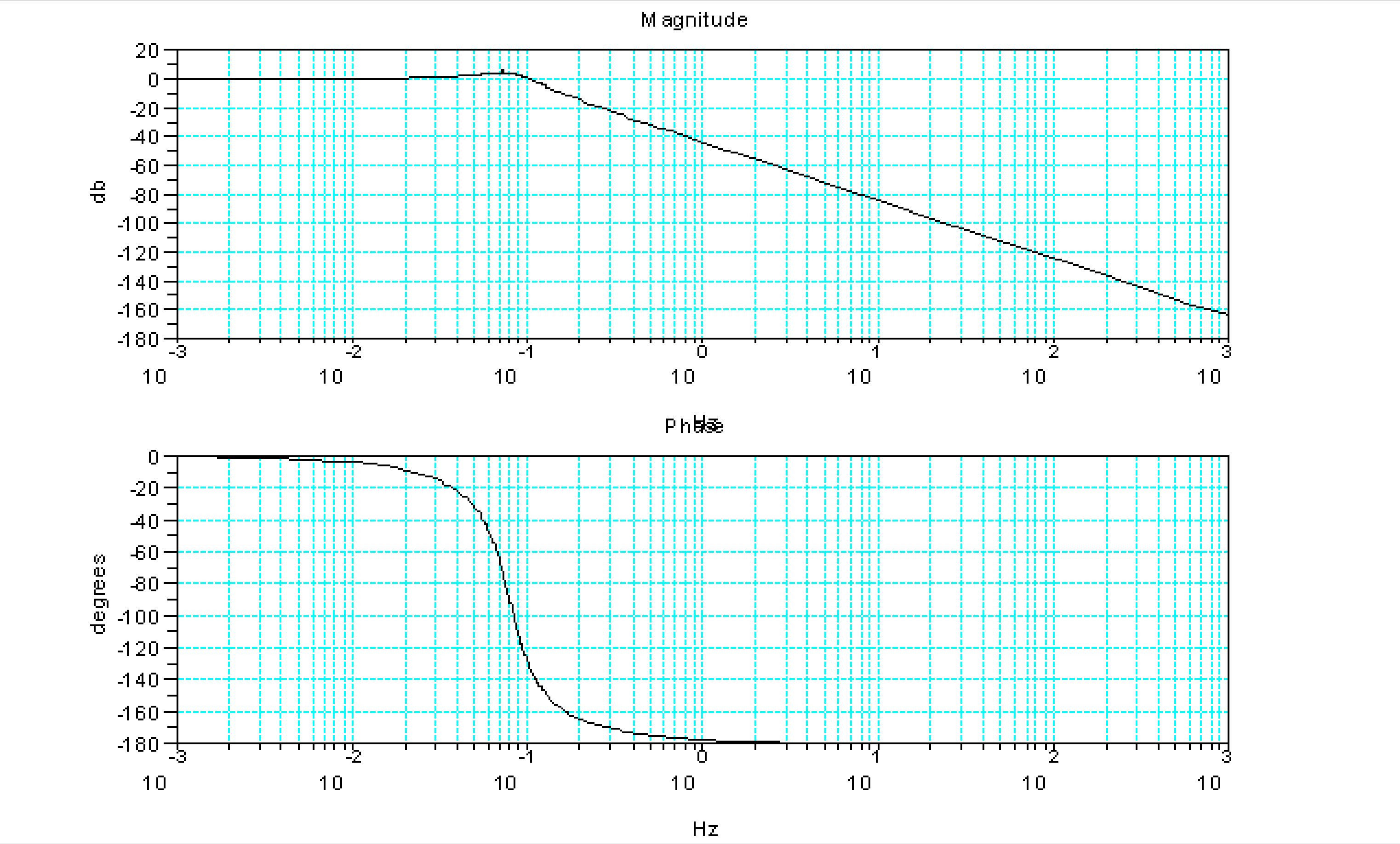
Колебательное звено

- АЧХ и ФЧХ



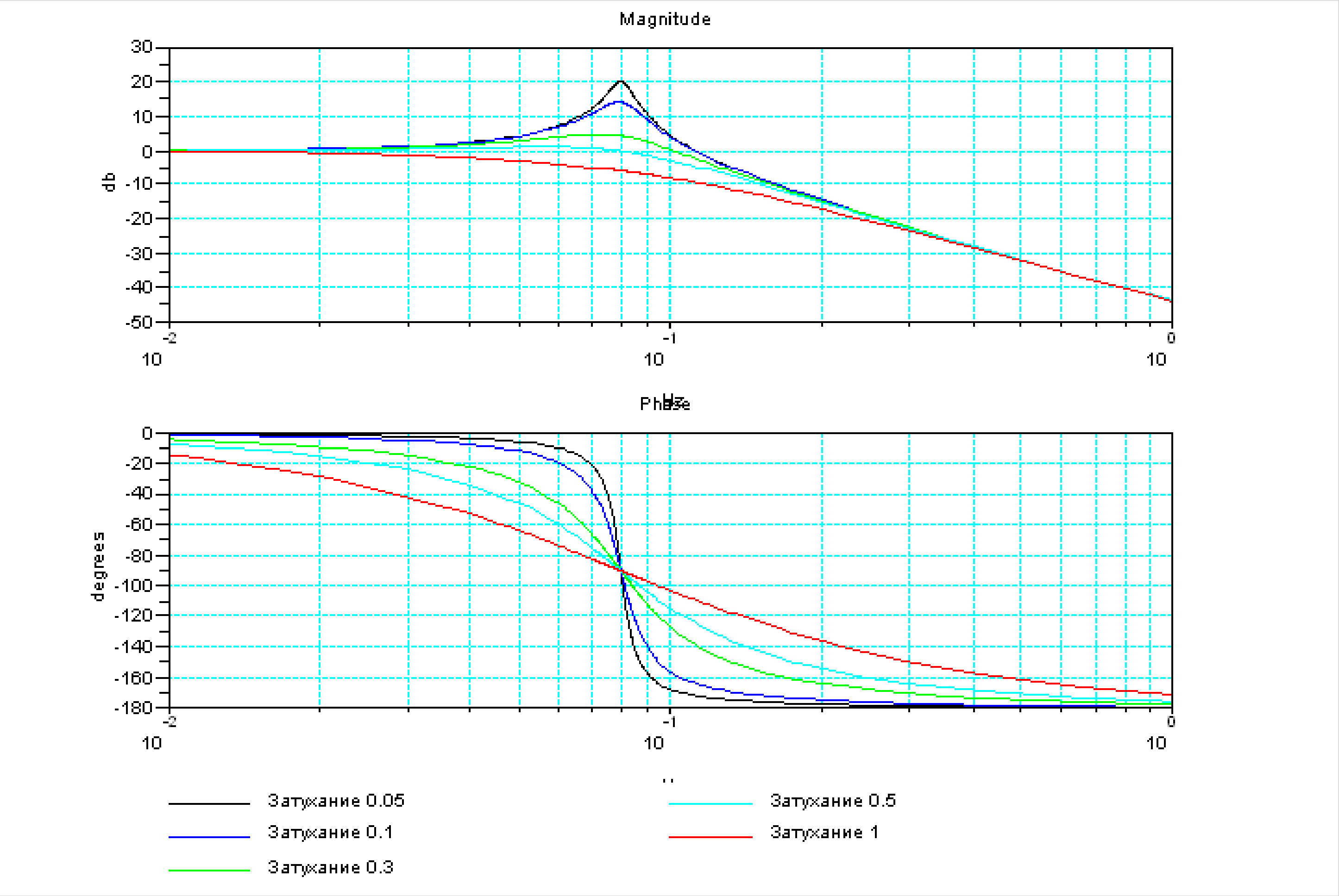
Колебательное звено

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Колебательное звено

- Появление резонансного пика (ζ <0,707)



Консервативное звено

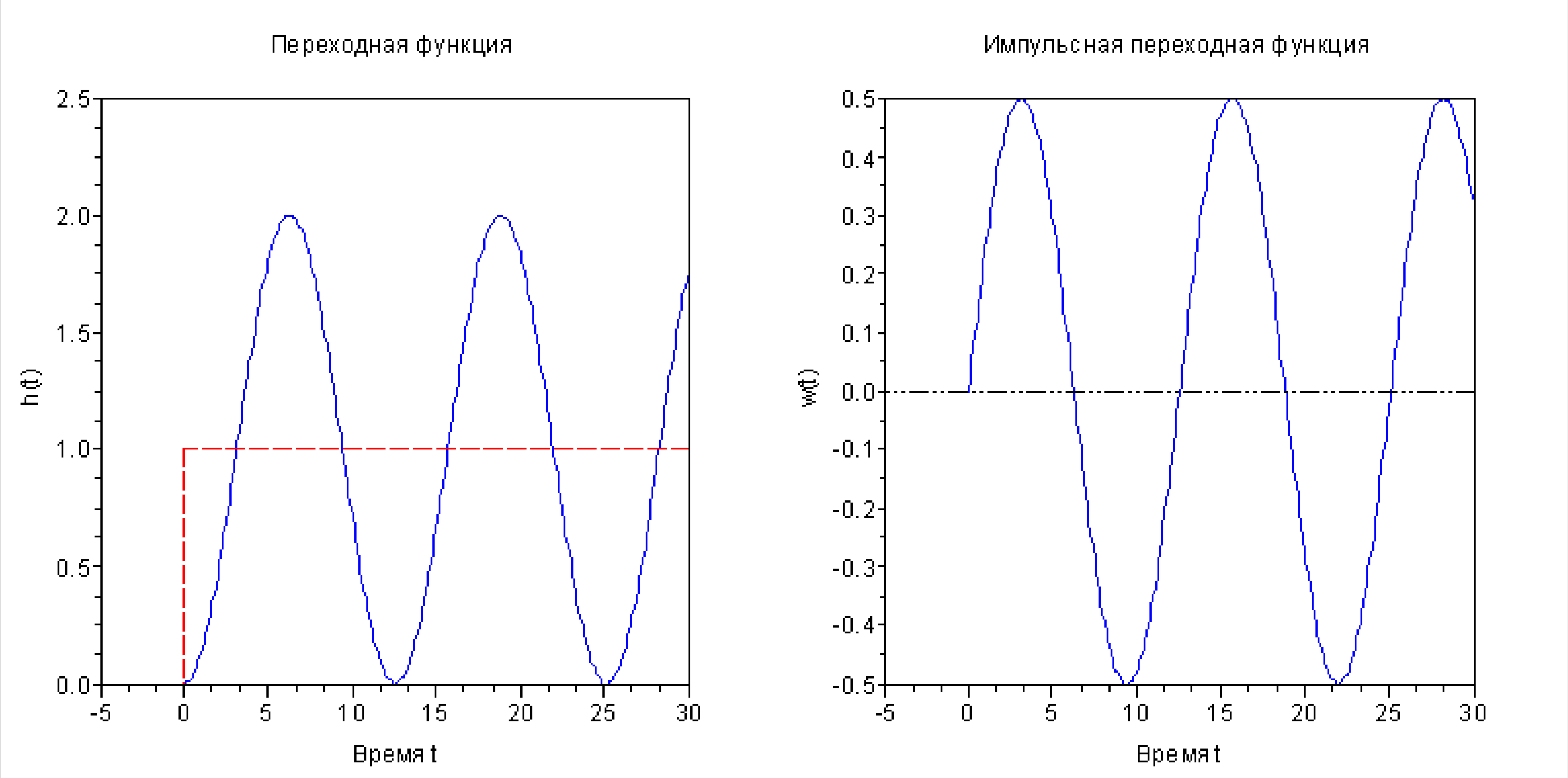
$$\zeta = 0$$

$$W(p) = \frac{k}{1 + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \dfrac{p^2}{q^2}}$$

- Пример: колебательная RLC-цепь при R=0

Консервативное звено

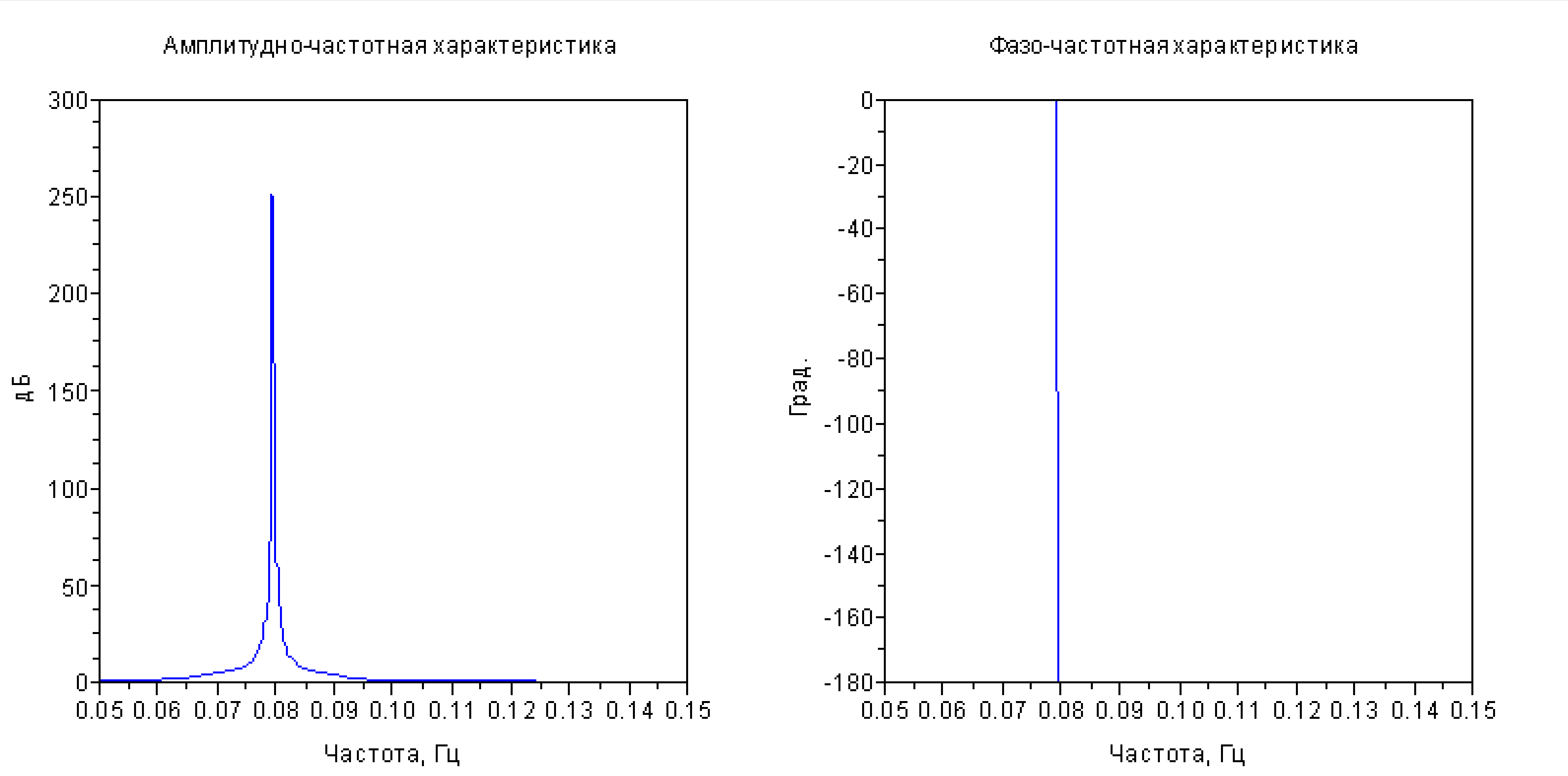
- Временные характеристики



Консервативное звено

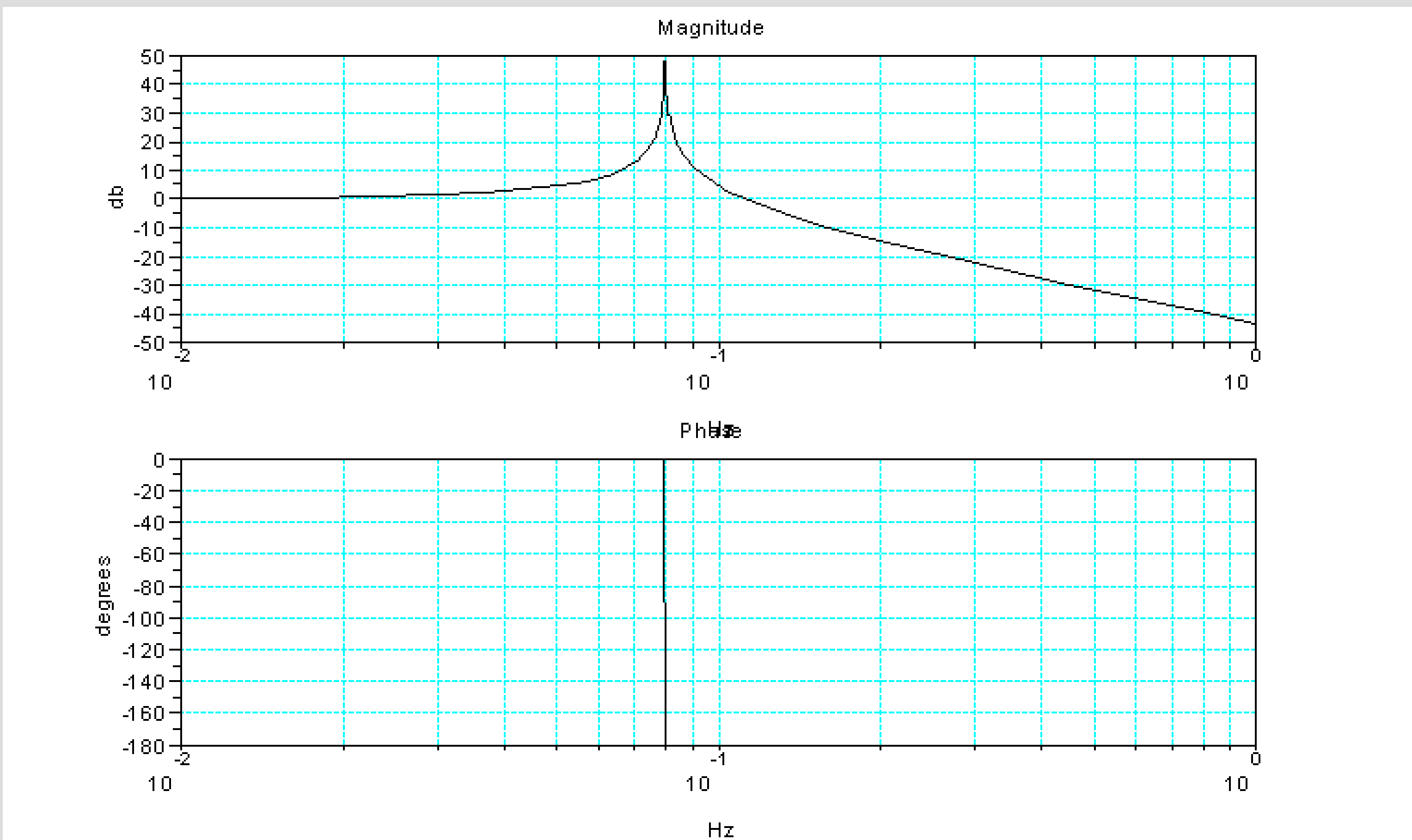
- АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega)=\frac{k}{|1-\omega^2 T^2|}$$



Консервативное звено

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Идеальное интегрирующее звено

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1$$

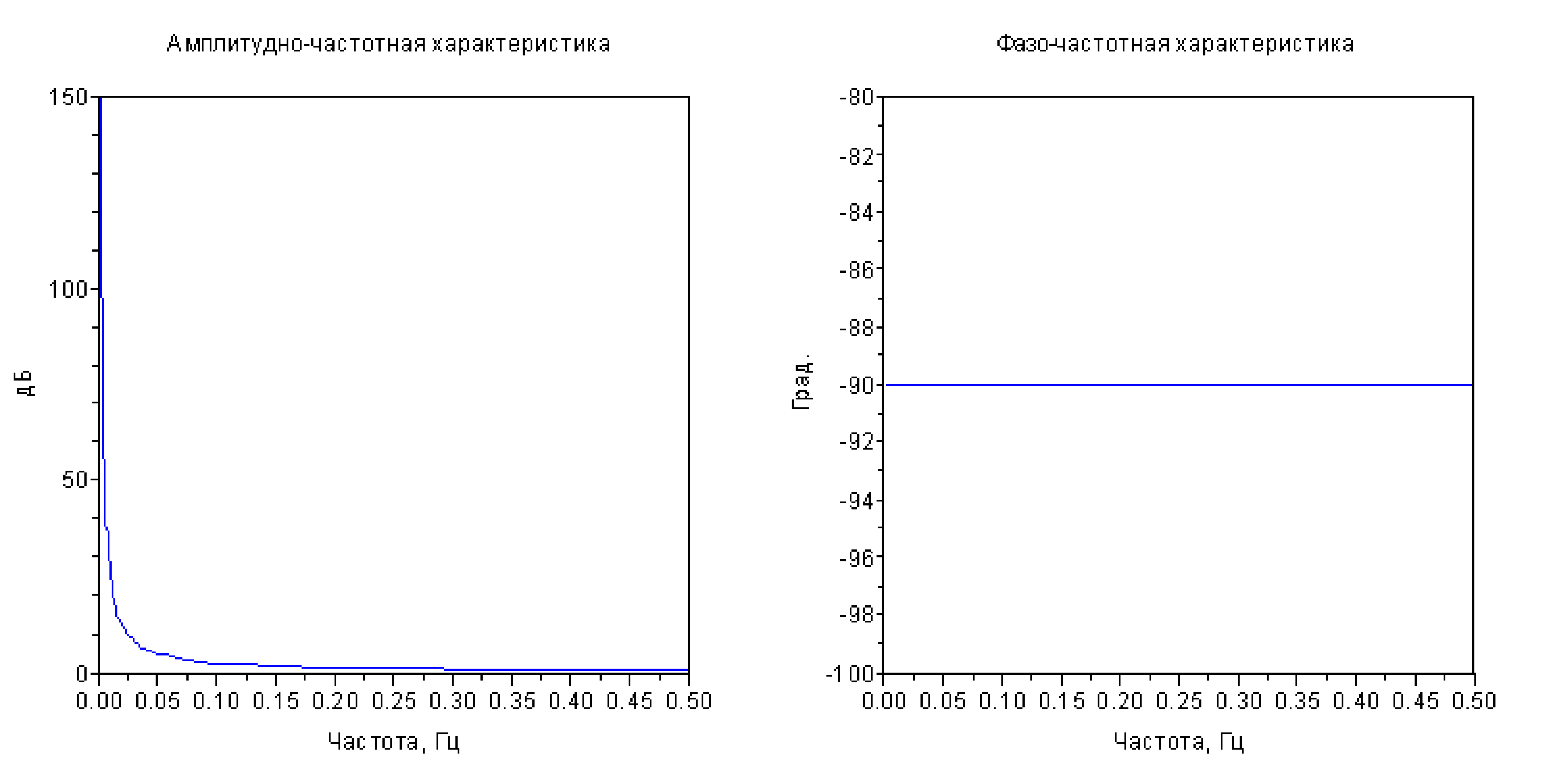
$$W(p) = \frac{k}{p}$$

- Примеры: операционный усилитель в режиме интегрирования, гидравлический демпфер
- Временные характеристики:

$$h(t) = kt \qquad w(t) = k$$

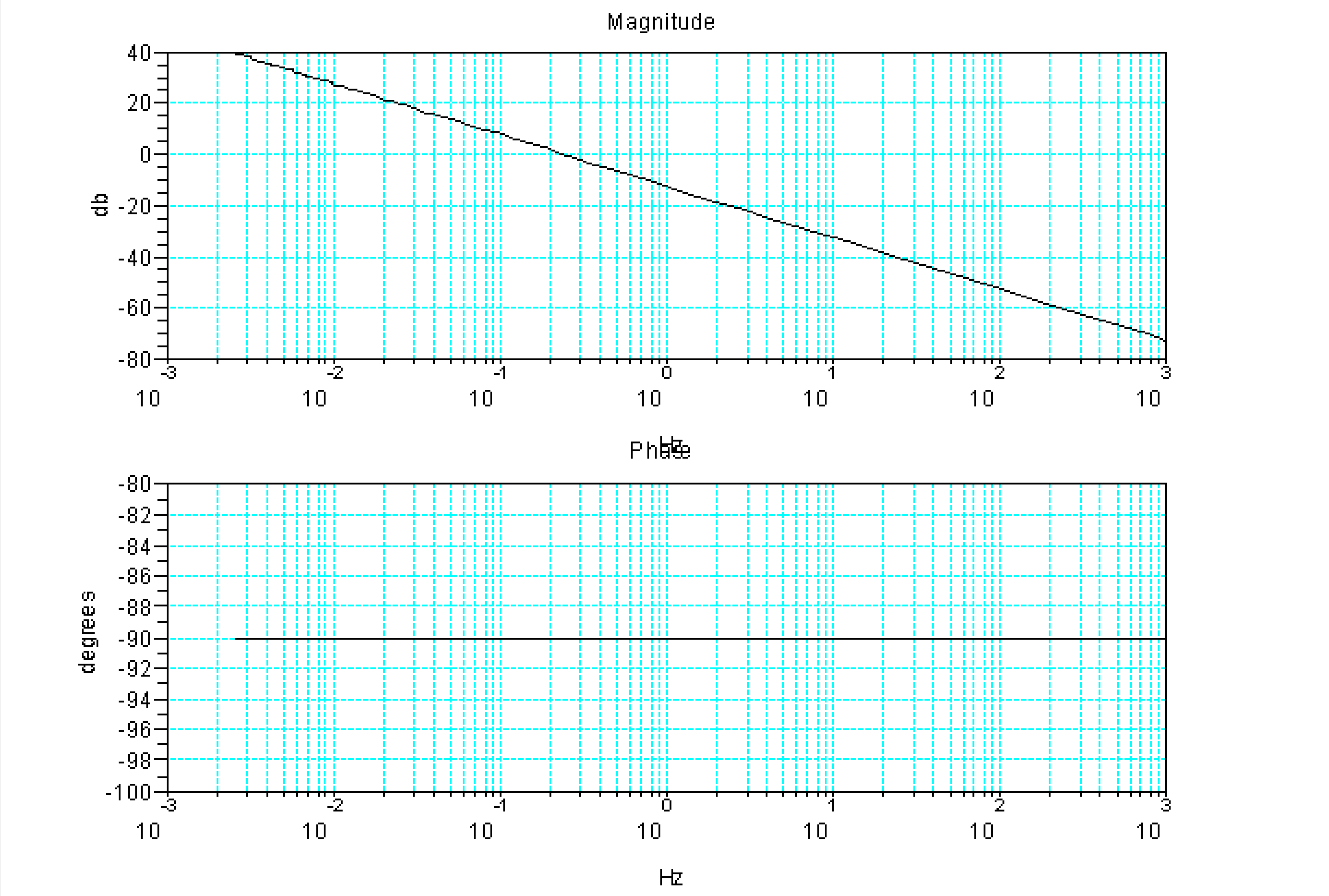
Идеальное интегрирующее звено

- АЧХ и ФЧХ



Идеальное интегрирующее звено

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Интегрирующее звено с замедлением

$$T\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{dx_2}{dt}=kx_1$$

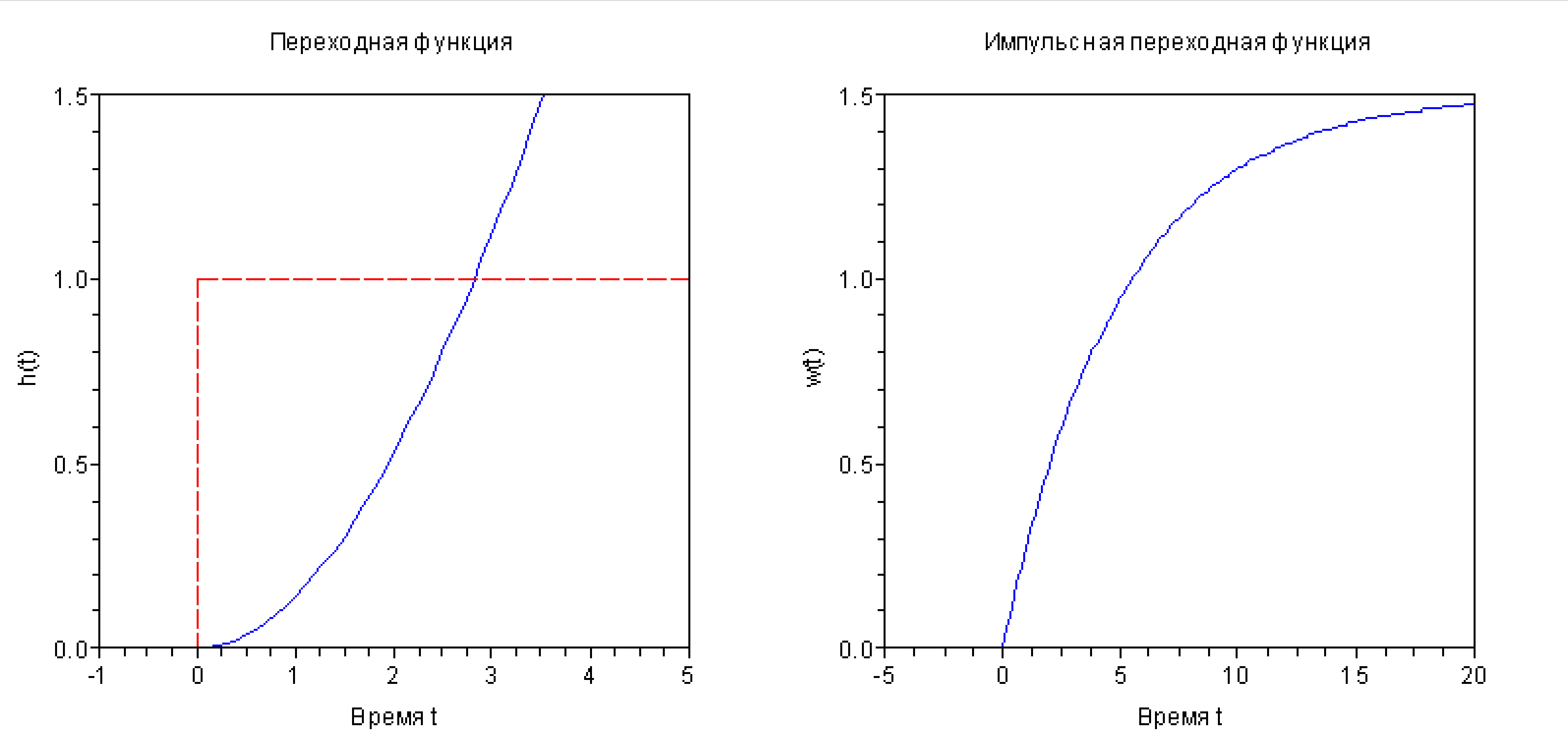
$$W(p)=\frac{k}{p(1+Tp)}$$

- Примеры: двигатель (выходная величина — угол поворота), демпфер, интегрирующий привод

Интегрирующее звено с замедлением

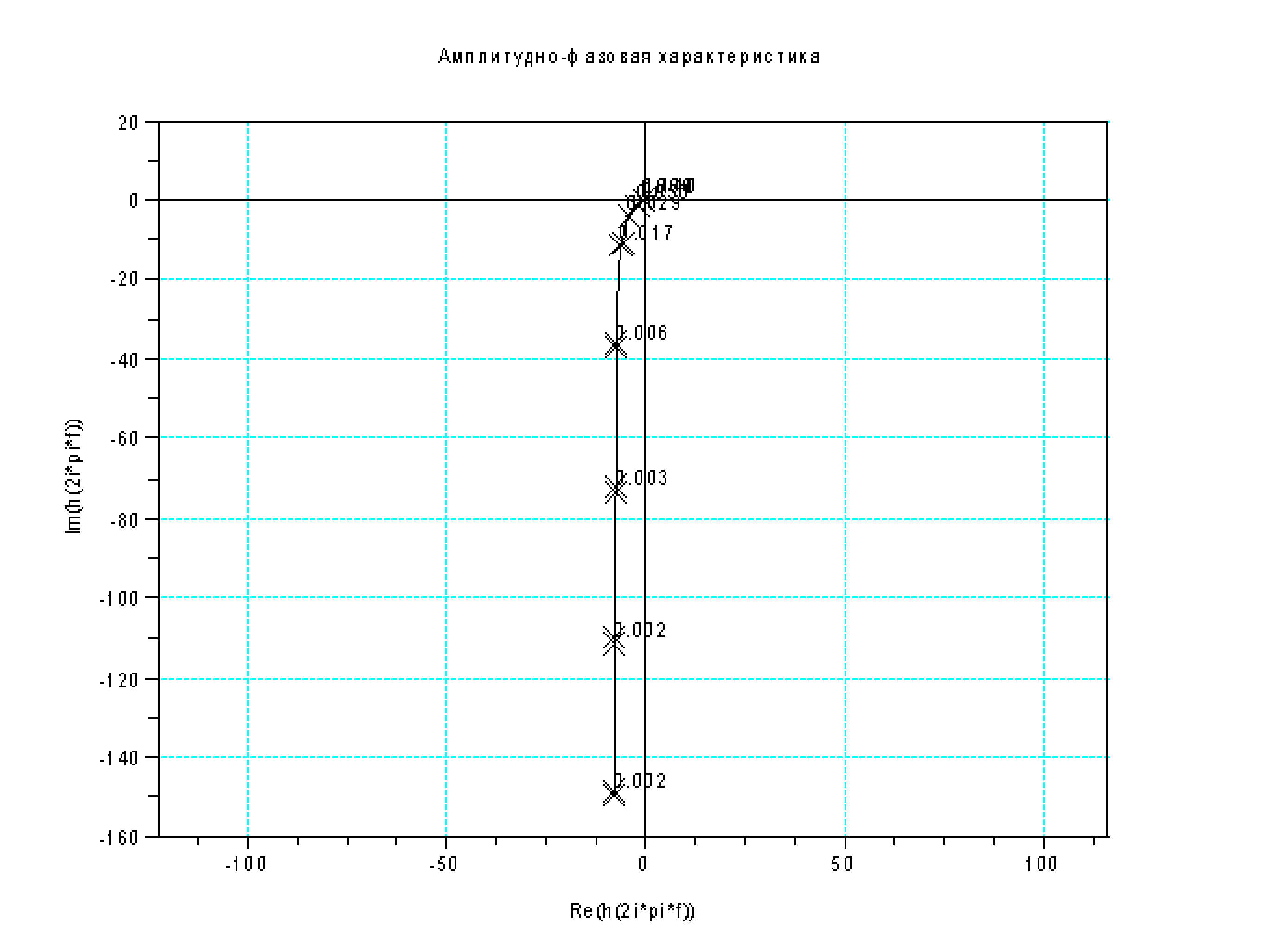
- Временные характеристики

$$h(t)=k(t-T(1-e^{-1/T}))\qquad w(t)=k(1-e^{-1/T})$$



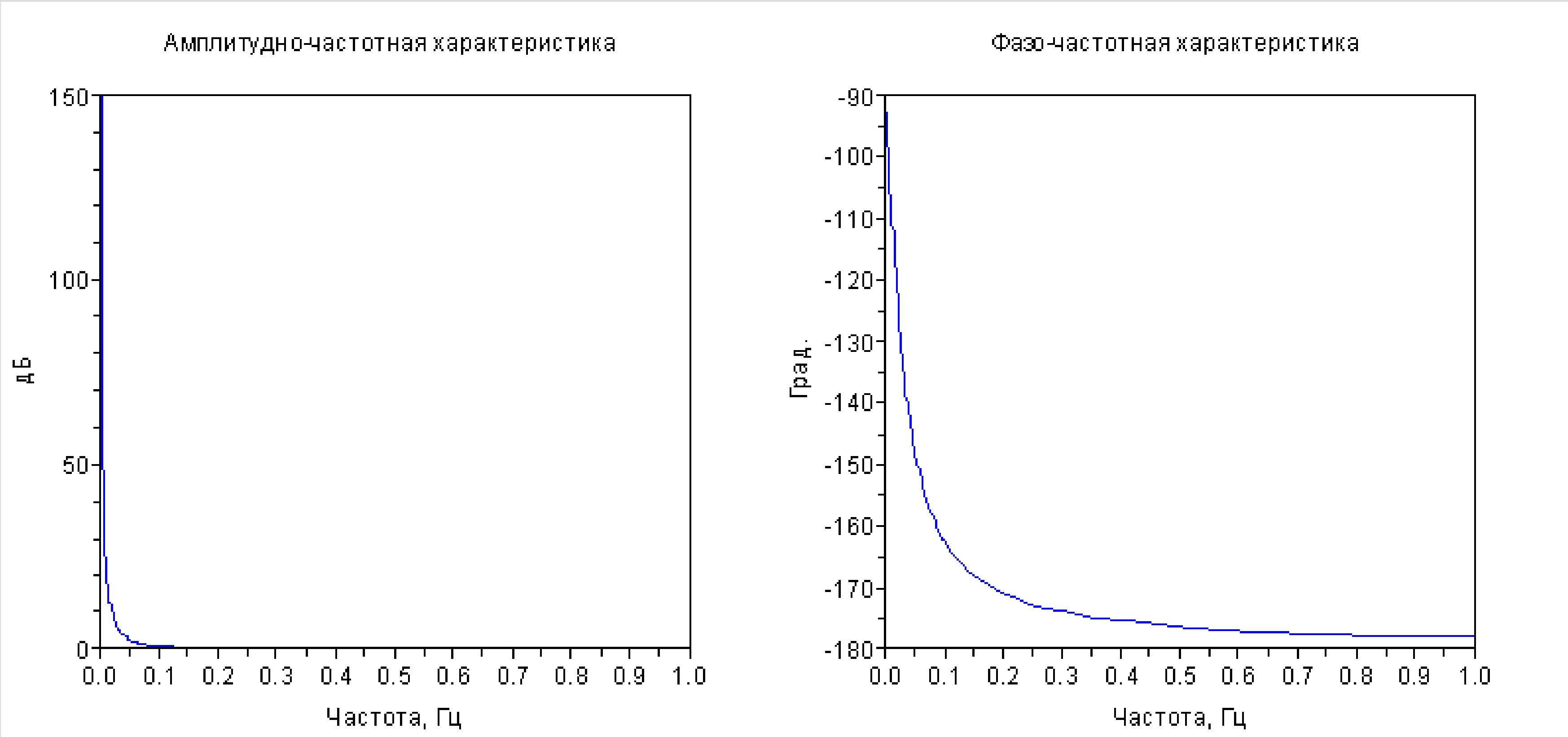
Интегрирующее звено с замедлением

- Амплитудно-фазовая характеристика



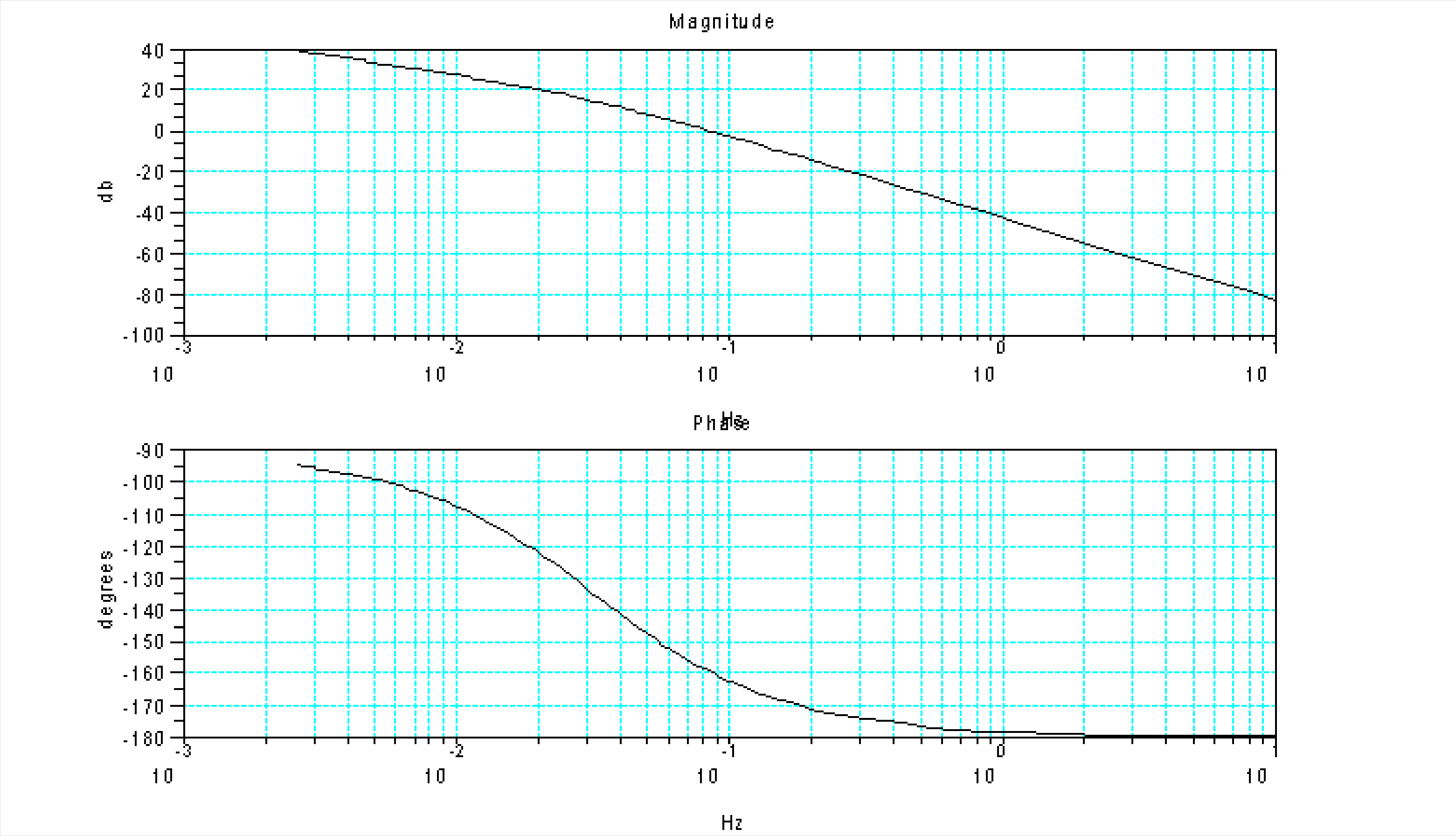
Интегрирующее звено с замедлением

- АЧХ и ФЧХ



Интегрирующее звено с замедлением

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Изодромное звено

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1 + k_1 \frac{dx_1}{dt}$$

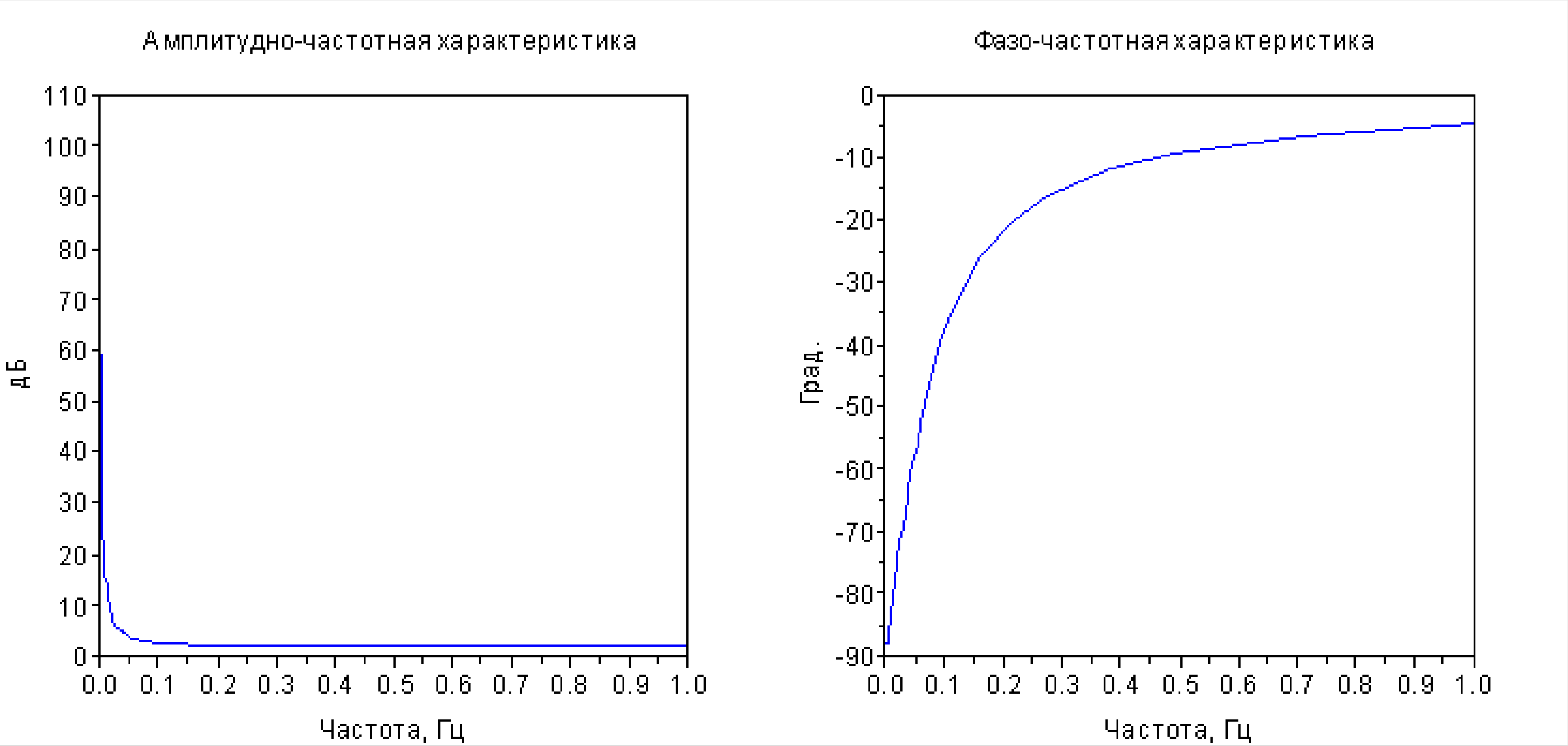
$$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1 + Tp)}{p} \qquad T = \frac{k_1}{k}$$

- Примеры: комбинация пружины с демпфером
- Временные характеристики:

$$h(t) = kt + k_1 \qquad w(t) = k\,1(t) + k_1 \delta(t)$$

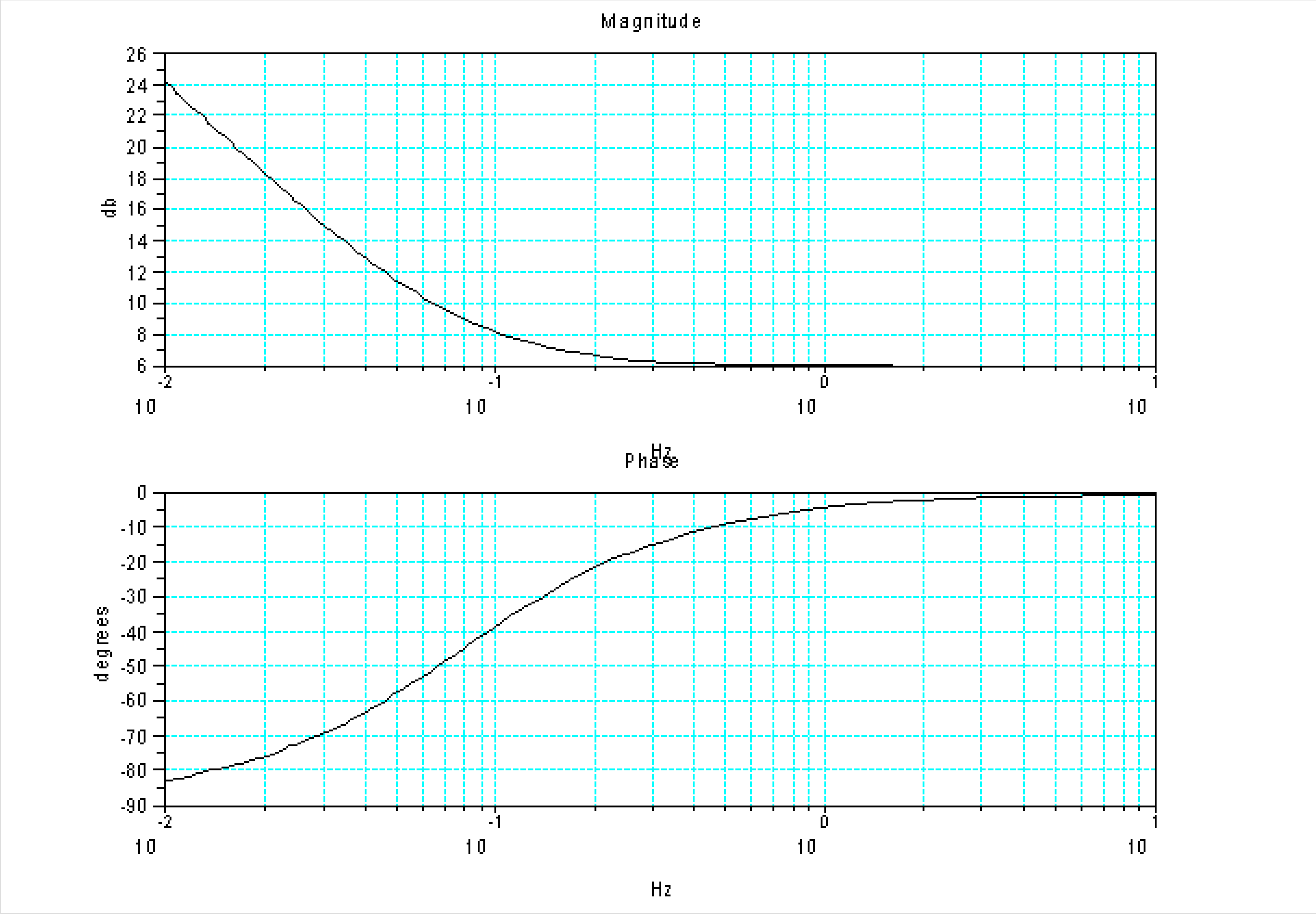
Изодромное звено

- АЧХ и ФЧХ



Изодромное звено

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Идеальное дифференцирующее звено

$$x_2 = k\frac{dx_1}{dt} \qquad W(p) = kp$$

- Примеры: тахогенератор постоянного тока, операционный усилитель в режиме дифференцирования
- Временные характеристики:

$$h(t) = k\,\delta(t) \qquad w(t) = k\frac{d\,\delta(t)}{dt}$$

- Частотные характеристики:

$$A(\omega) = k\,\omega \qquad \theta(\omega) = \pi/2 \qquad L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega$$

Дифференцирующее звено с замедлением

$$T\frac{dx_2}{dt}+x_2=k\frac{dx_1}{dt}$$

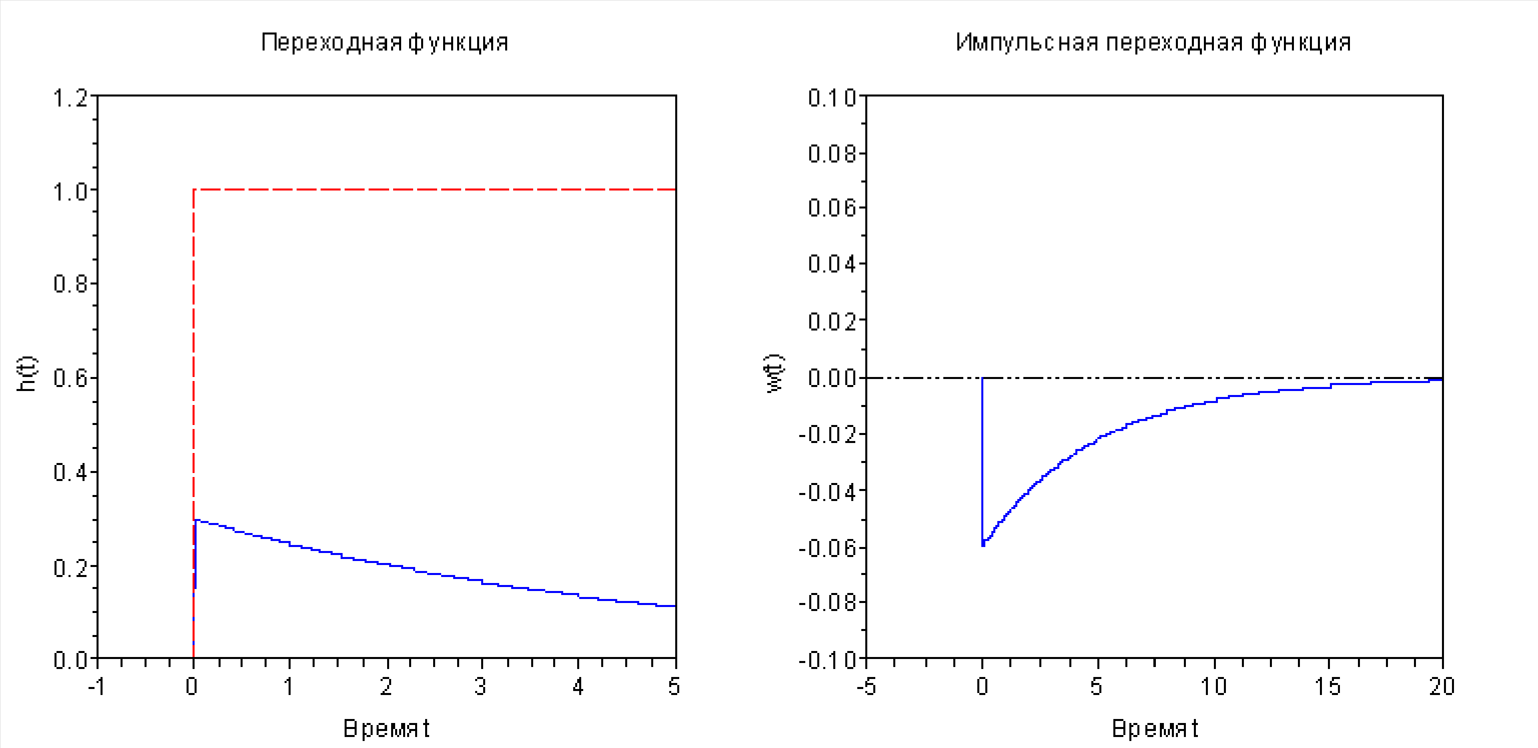
$$W(p)=\frac{kp}{1+Tp}$$

- Примеры: электрические RC-, RL- и LR-цепи

Дифференцирующее звено с замедлением

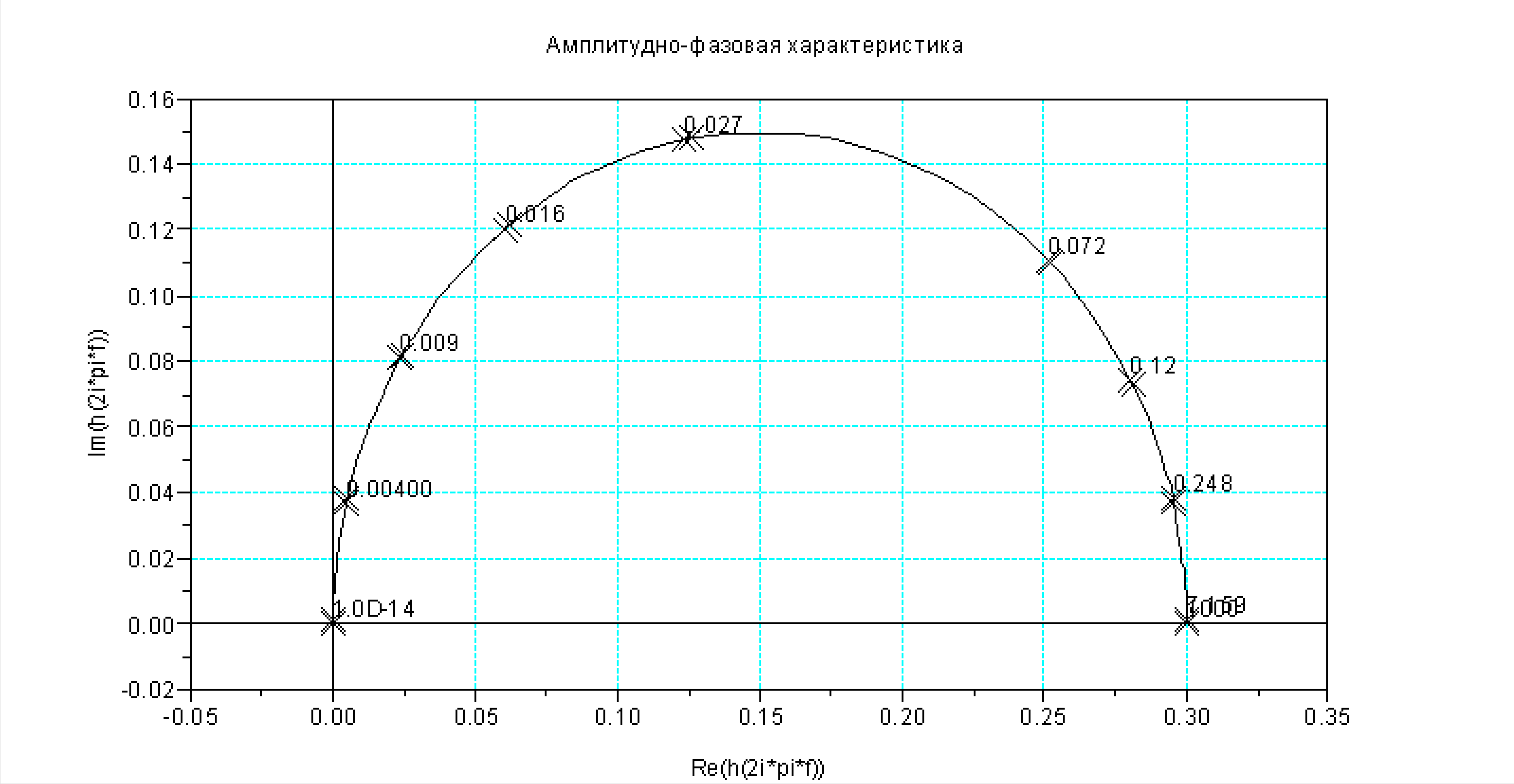
- Временные характеристики

$$h(t)=\frac{k}{T}e^{-1/T} \qquad w(t)=\frac{k}{T}\delta(t)-\frac{k}{T^2}e^{-t/T}$$



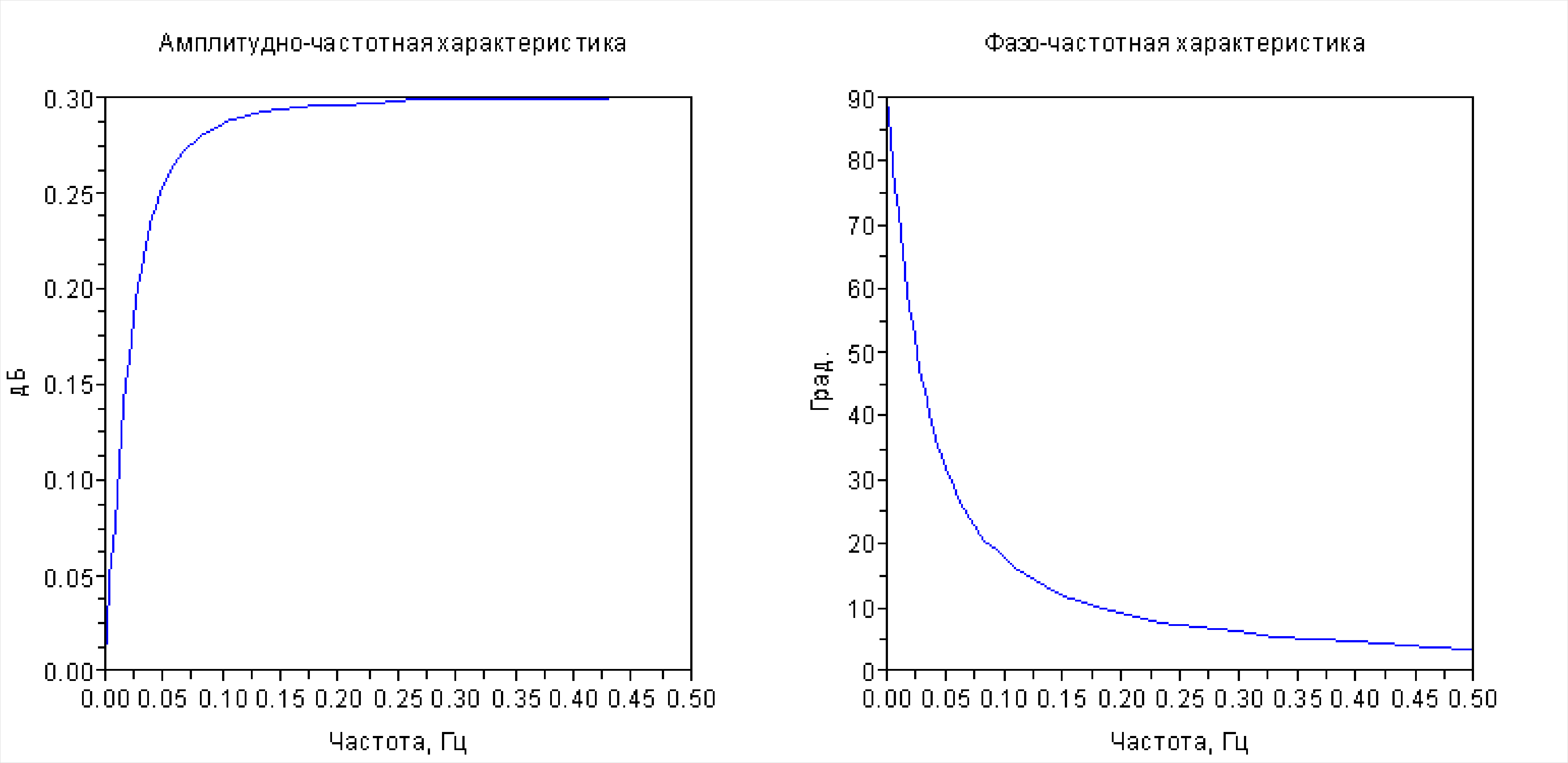
Дифференцирующее звено с замедлением

- Амплитудно-фазовая характеристика



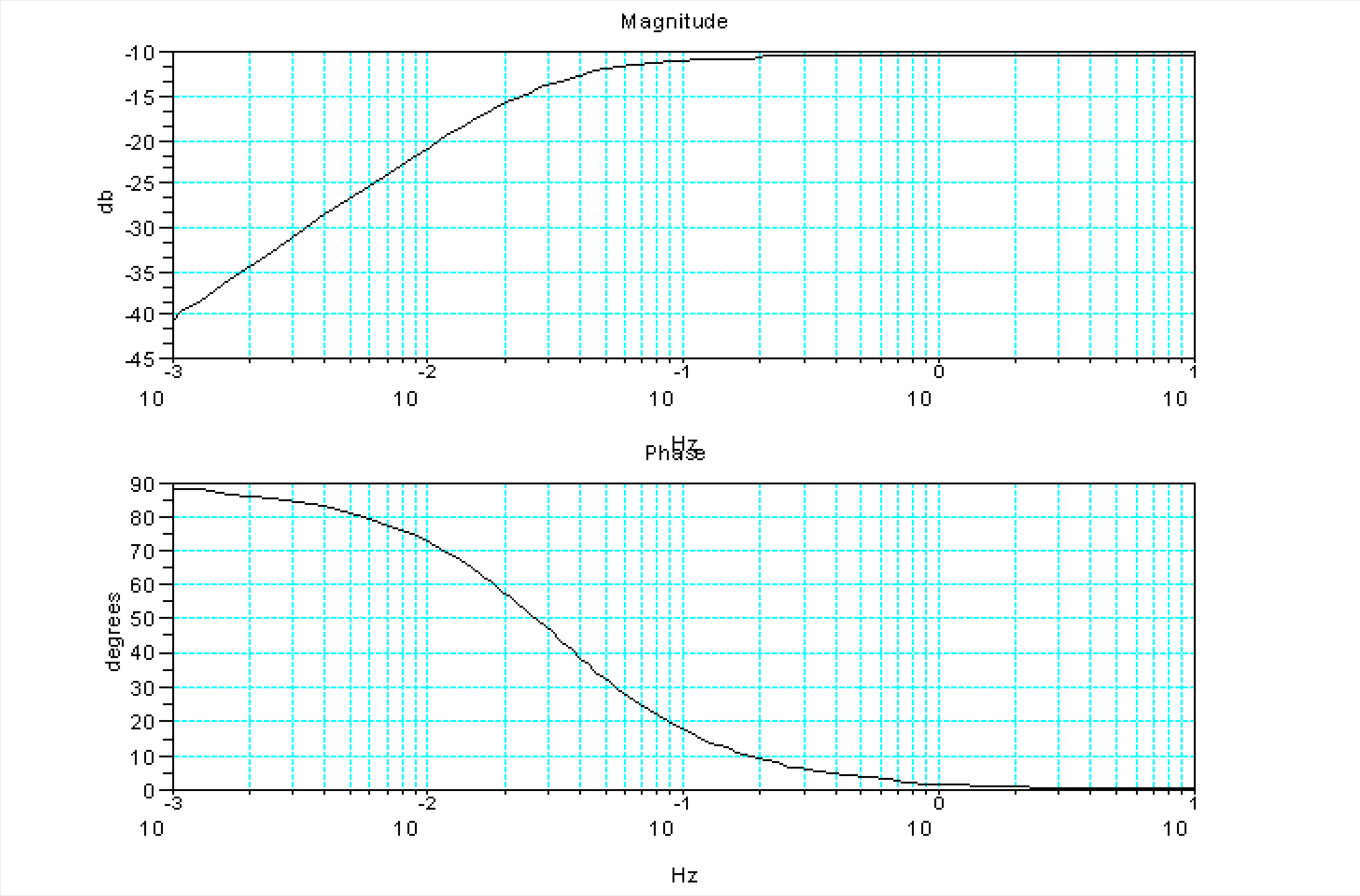
Дифференцирующее звено с замедлением

- АЧХ и ФЧХ



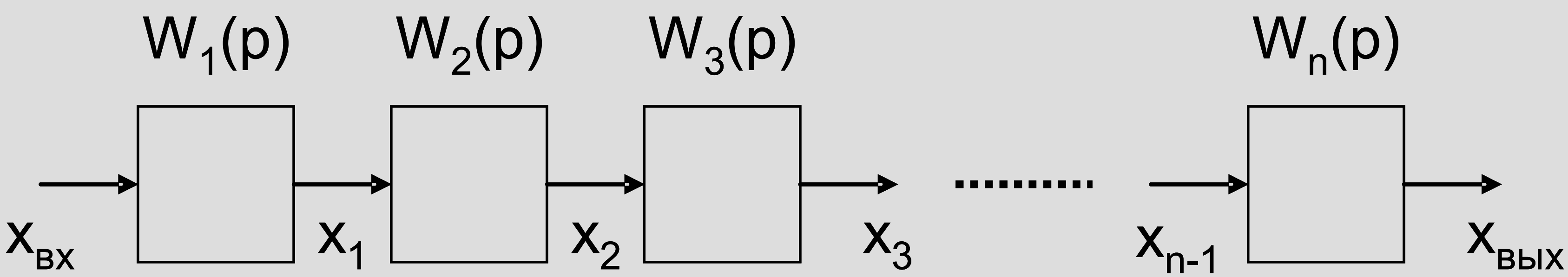
Дифференцирующее звено с замедлением

- ЛАЧХ и ЛФЧХ



Виды соединений звеньев

- Последовательное



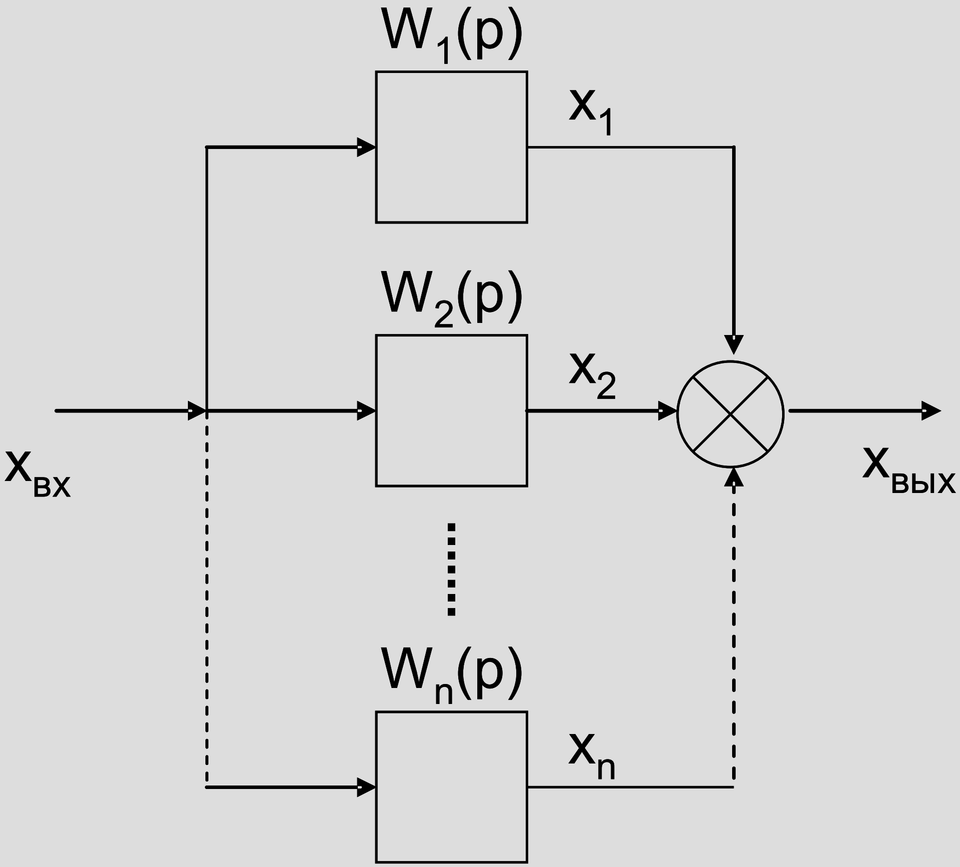
$$W(p)=\frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)}$$

$$W(p)=\prod_{i=1}^{n} W_i(p)$$

Виды соединений звеньев

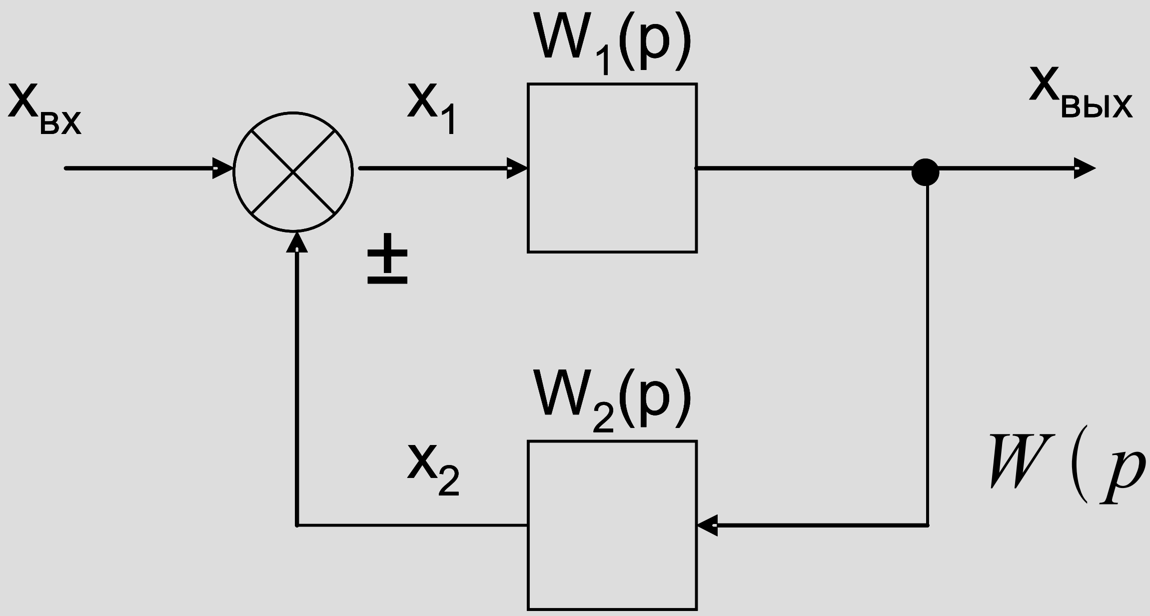
- Параллельное

$$W(p)=\sum_{i=1}^{n} W_i(p)$$



Виды соединений звеньев

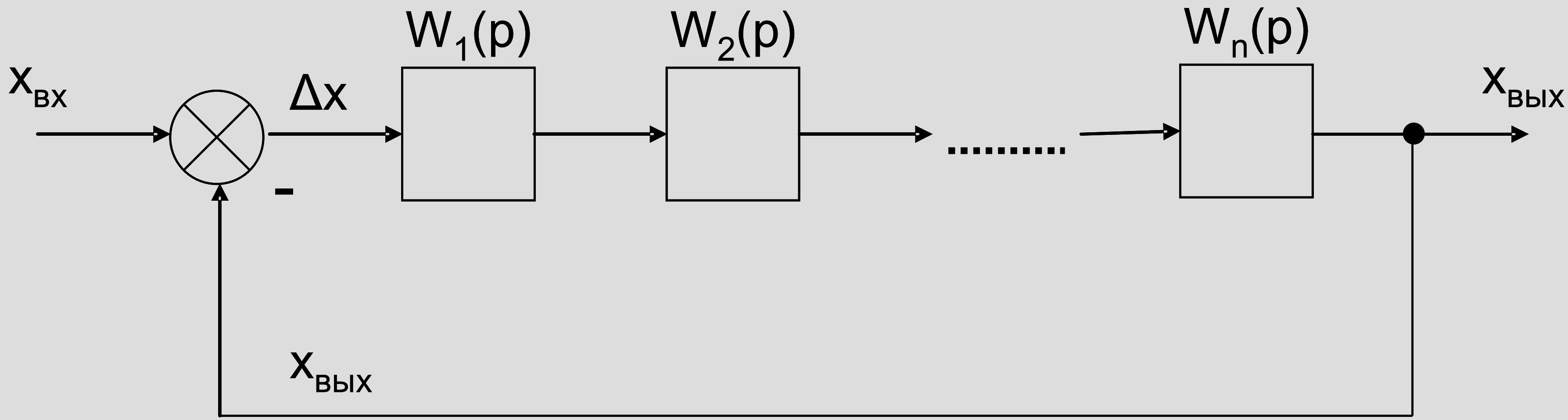
- С обратной связью



$$x_1 = x_{вх} \pm x_2$$

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p) W_2(p)}$$

Замкнутые и разомкнутые САУ

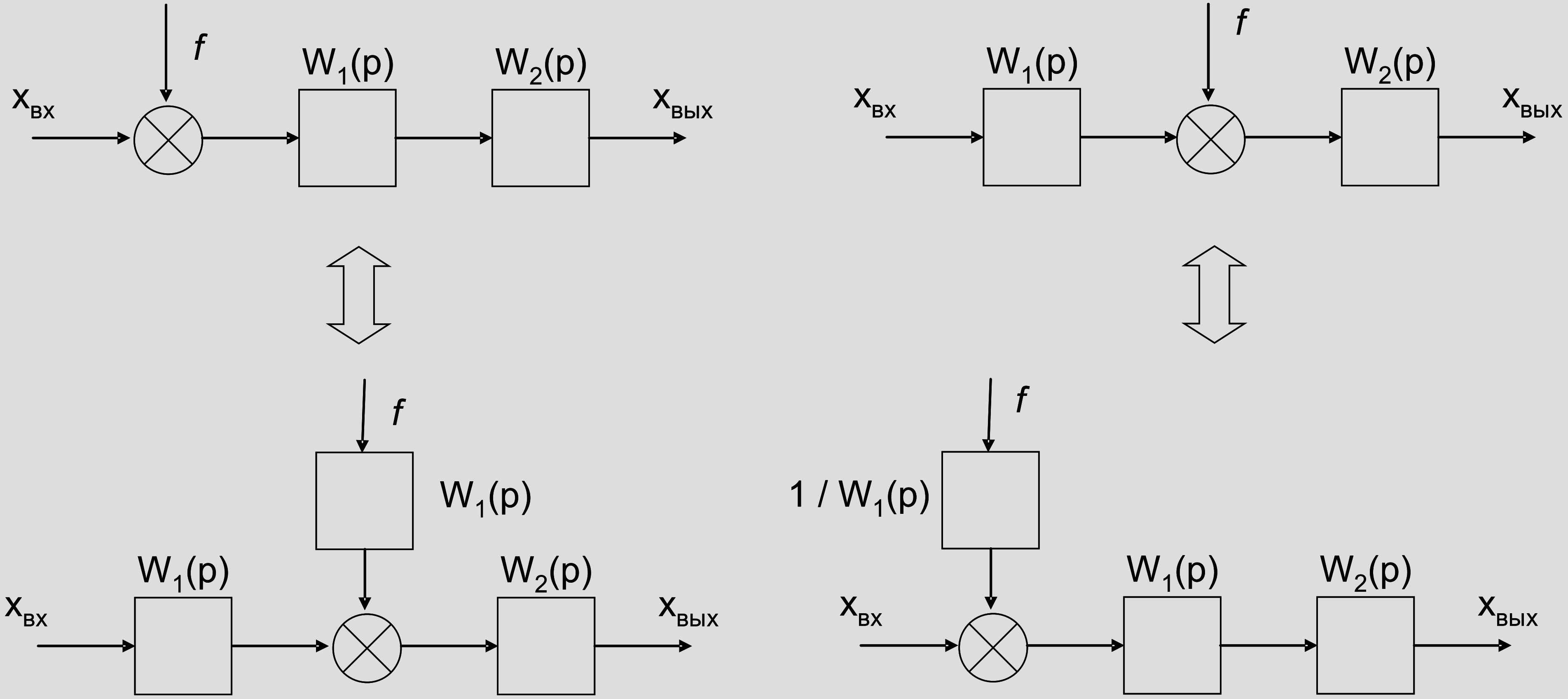


$$W_{раз}(p) = W_1(p)\,W_2(p) \ldots W_n(p)$$

$$W_{замк}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}$$

Преобразования структурных схем

- Перенос сумматора



Преобразования структурных схем

- Перенос узла