Matematik B STX aftermath

August 2018

Løsningerne er vejledende og skal bruge som indlæring, så derfor er de ikke lavet som en elevbesvarelse. En elevbevarelse skal være personligt. Det er disse løsninger ikke. NB: Der tages forbehold for fejl, så ser du nogle, så skriv. **Forudsætning**: Maple og GeoGebra.

Opgave 1: Forholdet udregnes først. Man har $k = |DF|/|AC| = 10/5 = 2$, og dermed er $|DE| = k \cdot |AB| = 2 \cdot 3 = 6$ og $|BC| = 14/k = 14/2 = 7$.

Opgave 2: Det oplyses, at i år 2006 var der 321522 danskere tilmeldt Donorregisteret, dvs. $b = 321522$. Det steg i perioden 2006 til 2016 med 59500, så $a = 59500$ og dermed kan man opstille en lineære forskrift.

$$f(x) = 59500x + 321522$$

Hvor x er tiden målt i år fra perioden 2006 til 2016 og $f(x)$ er antal tilmeldte i Donorregisteret.

Opgave 3: Udtrykket reduceres

$$\begin{aligned} &2b^2 - a^2 + (a+b)^2 \\ &= 2b^2 - a^2 + a^2 + b^2 + 2ab \\ &= 3b^2 + 2ab \end{aligned}$$

Opgave 4: Først regnes $f(1)$.

$$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 1 = 5$$

Dernæst beregnes den afledede som så er $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$$

Dernæst regnes $f'(1)$.

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 8 = 1$$

Og tangenten i punktet P er

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 1 \cdot (x-1) + 5 \\ &= x + 4 \end{aligned}$$

Som er det ønskede.

Opgave 5: Integralet beregnes.

$$\int_0^2 (6x^2 + 1)\,dx = 2x^3 + x|_0^2 = 18 - 0 = 18$$

Opgave 6: Diskriminanten beregnes.

$$d = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$$

Da diskriminanten er negativ, er B udelukket. Man ser efter toppunktets placering smat fortegnet for b. Det ses, at grafen for C opfylder betingelsen, da fortegnet er negativt og toppunktet er placeret i første kvadrant. **Så det korrekte svar er C.**

Opgave 7:

a) Der benyttes eksponentiel regression over tabellens data. Bemærk, at år 2012 svarer til $x = 0$, år 2013 svarer til $x = 1$ and so on. Dermed er tabellen:

0	1	2	3	4
49	81	122	275	481

Eksponentiel regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat:
$R^2 = 0.9880361$

$$f(x) = 45.53597 \cdot 1.784327^x$$

Og tallene a og b er udregnet til:

$$a = 1.784327$$
$$b = 45.53597$$

b) Man løser ligningen $f(x) = 1500$ så

$$45.53597 \cdot 1.784327^x = 1500 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1500}{45.53597}\right)}{\ln(1.784327)} \approx 6.035$$

Så i år 2018 vil det årlige antal publicerede videnskabelige artikler inden for dyb maskinlæring overstige de 1500 artikler.

c) Tallet a omregnes. Tallet a er fremskrivningsfaktoren.

$$r = a - 1 = 1.784327 - 1 = 0.784327 = 78.4327\%$$

Så for hvert år der går, efter år 2012 vil antallet af publicerede videnskabelige artikler inden for dyb maskinlæring vokse med 78.4%

Opgave 8: *Forudsætning: Maple*

a) Kvartilsættet bestemmes. Der er totalt 15 observationer, så medianen er tydeligvis 6, da der er 7 observationer hhv. til venstre og højre.

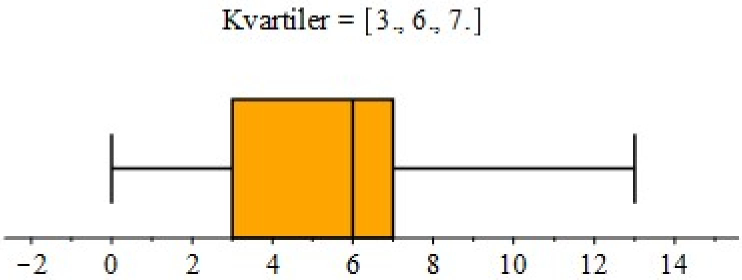
0,0,2,3,4,4,5,6,6,6,7,7,8,10,13

Nedre kvartil bestemmes. Nedre kvartil 3 og øvre kvartil 7 findes også nemt.

0,0,2,3,4,4,5,6,6,6,7,7,8,10,13

Tallene indlæses i Maple og der laves et boksplot.

```
with(Gym) :
Data := [0, 0, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 10, 13] :
boksplot(Data)
```



Så ovenstående boksplot illustrerer fordelingen af svarene fra de adspurgte i undersøgelsen.

Opgave 9: *Forudsætning: Maple*

a) Nulhypotese: De forventede værdier forholder sig som antaget i skemaet fra opgavesættet.

Sum 2	$131 \cdot \frac{6.25}{100} = 8.1875 \approx 8$
Sum 3	$131 \cdot \frac{12.5}{100} = 16.375 \approx 16$
Sum 4	$131 \cdot \frac{18.75}{100} = 24.5625 \approx 25$
Sum 5	$131 \cdot \frac{25}{100} = 32.750 \approx 33$
Sum 6	$131 \cdot \frac{18.75}{100} = 24.5625 \approx 25$
Sum 7	$131 \cdot \frac{12.5}{100} = 16.375 \approx 16$
Sum 8	$131 \cdot \frac{6.25}{100} = 8.1875 \approx 8$

Næste side bestemmes teststørrelsen, som også kan bestemmes vha. formlen

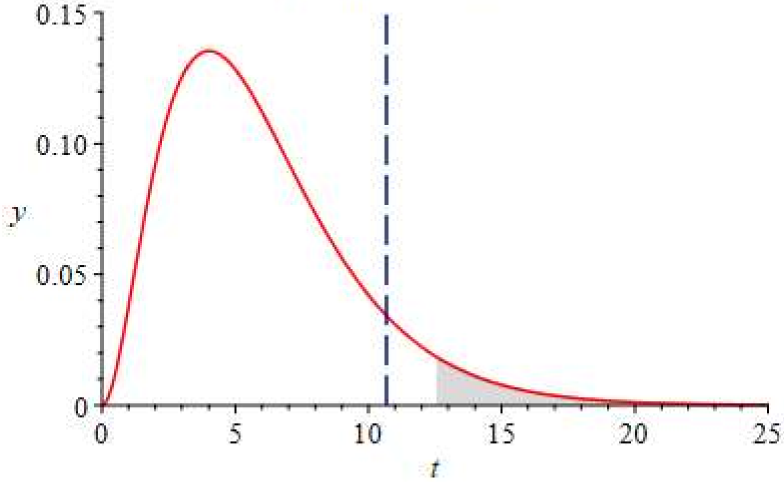
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(O_1 - F_1)^2}{F_1} + \frac{(O_2 - F_2)^2}{F_2} + \ldots \frac{(O_{n-1} - F_{n-1})^2}{F_{n-1}} + \frac{(O_n - F_n)^2}{F_n}$$

En glimrende øvelse til læseren.

b) Vha. Maple indlæses de observerende og forventede værdier, og der benyttes GOF-test.

```
with(Gym) :
OBS := [12, 9, 24, 39, 22, 12, 13] :
FORV := [8, 16, 25, 33, 25, 16, 8] :
ChiKvadratGOFtest(OBS, FORV, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 10.678
Frihedsgrader = 6
Kritisk værdi = 12.592
p-værdi = 0.098839

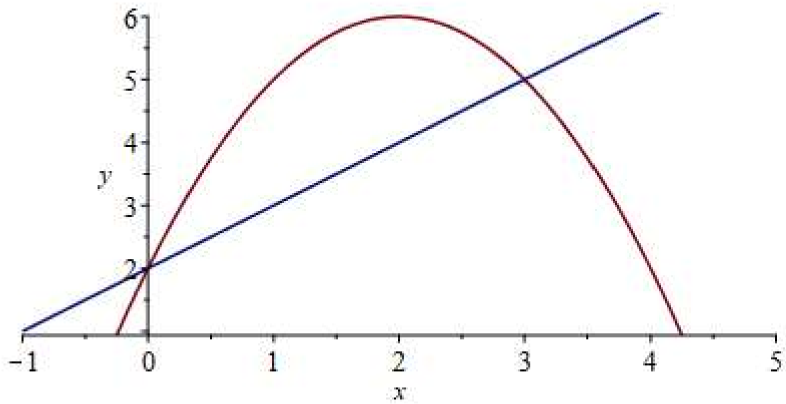


Da p-værdien er større end 0.05 accepteres nulhypotesen.

Opgave 10: *Forudsætning: Maple*

a) I Maple defineres og tegnes funktionerne.

```
with(Gym) :
f(x) := -x^2 + 4x + 2 :; g(x) := x + 2 :
plot([f(x), g(x)], x = -1 ..5, y = 1 ..6)
```



I Maple bestemmes førstekoordinaterne til hvert skæringspunkt ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$.

$f(x) = g(x)$

$$-x^2 + 4x + 2 = x + 2$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 3]]$$

Som også kunne udregnes i hånden. Det ses, at førstekoordinaterne er hhv. $x = 0 \wedge x = 3$.

b) Man beregner integralet

$$M = \int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2 - x - 2)\,dx$$
$$= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$$

Som er M.

Opgave 11:

a) Man har vinkel $C_{ACD} = 60^o$ og da $D = 90^o$ kan $|AC|$ nemt bestemmes.

$$|AC| = \frac{8}{\cos(60)} = 16$$

b) Arealet af ABC bestemmes. Først beregnes arealet af ACD.

$$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \sin(60) = 55.426$$

Så arealet af BCD med forudsætning af $|BD|$ kendes.

$$|BD| = \tan(32) \cdot 8 = 5$$
$$T_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$$

Arealet af ABC er

$$T_{ABC} = 55.426 - 20 = 35.426$$

Opgave 12:

a) Her er $n = 20$ og $r = 0.001$, så

$$A(20) = 500 \cdot \frac{(1 + 0.001)^{20} - 1}{0.001} = 10095.572$$

Så beløbet efter 20. indbetaling er 10095.572kr.

b) Man har ligningen

$$10500 = 500 \cdot \frac{(1 + r)^{20} - 1}{r}$$

Sådan en ligning løses numerisk.

$$10500 = 500 \cdot \frac{(1+r)^{20} - 1}{r}$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for r vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$r = 0.005103442$$

Så den månedlige rentefod skal være $r = 0.005$ ca.

Opgave 13:

a) Funktionen differentieres først.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \qquad x > 0$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Den anden afledede benyttes.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad x > 0$$

Og $x = 1$ indsættes.

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

Så der er globalt minimum. (hvorfor? Hint: Tegn grafen)

Dermed er funktionen: Aftagende i intervallet $(0; 1]$ og voksende i intervallet $[1; \infty)$

b) Man sætter $f'(x) = -2$ eftersom hældningen for tangenten er -2.

$$1 - \frac{1}{x^2} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ovenstående indsættes i f.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{4\sqrt{3} - 3}{3}$$

Så koordinatsættet hvor hældningen for tangenten er -2:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4\sqrt{3} - 3}{3}\right) \approx (0.57736; 1.3094)$$