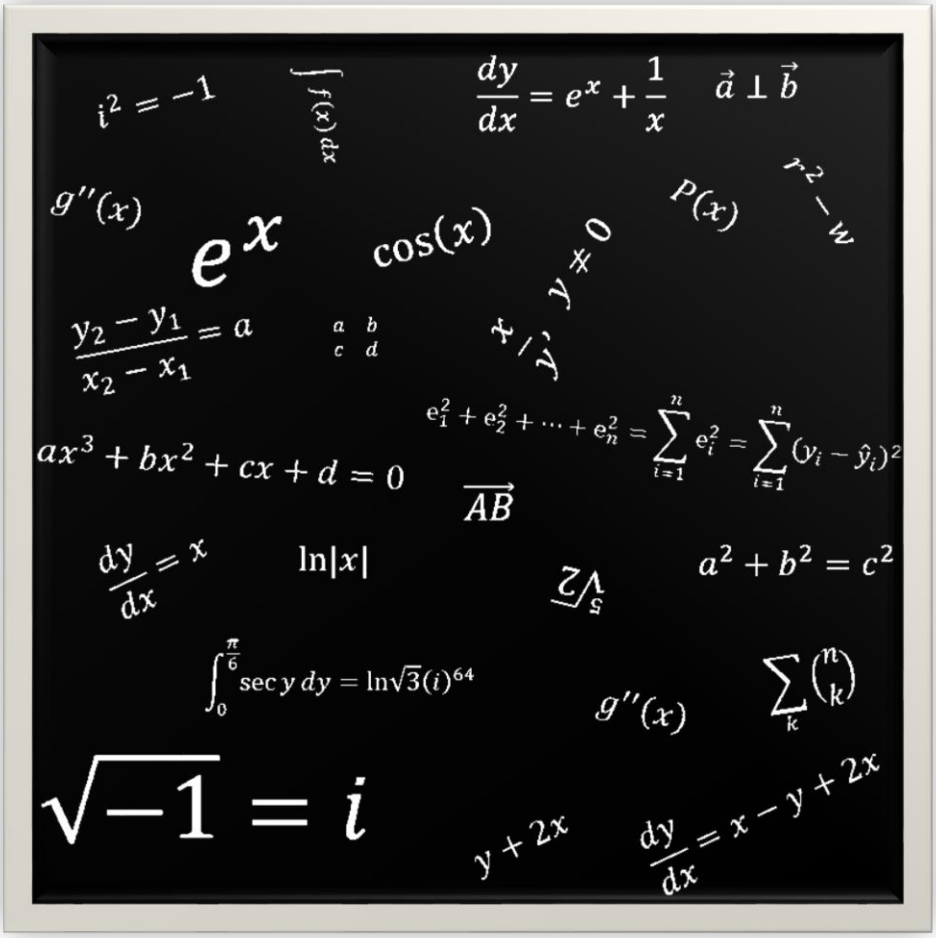
MATEMATIK B-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

29. maj 2013 & 29. maj 2013 GL.



Info: Hvis man har GL versionen, så er opgave 11 anderledes.

Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

$$STX\ matematik\ B\ maj\ 2013 - niveau, delprøve\ 1$$

Opgave 1

a) Man får opgivet en tabel med støttepunkter. De skrives ikke ind her.
Man skal blot finde $f(x)$, hvilket i sig selv er enkelt, da man har funktionsforskriften.

$$f(2) = 4 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

Så det må være den tilhørende y værdi.

Opgave 2

a) Man kan se, det er ligningen af typen:

$$ax + by + c = 0$$

Man isolerer y i følgende ligning.

$$-15x + 5y - 45 = 0 \Leftrightarrow -5y = -15x - 45 \Leftrightarrow 5y = 15x + 45 \Leftrightarrow \frac{5y}{5} = \frac{15x}{5} + \frac{45}{5}$$

Så hvis man forkorter ud, har man ligningen

$$y = 3x + 9$$

Opgave 3

a) Ved anvendelse af Pythagoras sætning har man denne ligebenet trekant, der er ens på begge sider. Altså må b være 6, fordi $\frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
Man har så

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Her er medianen, ortogonal fra AC betegnet med H, så man har

$$a^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

Altså er $a = h_b = 8$

Opgave 4

a) Metode 1)

$$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

b) Metode 2)

$$d = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 64, \qquad d > 0$$

Så bestemmes rødderne.

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{64}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Opgave 5

a) Graferne tegnes ikke ind. Men man har funktionen

$$f(x) = 3x + 2$$

Hvis man tager stamfunktionen af dette, anvendes integralet. Man har

$$F(x) = \int 3x + 2\, dx = \frac{3}{2}x^2 + 2x + k$$

Her argumenteres der så for, at det er $p(x)$ der er stamfunktionen til $f(x)$, idet forskellen blot er den tilhørende konstant. Differentieres $p(x)$ fås

$$p'(x) = 3x + 2$$

Opgave 6

a) Ligningen for tangenten er

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Man indsætter det man ved.

$$f(x) = 4\mathrm{e}^x + 1$$
$$f'(x) = 4\mathrm{e}^x$$

Værdierne indsættes

$$f(0) = 4\mathrm{e}^0 + 1 = 5$$
$$f'(0) = 4\mathrm{e}^0 = 4$$

Så er tangentligningen

$$y = 4 \cdot (x - 0) + 5 \Leftrightarrow 4x + 5$$

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

$STX\ matematik\ B\ maj\ 2013 - niveau, delprøve\ 2$

Opgave 7

a) Tallene a og b bestemmes vha. Maple 2016.

$with(Gym)$:
$L1 := [5, 18, 29, 46, 55, 57, 66, 72]$:; $L2 := [3.8, 3.6, 3.5, 3.4, 3.2, 3.3, 3.2, 3.1]$:

Så anvendes der lineære regression.
$f(x) := LinReg(L1, L2, x)$:
$f(x)$

$$-0.00970617780010041\,x + 3.80971873430437$$

Hermed er tallene a og b hhv.
$a = -0.00970617780010041$
$b = 3.80971873430437$

b) Der skal så løses en ligning.

$$3 = -0.00970617780010041x + 3.80971873430437 \Leftrightarrow$$
$$-0.80971873430437 = -0.00970617780010041x \Leftrightarrow$$
$$0.80971873430437 = 0.00970617780010041x \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{0.80971873430437}{0.00970617780010041} = 83.4230271668826727\,9033$$

Dvs. at der er 83 ynglepar når der er gennemsnitligt 3 kuld.

Man behøves ikke alle de decimaler, men personen bag løsningen har lidt OCD…

Opgave 8

a) Argumentet er, at vinkel B er 43^o, denne vinkel og læner sig op af den linje, som B er ved. Denne skrålinje rammer den parallelle linje, så må den tilhørende C værdi også være 43 grader, idet linjerne er parallelle og den skrålinje går fra B til C.

Da man kender vinkel A og C samt længden $|AC| = 9.8$. Hvis man bestemmer B af den indre trekant har man

$$\angle B_{indre} = 180 - \angle A - \angle C = 180 - 58 - 43 = 79$$

Så den indre vinkel må være 79^o. Derved kan man anvende sinusrelationerne til bestemmelse af $|BC|$, så man har

$$\frac{\sin(A)}{|BC|} = \frac{\sin(B)}{|AC|}$$

Værdierne indsættes og ligningen løses.

$$\frac{\sin(58)}{|BC|} = \frac{\sin(79)}{9.8} \Leftrightarrow$$
$$\sin(58) \cdot 9.8 = \sin(79) \cdot |BC| \Leftrightarrow$$
$$|BC| = \frac{\sin(58) \cdot 9.8}{\sin(79)} = 8.466$$

Så er længden $|BC|$ ca. 8.466km.

b) Arealet bestemmes vha. ½appelsinformlen.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin(C)$$

Værdierne indsættes og man har

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8.466 \cdot 9.8 \cdot \sin(43) = 28.291$$

Arealet er hermed $T_{ABC} = 28.291 km^2$

Opgave 9

a) $Metode\ 1)$

Her anvendes renteformlen.

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Her er

$$K_{10} = 13359000, K_0 = 11105000, n = 10, r = ?$$

Man indsætter sine værdier.

$$13359000 = 11105000 \cdot (1 + r)^{10} \Leftrightarrow$$
$$\frac{13359000}{11105000} = (1 + r)^{10} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[10]{\frac{13359000}{11105000}} = 1 + r \Leftrightarrow$$
$$r = \left(\sqrt[10]{\frac{13359000}{11105000}} - 1\right) \cdot 100\% = 1.865\%$$

Som er det, man skulle argumentere for!

Fortsættes næste side

$Metode\ 2)$
Hvis 1994 er $x = 0$, så er 2004 hermed $x = 10$, altså er der to x-værdier. Disse værdier har den respektive y-værdi, så tallene a og b regnes.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[10-0]{\frac{13359000}{11105000}} = 1.01865$$

Så anvendes fremskrivningsfaktoren og man får

$$a = 1 + r$$

Her indsættes a-værdien.

$$1.01865 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.01865 \Leftrightarrow r\% = 0.01865 \cdot 100\% = 1.865\%$$

Som er den værdi, man ønsker.

b) Hvis man tog udgangspunkt i metode 2, så har man

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{11105000}{1.01865^0} = 11105000$$

Så er regneforskriften

$$f(x) = 11105000 \cdot 1.01865^x$$

(En personlig bemærkning er, at man bør skrive t, som repræsenterer tiden…)

c) $Metode\ 1)$
Man anvender renteformlen. Den dobbelte værdi må være

$$K_n = 11105000 \cdot 2 = 22210000$$

Så er

$$22210000 = 11105000 \cdot (1 + 0.01865)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{22210000}{11105000} = 1.01865^n \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\frac{22210000}{11105000}\right) = n \cdot \ln(1.01865) \Leftrightarrow$$
$$n = \frac{\ln\left(\frac{22210000}{11105000}\right)}{\ln(1.01865)} = 37.511$$

Så der vil gå ca. 37.511 år før, at affaldet er fordoblet.

$Metode\ 2)$
Man anvender fordoblingskonstanten.

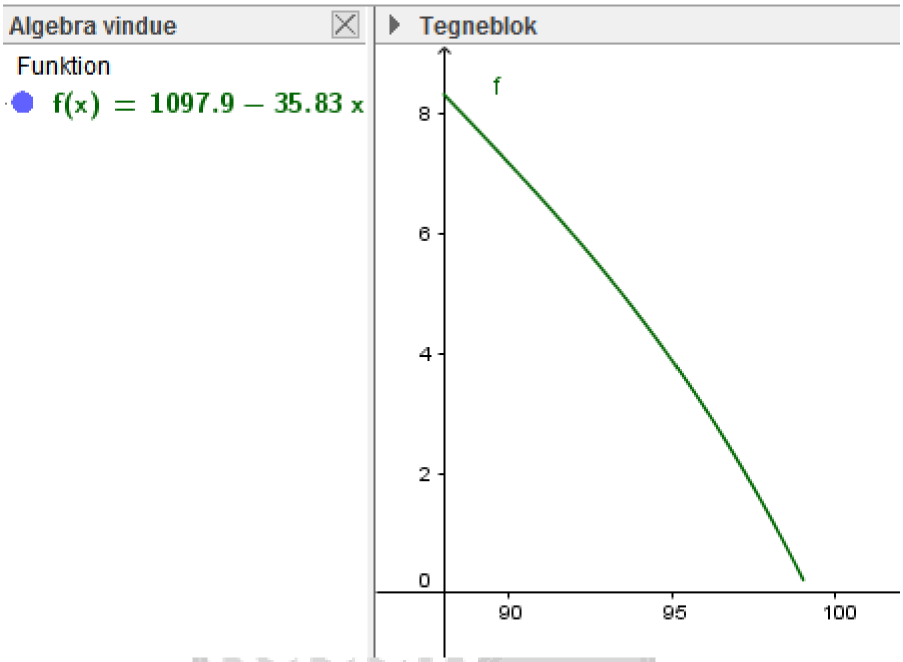
$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.01865)} = 37.511$$

Opgave 10

a) Lad den lange funktion være givet.

$$f(x) = 1097.9 - 35.8309x + 0.39877x^2 - 0.00150341x^3, \qquad 88 \leq x \leq 99$$

Så tegnes grafen.



Man indsætter 90 på x, så man får

$$f(90) = 1097.9 - 35.8309 \cdot 90 + 0.39877 \cdot 90^2 - 0.00150341 \cdot 90^3 = 7.17011$$

Så efter ca. 7 timer er temperaturen ca. 90^oF i personen.

b) Man skal løse en ligning.

$$1097.9 - 35.8309x + 0.39877x^2 - 0.00150341x^3 = 2$$

$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 97.2273$$

Så efter ca. 2 timer er temperaturen ca. 97.2273^oF

Opgave 11 - 29. maj 2013 Matematik B, GL-version

a) Da opgavekommissionen har valgt at lave en gl version, løses den også…….
Her anvendes Excel for løsning af den stillede opgave. Det ses, at der er tale om grupperede observationer.

Metode 1)
Alle oplysninger indtastes, som det ses nedenfor:

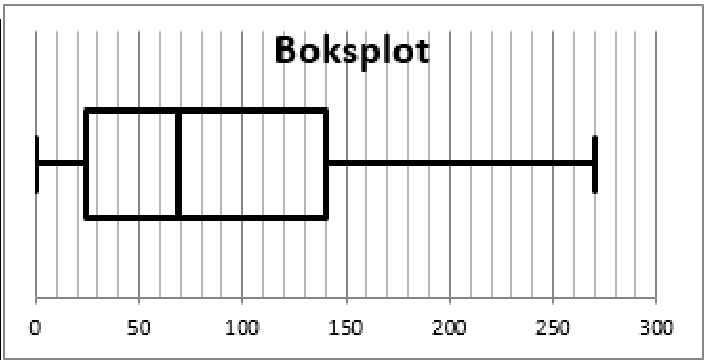
Grupperede observationer

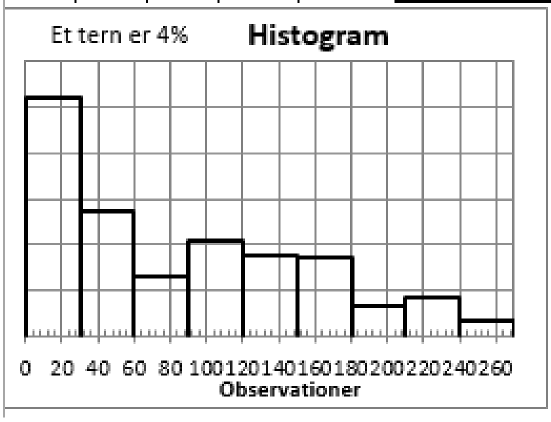
Interval

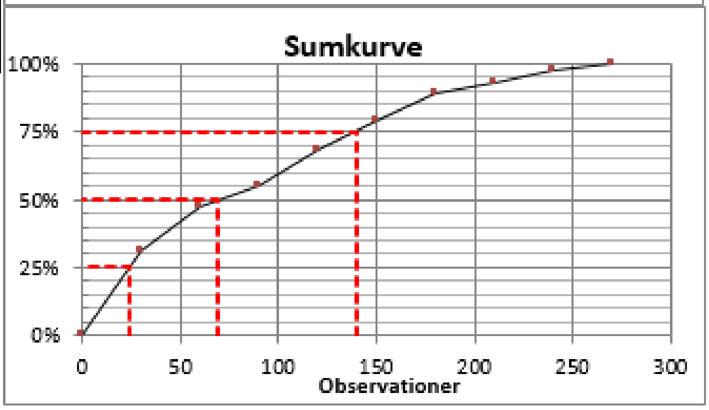
Fra	Til	Hyp.	Frekve	Kumuler
0	30	810	31%	31%
30	60	426	16%	48%
60	90	201	8%	55%
90	120	326	13%	68%
120	150	278	11%	79%
150	180	267	10%	89%
180	210	103	4%	93%
210	240	129	5%	98%
240	270	56	2%	100%

Deskriptorer

Kvartilsæt	
Mindste	0
Nedre	24,04
Median	69,25
Øvre	139,9
Største	270
Observation	Fraktil
Middeltal	86,9
Spredning	69,64







Metode 2)
Først regnes frekvenserne.

Besøgstid	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210	210-240	240-270
Antal	810	426	201	326	278	267	103	129	56
Frekvens									
Kumuleret									

Beregning af frekvensen sker på baggrund af hyppigheden divideret med det maksimale antal observationer.

$$Antal_{maks} 810 + 426 + 201 + 326 + 278 + 267 + 103 + 129 + 56 = 2596$$

Der regnes for det første del, men princippet er det samme hele vejen igennem.

$$\left(\frac{810}{2596}\right) \cdot 100\% = 31.201849 \cong 31\%$$

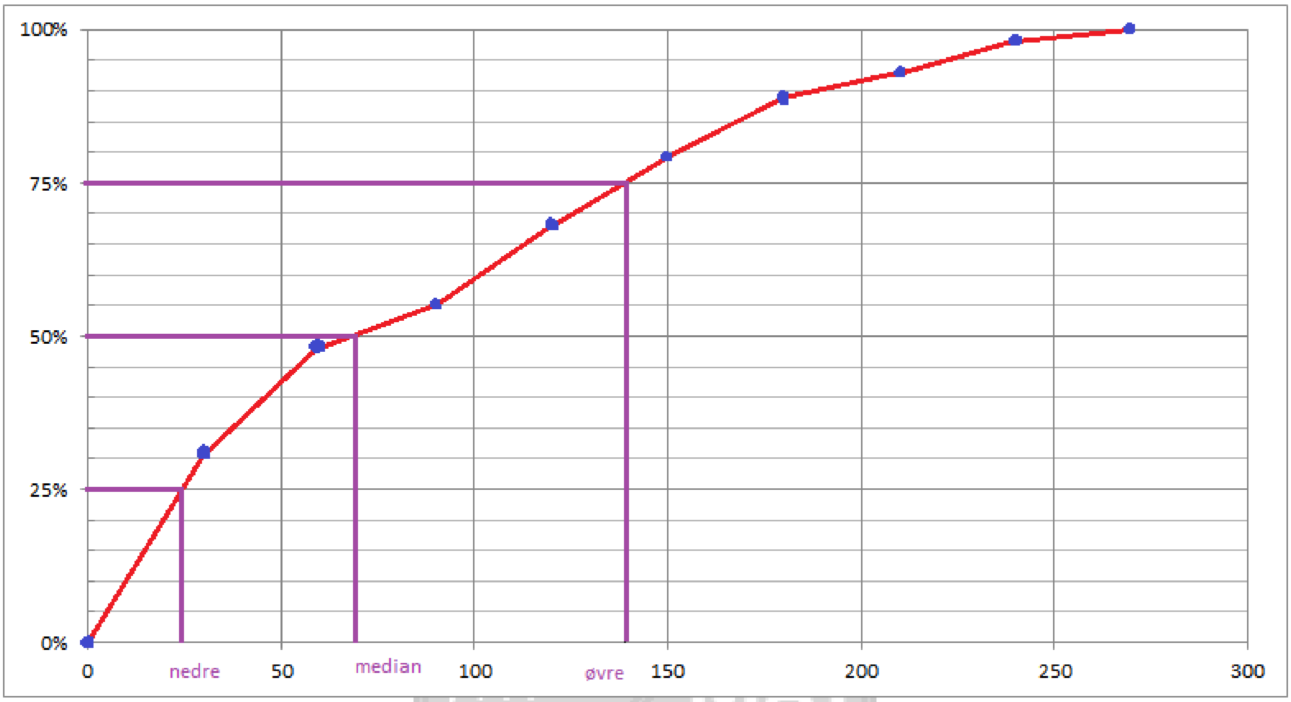
Derved udfyldes den ovenstående tabel på næste side. De kumuleret frekvenser regnes ved første frekvens + anden frekvens. Altså

$$31\% + 16\% = 48\%$$

Fortsættes næste side

Besøgstid	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210	210-240	240-270
Antal	810	426	201	326	278	267	103	129	56
Frekvens	31%	16%	8%	13%	11%	10%	4%	5%	2%
Kumuleret	31%	48%	55%	68%	79%	89%	93%	98%	100%

Da man har sine kumulerede frekvenser, er det nu muligt at konstruere en sumkurve.



b) Det ses, at 100sekunder er 60%, så er $160 = 82.5\%$ differencen tages.

$$82.5\% - 60\% = 22.5\%$$

Dvs. at den andel af personer der bruger fra 100 til 160 sekunder er ca. 22.5%.

Opgave 11 - 29. maj 2013 Matematik B

a) Populationen ses at være antallet af danske husstande hvoraf stikprøven er 800 tilfældige husstand i Danmark, der er udvalgt.

$$H_0 = Her\ er\ internetadgangen\ uændret$$

b) $Metode$ 1)

De forventede værdier regnes vha. omregning fra procent til tal vha. oplysninger fra den ”blå kasse”.

$38\% = 0.38, \quad 33\% = 0.33\%, \quad 8\% = 0.08, \quad 11\% = 0.11, \quad 10\% = 0.1$

De forventede værdier regnes.

Internetadgang	**ADSL**	**Kabelmodem**	**Fiberoptik**	**Mobilt b.**	**Ved ikke**
Antal husstande	300	235	78	106	81
Forventet	$800 \cdot 0.38 = 304$	$800 \cdot 0.33 = 264$	$800 \cdot 0.08 = 64$	$800 \cdot 0.11 = 88$	$800 \cdot 0.1 = 80$

Så anvendes der en chi-anden-test pr. håndkraft, man har så

$$\chi^2 = \frac{(O_k - F_k)^2}{F_k}$$

Man indsætter værdierne.

$$\chi^2 = \frac{(300-304)^2}{304} + \frac{(235-264)^2}{264} + \frac{(78-64)^2}{64} + \frac{(106-88)^2}{88} + \frac{(81-80)^2}{80}$$

Her er teststørrelsen

$$\chi^2 = 9.995$$

Hermed har man sin teststørrelse. Desuden er der tale om et signifikansniveau på 5%, altså aflæser man den kritiske værdi. Her ses det, at den kritiske værdi er

$$Kritiskværdi = 9.49, frihedsgrader = 4$$

Da teststørrelsen er større end den kritiske værdi, forkastes nulhypotesen. Der er altså sket en ændring fra husstand og internet.

$Metode$ 2)

$with(Gym):$

De forventede værdier regnes. Fra før har man de omregnede tal fra procent til tal.

$0.38 \cdot 800;\ 0.33 \cdot 800;\ 0.08 \cdot 800;\ 0.11 \cdot 800;\ 0.10 \cdot 800$

304.00

264.00

64.00

88.00

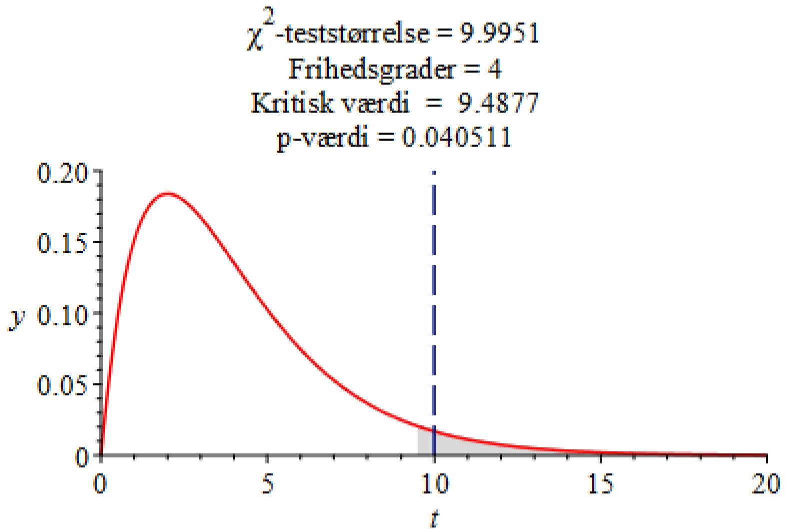
80.00

På baggrund af de forventede værdier der blev regnet, kan man definere det og udføre chi-anden-test.

Fortsættes næste side

$obs := [300, 235, 78, 106, 81] : forv := [304, 264, 64, 88, 80] :$

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$



Opgave 12

a) Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2} - 3, \quad x > 0$$

Funktionen differentieres.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{2}$$

Den løses mht. x, så man har

$$-\frac{8}{x^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -4 \quad \vee \quad x = 4$$

Her er $x > 0$, så den negative værdi forkastes. Monotoniforholdene bestemmes vha. den dobbelte afledede og man har

$$f''(x) = \frac{16}{x^3}$$

Den afledededs værdi, $x = 4$ indsættes.

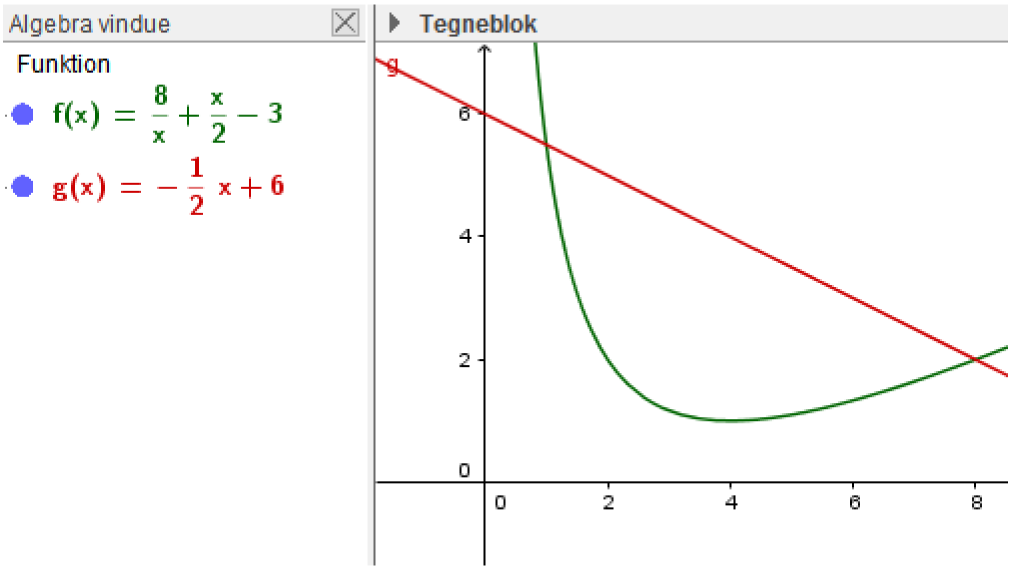
$$f''(4) = \frac{16}{4^3} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Altså er $\frac{1}{4} > 0$, dvs. lokalt minimum.

Hermed er konklusionen så, at:
f er aftagende i $]0; 4]$ og voksende i intervallet $[4; \infty[$

Fortsættes næste side

b) I GeoGebra tegnes begge funktioner.



Man løser en ligning for begge funktioner. Man har

$$-\frac{1}{2}x+6=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}-3$$

$$\Updownarrow \quad \text{Ligningen løses for } x \text{ vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$x=1 \quad \vee \quad x=8$$

Dermed anvendes integralregning og man bestemmer arealet.

$$A=\int_1^8 -\frac{1}{2}x+6-\left(\frac{8}{x}+\frac{x}{2}-3\right)dx=\left[6x-\frac{x^2}{4}-\left(8\cdot\ln(x)+\frac{x^2}{4}-3x\right)\right]_1^8$$

Så trækkes disse fra med de respektive tal og arealet fås.

$$A=6\cdot 8-\frac{8^2}{4}-\left(8\cdot\ln(8)+\frac{8^2}{4}-3\cdot 8\right)-\left(6\cdot 1-\frac{1^2}{4}-\left(8\cdot\ln(1)+\frac{1^2}{4}-3\cdot 1\right)\right)$$

$$=14.864$$

Hermed er arealet bestemt.