Opgave 1 En person indsatte et beløb på en konto i en bank til en fast årlig rente på 3,5 %. Efter 5 år står der 59 384,32 kr. på kontoen.

a) Hvor stort et beløb blev der indsat på kontoen?

En anden bank reklamerer for en konto med en fast årlig rente, hvor et beløb på 100 000 kr. vokser til 125 000 kr. på 5 år.

b) Bestem den årlige procentvise rente på denne konto.

a) Vi aflæser opgavebeskrivelsen og ser, at vi kender renten $r = 3.5\%$, samt at $K_5 = 59384.32$kr samt $n = 5$, så vi anvender renteformlen. Vi skal finde ud af, hvad der stod for 5 år siden på kontoen:

$$59384.32 = K_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{3.5}{100}\right)\right)^5 \Leftrightarrow$$

$$59384.32 = K_0 \cdot 1.1876 \Leftrightarrow$$

$$\frac{59384.32}{1.1876} = \frac{K_0 \cdot 1.1876}{1.1876} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{59384.32}{1.1876} = 50003.637$$

Man kan strengt taget sige, at der blev indsat 50000kr på kontoen for 5 år siden, hvis man ser bort fra decimaltal.

b) Her er $K_5 = 125000$, $K_0 = 100000$ og n er stadig 5år. Vi anvender renteformen og løser ligningen for r:

$$125000 = 100000 \cdot (1 + r)^5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{125000}{100000} = \frac{100000 \cdot (1 + r)^5}{100000} \Leftrightarrow$$

$$1.25 = (1 + r)^5 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[5]{1.25} = 1 + r \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[5]{1.25} - 1 = 1 + r - 1 \Leftrightarrow$$

$$r = \sqrt[5]{1.25} - 1 \Leftrightarrow$$

$$r_{\%} = \left(\sqrt[5]{1.25} - 1\right) \cdot 100\% = 4.5639\%$$

Dvs. hvis pengebeløbet skal vokse fra 100 tusinde til 125 tusinde, så skal rente være 4.56% på en 5-års periode.

Opgave 2 Udviklingen i medlemstallet for fagforbundet LO kan med tilnærmelse beskrives ved modellen

$$y = -40\,900x + 1\,400\,000\,,$$

hvor x er antal år efter 2004, og y er medlemstallet i LO.

a) Hvad fortæller tallene – 40 900 og 1 400 000 om udviklingen i medlemstallet for LO?

b) I hvilket år kommer medlemstallet under 1 000 000, hvis udviklingen fortsætter?

Kilde: POLITIKEN, 17. august 2011.

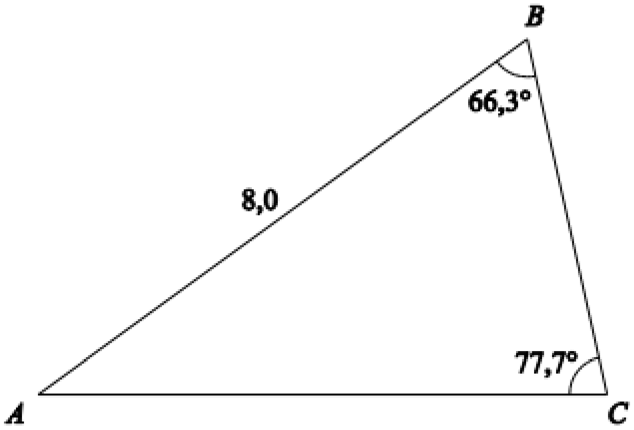
a) Her er tallene $a = -40900$ og $b = 1400000$. Tallene fortæller, at for hvert år der går fra år 2004 og frem, falder antallet af medlemmerne i LO med 40900 personer, hvoraf i år 2004 var antallet af medlemmer 1400000 personer.

b) Hvis udviklingen fortsætter, så løses ligningen:

$$1000000 = -40900 \cdot x + 1400000 \Leftrightarrow$$
$$1000000 - 1400000 = -40900 \cdot x + 1400000 - 1400000 \Leftrightarrow$$
$$-400000 = -40900 \cdot x \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{-400000}{-40900} = \frac{400000}{40900} = 9.779$$

Dvs. i slutningen af år 2013 er antallet af medlemmer faldet ti ca. 1000000 medlemmer i LO.

Opgave 3



Figuren viser trekant ABC, hvor $\angle B = 66{,}3°$, $\angle C = 77{,}7°$ og $|AB| = 8{,}0$.

a) Bestem længden af siden AC.

b) Bestem arealet af trekant ABC.

Højden fra B på siden AC deler trekant ABC i to trekanter.

c) Bestem arealet af hver af disse to trekanter.

a) Vi bestemmer længden af $|AC|$. NB: dette er vilkårlige trekanter. Vi har at $|AC|$ kan bestemmes vha. sinusrelationerne:

$$\frac{\sin(B)}{|AC|} = \frac{\sin(C)}{|AB|}$$

Vi indsætter vores kendte tal i formlen og får:

$$\frac{\sin(66.3^o)}{|AC|} = \frac{\sin(77.7^o)}{8} \Leftrightarrow \sin(66.3^o)\cdot 8 = |AC|\cdot\sin(77.7^o) \Leftrightarrow \frac{\sin(66.3^o)\cdot 8}{\sin(77.7^o)} = |AC|$$

$$\Leftrightarrow |AC| = \frac{\sin(66.3^o)\cdot 8}{\sin(77.7^o)} = 7.497$$

Dvs. længden $b = |AC|$ er 7.497.

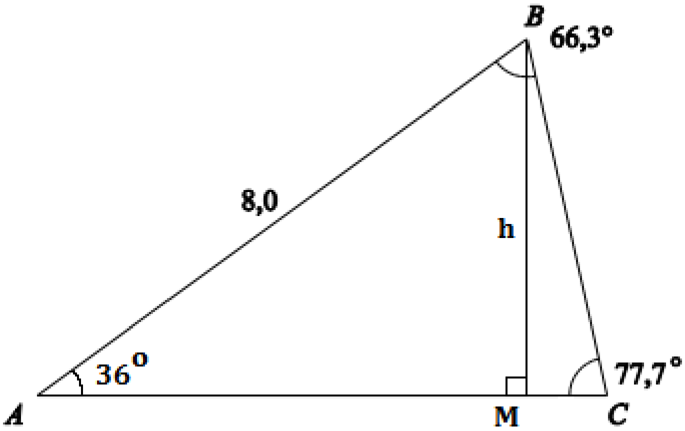
b) Vi udnytter $½ - appelsinformlen$ til denne opgave:

$$T = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\sin(A)$$

Her er $\angle A = 180^o - 66.3^o - 77.7^o = 36^o$ så arealet er:

$$T = \frac{1}{2}\cdot 7.497\cdot 8\cdot\sin(36^o) = 17.626$$

c) Vi tegner den nye trekant:



Vi bestemmer først højden $h = |BM|$. Det gør vi vha. formlen:

$$h = |BM| = |AB| \cdot \sin(A)$$

Med tallene indsat er:

$$|BM| = 8 \cdot \sin(36^o) = 4.702$$

Ved hjælp af $Pythagoras$ kan vi bestemme $|AM|$. Formlen er:

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2$$

Med tallene indsat er:

$$8^2 = |AM|^2 + 4.702^2 \Leftrightarrow |AM|^2 = 8^2 - 4.702^2 \Leftrightarrow |AM| = \sqrt{8^2 - 4.702^2} = 6.472$$

Og da vi nu har højden og grundlinjen kan vi bestemme arealet af trekant ABM og dernæst arealet af trekant BMC. Dvs.

$$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Med tallene indsat er:

$$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 4.702 \cdot 6.472 = 15.215$$

Vi kan bestemme arealet af A_{BMC} vha. formlen:

$$A_{BMC} = A_{ABC} - A_{ABM} = 17.626 - 15.215 = 2.411$$

Hermed har vi bestem arealerne af trekanterne som er:

$$A_{ABM} = 15.215 \; \& \; A_{BMC} = 2.411$$

Som er det ønskede.

Opgave 4 En undersøgelse af bækforeller har vist, at der med god tilnærmelse gælder sammenhængen

$$y = 0{,}0117 \cdot x^{2.97},$$

hvor y er vægten, målt i gram, og x er længden, målt i cm.

a) Bestem vægten af en 23 cm lang bækforel.

En lystfisker fanger to bækforeller. Den ene bækforel er 25 % længere end den anden.

b) Hvor mange procent vejer den store bækforel mere end den lille?

Kilde: Mathematik für BiologInnen, Dr. Michael Hintermüller, Universität Graz.

a) Vi har fået modellen. Her er x centimer, og vi har fået angivet $23cm$ så dette indsættes i x i modellen:

$$y = 0.0117 \cdot 23^{2.97} = 129.573$$

Dvs. bækforellen vejer $129.573g$ når den er 23cm.

b) Her anvendes formlen $F_y = F_x^a$ og da kender vi $r_x = 25\%$ så vi har ligningen:

$$(1 + r_y) = \left(1 + \left(\frac{25}{100}\right)\right)^{2.97} \Leftrightarrow$$

$$1 + r_y = 1.940 \Leftrightarrow$$

$$r_y = 0.940 \cdot 100\% = 94\%$$

Dvs. hvis den ene bækforel vejer 25% mere end den anden, så er vægten 94% større.

Opgave 5 Nedenstående tabel viser fordelingen af fødselsvægten for børn i Danmark i 2010.

Fødselsvægt (kg)	-2,5	2,5-3,0	3,0-3,5	3,5-4,0	4,0-4,5	4,5-
Procent	5,1	12,3	31,9	33,5	14,1	3,1

a) Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn en sumkurve for fordelingen.

b) Hvor mange procent af børnene vejede over 3,8 kg?

Kilde: www.statistikbanken.dk

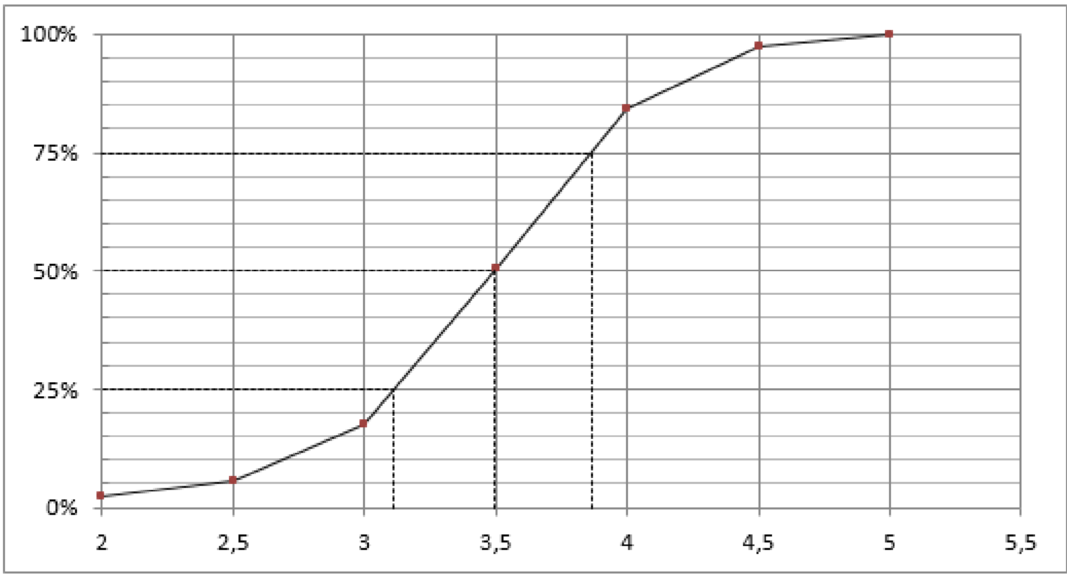
a) De kumulerede frekvenser regnes vha. procent oplysningerne, da er:

Kumuleret frekvenser	5.1%	$12.3+5.1$ $=17.4\%$	$17.4+31.9$ $=49.3\%$	$49.3+33.5$ $=82.8\%$	$82.8+14.1$ $=96.9\%$	$96.9+3.1$ $=100\%$

Dermed kan vi nu tegne en sumkurve i Excel:

$$WordMat \rightarrow Statistik \rightarrow Sumkurve$$

Og indlæs dine data:



Sumkurve 1

interval endepunkt	Kum. Frek
2,5	5%
3	17%
3,5	49%
4	83%
4,5	97%
5	100%

Nedre	3,1131
Median	3,4954
Øvre	3,8654

Godt nok ser det ikke sådan ud i Excel, men jeg har klippet og klistret i Paint så det er til at have med at gøre.

b) Vi aflæser vores graf (kan være lidt svært at læse) og ser, at 70% eller derunder vejer $3.8kg$ og da $100\%-70\%=30\%$ vil det sige, at 30% af børnene vejede $3.8kg$ eller mere.

Opgave 6 Bestanden af den lille papegøje Alexanderparakit er vokset til lidt af en plage i London.
Tabellen viser antallet af Alexander-parakitter i London.

År	2000	2005
Antal	3280	10 000

Udviklingen i antallet af Alexanderparakitter i London kan for perioden 2000-2010 med god tilnærmelse beskrives ved en eksponentiel model

$$y = b \cdot a^x,$$

hvor x angiver antal år efter 2000, og y angiver antallet af Alexanderparakitter.

a) Bestem tallene a og b.

b) Bestem antallet af Alexanderparakitter i London i 2010 ifølge modellen.

c) Bestem fordoblingstiden for antallet af Alexanderparakitter i London.

Kilde: POLITIKEN, 22. maj 2011.

a) Vi har fået angivet nogle støttepunkter så vi skal blot bestemme tallene a og b. NB: Dette er en eksponentielfunktion:

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[5-0]{\frac{10000}{3280}} = 1.249$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3280}{1.249^0} = 3280$$

Dvs. modellen er $y = 3280 \cdot 1.249^x$.

b) Vi indsætter $x = 10$ eftersom dette er år 2010:

$$y = 3280 \cdot 1.249^{10} = 30303.879$$

Dvs. i år 2010 (ifølge modellen) er antallet af Alexanderparakitter 30304.

c) Vi bestemmer fordoblingstiden:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1.249)} = 3.117$$

Dvs. hvert tredje år efter 2000 er antallet af Alexanderparakitter fordoblet.

Opgave 7 Nedenstående tabel viser antal familier i Danmark med mere end én bil, dels angivet i tusinde, dels angivet som indekstal med basisår 2008.

Årstal	2007	2008	2009
Antal familier (i tusinde)	340	364	
Indekstal		100	103,8

a) Bestem antal familier med mere end én bil i 2009.
Bestem indekstallet for 2007.

Kilde: Danmarks Statistik.

a) Vi har fået angivet en tabel. Vi skal først bestemme antallet af familier med mere end een bil i år 2009. Vi har ligningen:

$$\frac{364}{100} = \frac{x}{103.8} \Leftrightarrow 364 \cdot 103.8 = 100 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{364 \cdot 103.8}{100} = 377.832 \approx 378$$

Vi skal bestemme indekstallet. Vi har ligningen:

$$\frac{340}{y} = \frac{364}{100} \Leftrightarrow 340 \cdot 100 = 364 \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{340 \cdot 100}{364} = 93.406$$

Hermed er tabellen udfyldt:

Årstal	2007	2008	2009
Antal familier (i tusinde)	340	364	378
Indekstal	93.406	100	103.8