

FIZIKUS DIÁKKÖR PROBLÉMAMEGOLDÓ

VERSENYE 1971

ELTE TTK
Fizikus Diákkör

1972

E l ő s z ó

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikus Diákköre 1971. október 9 -től 18 -ig rendezte meg második problémamegoldó versenyét. A versenyen részt vehetett az Egyetem valamennyi nappali tagozatos hallgatója. A versenyzők a feladatokat írásban kapták meg, és a megoldáshoz bármilyen segédeszközt felhasználhattak. A verseny célja az önálló szakmai tevékenység elősegítése, egészséges versenyszellem kialakítása volt.

Az értékes díjakért köszönetet mondunk a Központi Fizikai Kutató Intézetnek, az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak és az Eötvös Loránd Tudományegyetemnek.

A versenyt Major János (Szilárdtest Fizika Tanszék, a Fizikus Diákkör oktató vezetője) szervezte meg. A problémákat összeállító és a megoldásokat bíráló Bizottság vezetője Tichy Géza (Szilárdtest Fizika Tanszék) volt, tagjai Gálfi László, Kondor Imre, Montvay István, Niedermayer Ferenc, Rácz Zoltán, Sasvári László (Elméleti Fizikai Tanszék), Gnädig Péter, Patkós András, Sükösd Csaba (Atomfizikai Tanszék), Gaál István (Műszaki Fizikai Kutató Intézet). Munkájukért köszönetet mondunk.

E kézirat tartalmazza a verseny végeredményét, a problémák szövegét és rövid megoldását. Köszönetet mondunk Sükösd Csabának a kézirat összeállításáért, Mihály László III. éves fizikus hallgatónak a kézirat megjelenéséhez nyújtott segítségéért.

Köszönet illeti Ajkai Lászlónét a kézirat gépeléséért, Balogh Józsefnét a képletek beírásáért, a Természettudományi Kar Dékáni Hivatalát a kézirat megjelenítéséért és az ELTE Sokszorosító Üzemét a nyomtatásáért.

Budapest, 1972. május 15.

Fizikus Diákkör

Készült az ELTE Sokszorosító Üzemében
240 példányban
Felelős kiadó: Dr. Simon Tibor
Felelős vezető: Szántó Endre
ELTE 72153

Az 1971. évi problémamegoldó verseny végeredménye

II. évfolyam

I. díj

Bajmóczy Ervin (I. éves matematikus hallgató)
Horváthy Péter (II. éves matematikus hallgató)

II. díj

Láz József (különdíj a 7. feladat megoldásáért)
Mihály György
Tóth Lajos

III. díj

Tél Tamás

Dicséret

Lendvai Endre

III. évfolyam

I. díj

Mihály László (különdíj a 4. feladat megoldásáért)
Takács László (különdíj a 6. feladat megoldásáért)

II. díj

Kele András
Szabó György

III. díj

Erdős Géza
Wojnarovich Ferenc

Dicséret

Kecskeméthy Károly

IV. évfolyam

I. díj

Diósi Lajos

III. díj

Csernai László

Dicséret

Molnárka Győző

V. évfolyam

I. díj

Szalay Sándor (különdíj a 3. feladat megoldásáért)

III. díj

Forgács Gábor
Ruján Pál

Dicséret

Rácz Miklós (különdíj az 1. feladat megoldásáért)
Végh László (Debrecen KLTE)

Tartalomjegyzék

Előszó	III
Az 1971. évi problémamegoldó verseny eredménye	IV
II. évfolyam feladatai	3
III. évfolyam feladatai	21
IV. évfolyam feladatai	39
V. évfolyam feladatai	54

II. évfolyam

I. feladat

Hogyan változik meg egy töltött részecske mozgása homogén mágneses térben, ha a térerősség lassan változik?

Megoldás

Ha egy periódikus mozgású rendszer valamely paramétere a periódusidőhöz képest lassan változik, mindig található egy I mennyiség, amely változatlan marad. I -t adiabatikus invariánsnak nevezzük. Ha a rendszer mozgását a kanonikus változók írják le, akkor

$$p_i, q_i$$
$$I = \oint p_i dq_i$$

adiabatikus invariáns. (ld. Landau-Lifschitz: Mechanika, 49§)
Elektromágneses térben mozgó részecskére a Lagrange függvény

$$L = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c} \underline{v} \underline{A}$$

igy a kanonikus impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i + \frac{e}{c} A_i = (p + \frac{e}{c} \underline{A})_i$$

Mivel a homogén mágneses térben mozgó részecskénél csak a térre merőleges mozgás periódikus, az adiabatikus invariáns képzésénél csak a "transzverzális" impulzust tekintjük.

$$I = \oint p_t dr = \oint (p_t + \frac{e}{c} A_t) dr$$

A Stokes tétel felhasználásával egy r sugarú körpályánál

$$I = 2 \pi r p_t + \frac{e}{c} B \pi r^2$$

Mivel

$$r = \frac{c p_t}{e B}, \quad \text{igy} \quad I = \frac{3 \pi c p_t^2}{e B}$$

Ha tehát B lassan változik, $p_t \sim \sqrt{B}$, és $r \sim \frac{1}{\sqrt{B}}$ a térrel párhuzamos impulzuskomponens pedig változatlan marad.

Megjegyzés

Az adiabatikus invarianciával kapcsolatban ld. még a Fizikus Diákkör 1970-es problémamegoldó versenyén a II. évfolyam 3. feladatát! (Oktatási segédlet 9. old)

2. feladat

Adjuk meg bolygómozgás esetén $r(t)$ paraméteres egyenletrendszerét! Mi-lyen görbe ez? (r a bolygó és a Nap távolsága, t az idő)

Megoldás. Az energia és impulzusmomentum megmaradásának tételéből indulunk ki.

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} = E, \quad (1)$$

$$m r^2 \dot{\varphi} = N. \quad (2)$$

A mozgás kupszelet, p paraméterrel és ϵ excentricitással (Budó:Mechanika 21 §)

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}, \quad (3)$$

ahol $p = \frac{N^2}{m\alpha}$ és $\epsilon = \sqrt{1 + 2 \frac{EN^2}{m\alpha^2}}$.

(1) és (2)-ből

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{N^2}{m^2 r^2}}} + C. \quad (4)$$

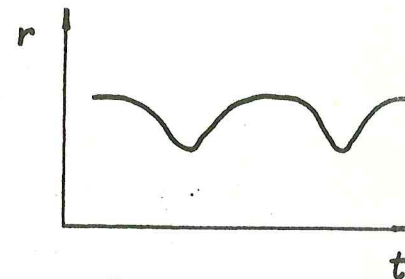
a./ Ellipszispálya esetén ezt $r - a = -a \epsilon \cos \xi$ helyettesítéssel átalakíthatjuk:

$$\left(a = \frac{\alpha}{2|\epsilon|} \right); t = \sqrt{\frac{m}{2|\epsilon|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 \epsilon^2 - (r-a)^2}} = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{\alpha}} (\xi - \epsilon \sin \xi) + C$$

Az időmérés kezdetét alkalmasan választva $C = 0$, így a keresett Paraméteres összefüggés

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi)$$

$$t = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{\alpha}} (\xi - \epsilon \sin \xi)$$



A görbe tehát egy nyújtott ciklois (1. ábra)

b./ Hiperbola pálya esetén (4) integrálása hasonló módon történik. Itt a kapott egyenletek:

$$r = a(\epsilon \operatorname{ch} \xi - 1),$$

$$t = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{\alpha}} (\epsilon \operatorname{sh} \xi - \xi).$$

Ezt "hiperbolikus cikloisnak" is nevezhetnénk.

c./ Parabola pálya esetén $\epsilon = 1$, tehát $b = \frac{N^2}{\alpha m^2}$ jelöléssel és

$$r - b = \xi^2 \text{ helyettesítéssel (4)-ből}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \xi \left(\frac{\xi^2}{3} + b \right).$$

A paraméteres egyenlet tehát

$$r = \xi^2 + b$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \xi \left(\frac{\xi^2}{3} + b \right).$$

3. feladat

Egy gépkocsi rugózatának sajátfrekvenciája ω_0 , csillapodási tényezője pedig μ . A gépkocsi olyan uton halad, ahol a szomszédos gödrök távolsága a következő elosztást követi:

annak valószínűsége, hogy két szomszédos gödör távolsága az $(x, x + dx)$ intervallumban legyen

$$p(x) dx = \lambda^2 x \cdot e^{-\lambda x} dx.$$

Vizsgáljuk a gépkocsi mozgását, amint különböző, de állandónak tekinthető sebességgel halad végig az uton. A probléma összetettségére való tekintettel modellezzük a feladatot és használjunk egyszerűsítő feltételezéseket! Becsüljük meg, hogy a valóságos folyamatok milyen szempontból térhetnek el a modelltől!

Megoldás. Tegyük fel, hogy az uton a gördök olyanok, hogy pillanatszerűen hatnak. Ekkor a szomszédos gördök között a gépkocsi mozgásegyenlete

$$m = 1 \quad \text{választással}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \dot{x} = 0$$

Ennek megoldása

$$x(t) = \operatorname{Re} \underline{A} \cdot e^{i k t} = \operatorname{Re} \underline{Z} \quad (1)$$

ahol \underline{A} és \underline{k} komplex számok (a feladat során a komplex számokat aláhúzással jelöljük,) \underline{k} kielégíti az $\omega_0^2 + \underline{k}^2 + i\mu \underline{k} = 0$ egyenletet, azaz

$$\underline{k} = \omega + i \frac{\mu}{2} \quad (2a)$$

$$\text{ahol } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}, \text{ vagyis } |\underline{k}|^2 = \omega_0^2 \quad (2b)$$

A kocsi rezgési impulzusa

$$\dot{x} = \operatorname{Im} \underline{k} \underline{Z} = -\frac{\mu}{2} x - \omega \operatorname{Im} \underline{Z} \quad (3)$$

Mint hogy az ütközések végtelenül rövid idő alatt zajlanak le, a kocsi helyét nem tudják megváltoztatni, csak az impulzusát. (3)-ból láthatjuk, hogy ekkor képzetes részét kell megváltoztatniuk. Azaz $\underline{Z}' = \underline{Z} + i I_0$, és \underline{Z}' az ütközés utáni \underline{Z} pedig az ütközés előtti állapotot jelöli.

Tegyük fel, hogy a j -edik ütközés utáni pillanatban a kocsi \underline{Z}_j állapotban van, és a $j-1$ -edik ütközés τ_j idő múlva következik be. Jelentse \underline{Z}_{j+1} a kocsi állapotát a $j+1$ -edik ütközés után. Ekkor

$$\underline{Z}_{j+1} = i I_0 + \underline{Z}_j \cdot e^{i \underline{k} \tau_j} \quad (4)$$

A kocsi állapotát t időpontban a $\underline{Z}(t)$ függvény írja le. Ennek a függvénynek az ütközések pillanatában szakadása van, az ütközések között pedig folytonos. A j és a $j+1$ -edik ütközés között például

$$\underline{Z}(t) = \underline{Z}_j \cdot e^{i \underline{k} (t - \tau_j)}$$

$\underline{Z}(t)$ várható értéke stacionárius esetben

$$\underline{Z}_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underline{Z}(t) dt \quad (5)$$

Az ütközések között ki tudunk integrálni, így

$$\underline{Z}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=-N}^{+N} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \underline{Z}_j \cdot e^{i \underline{k} (t - \tau_j)} dt}{\sum_{j=-N}^{+N} \tau_j} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{i \underline{k}} \sum_{j=-N}^{+N} \underline{Z}_j (e^{i \underline{k} \tau_{j+1}} - 1)}{\sum_{j=-N}^{+N} \tau_j} \quad (6)$$

Itt egy ütközést kiválasztottunk kezdőpontnak, az azt megelőzőket negatív, az utána következőket pozitív sorszámmal láttuk el.

$\frac{1}{2N}$ -el bővítve a (6) összefüggés átalakítható

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{i \underline{k}} \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{+N} \underline{Z}_j (e^{i \underline{k} \tau_{j+1}} - 1)}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{+N} \tau_j} \quad (7)$$

A nevezőben definíció szerűen τ_j várható értéke van. Ezt könnyű meghatározni:

Ha a kocsi v sebességgel halad, akkor két ütközés között $x = v \tau$ utat tesz meg. Ebből

$$p(x) dx = \lambda^2 x \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 (v \cdot \tau) \cdot e^{-(\lambda v) \tau} \cdot v \cdot d\tau = (\lambda v)^2 \tau \cdot e^{-(\lambda v) \tau} d\tau,$$

azaz az ütközések közötti időtartamra vonatkozó valószínűségi eloszlás

$$p(\tau) d\tau = (\lambda v)^2 \cdot \tau \cdot e^{-(\lambda v)\tau} d\tau \quad (8)$$

Ebből τ várható értéke könnyen kiszámítható

$$\langle \tau \rangle = \frac{2}{v\lambda} = t_0 \quad (9)$$

Z_0 kifejezésének (7) alakjában a számláló pedig $Z_j (e^{ik\tau_j} - 1)$ várható értéke.

Igy

$$Z_0 = \frac{1}{ik t_0} (\langle Z_j \cdot e^{ik\tau_j} \rangle - \langle Z_j \rangle)$$

Használjuk fel a (4) rekurziós összefüggést:

$$\langle Z_j e^{ik\tau_j} \rangle = \langle Z_{j+1} \rangle - i I_0 \quad (10)$$

Viszont $\langle Z_{j+1} \rangle = \langle Z_j \rangle$, hiszen a várható érték képzésekor az összes j -re kiátlagolunk, így

$$Z_0 = -\frac{I_0}{k t_0} = -\frac{I_0}{|k|^2 t_0} k^* = -\frac{I_0}{\omega_0^2 t_0} k^* \quad (11)$$

A kocsi kitérésének várható értéke v sebesség mellett

$$X_0 = \text{Re } Z_0 = -\frac{I_0 \omega}{2 \omega_0^2} v \lambda \quad (11a)$$

A rezgési sebesség várható értéke pedig

$$(\dot{x})_0 = -\frac{\mu}{2} X_0 - \omega \text{Im } Z_0 = 0 \quad (11b)$$

Ez nem meglepő dolog, hiszen egy egyszerű csillapítatlan oszcillátornál is $\langle v \rangle = 0$ (mert a test sebessége ugyanannyi ideig negatív, mint pozitív.) A rezgésre vonatkozó információt ezen mennyiségek szórásnégyzete tartalmazza.

$$\begin{aligned} \langle |Z - Z_0|^2 \rangle &= \langle (Z - Z_0)(Z^* - Z_0^*) \rangle = \langle |Z|^2 + |Z_0|^2 - Z_0 Z^* - Z_0^* Z \rangle \\ &= \langle |Z|^2 \rangle + |Z_0|^2 - 2 \text{Re } Z_0 \langle Z^* \rangle \end{aligned}$$

De felhasználva, hogy

$$\text{Re } Z_0 \langle Z^* \rangle = \text{Re } Z_0 \cdot Z_0^* = |Z_0|^2$$

kapjuk

$$\langle |Z - Z_0|^2 \rangle = \langle |Z|^2 \rangle - |Z_0|^2 \quad (12)$$

De

$$\langle |Z|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{+N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} Z_j \cdot e^{ik(t-t_j)} \cdot Z_j^* \cdot e^{-ik^*(t-t_j)} dt}{\frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{+N} \tau_j}$$

s így ez is (6) és (7) - hez hasonlóan kiszámítható.

A végeredmény

$$\langle |Z|^2 \rangle = \frac{2 I_0 \text{Im } \langle Z_{j+1} \rangle}{2 t_0 \text{Im } k} = \frac{I_0^2}{2 t_0 \text{Im } k} \quad (13)$$

A lényeges rész a $\langle Z_{j+1} \rangle$ -ben van elrejtve. Vegyük észre, hogy

$$\langle Z_{j+1} \rangle \neq \langle Z(t) \rangle = Z_0$$

$$\langle Z_{j+1} \rangle$$

a (4)-es rekurziós formula alapján

$$\langle Z_{j+1} \rangle = i I_0 + \langle Z_j \cdot e^{ik\tau_j} \rangle \quad (14)$$

Ebben az összefüggésben a jobboldalon két valószínűségi változó szerepel, a τ_j és a Z_j . A Z_j - mint mondtuk - a t_j -edik időpillanatban, közvetlenül a j -edik ütközés után lévő állapot, τ_j pedig az az időtartam, ameddig a rezgő rendszer, a j -edik és a $j+1$ -edik ütközés között szabadon rezeg. A Z_j állapotot a τ_j időtartam már nem befolyásolhatja, (csak a $k < j$ τ_k időtartamok), és a τ_j -re sincs semmi hatással az, hogy az időtartam kezdetén a kocsi milyen rezgési állapotban van, hiszen τ_j -t csak a kocsi sebessége, s az uton a j -edik és a $j+1$ -edik gödör távolsága határozza meg. Ezért Z_j és τ_j függetlenek!

Igy

$$\langle Z_j \cdot e^{ik\tau_j} \rangle = \langle Z_j \rangle \cdot \langle e^{ik\tau_j} \rangle$$

De $\langle Z_{j+1} \rangle = \langle Z_j \rangle$, tehát (14)-ből

$$\langle Z_j \rangle = \frac{i I_0}{1 - \langle e^{ik\tau_j} \rangle} \quad (15)$$

De $\langle e^{ik\tau_j} \rangle$ már a (8) valószínűségeloszlás segítségével számítható.

$$\langle e^{ik\tau_j} \rangle = \int_0^{\infty} e^{ik\tau} \cdot (\lambda v)^2 \cdot \tau \cdot e^{-(\lambda v)\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \cdot (\lambda v)^2 \tau e^{-(\lambda v + \frac{\omega}{v})\tau} d\tau$$

Látható, hogy ez a várható érték szoros kapcsolatban van a megadott valószínűségi eloszlás Fourier transzformáltjával. Éppen ez az, amit vártunk! Ha tehát a kocsi olyan sebességgel halad, hogy az uton a legvalószínűbb lökések a saját frekvenciájának megfelelően érik, legnagyobb valószínűséggel végez nagy amplitudójú rezgéseket. Ha ennél lassabban vagy gyorsabban halad, a rezgései kisebb amplitudójúak lesznek. Láthatjuk azt is, hogy a csillapítás mértéke hogyan szól bele a kritikus sebességbe, s hogyan módosítja az eloszlást. Vegyük észre, hogy a számolás során egyedül itt kell felhasználnunk $p(\tau)$ konkrét alakját, a Z_0 meghatározásakor csak $\langle \tau \rangle$ -re volt szükség. Ha tehát akármilyen más valószínűségi eloszlást veszünk, azzal kiszámolva $\langle e^{ik\tau_j} \rangle$ -t, s visszahelyettesítve rendre a (15), (13) és (12) képletekbe, a kívánt mennyiség meghatározható.

Vizsgáljuk meg, hogy közelítésünk milyen hibákat tartalmaz:

a. / a gödrök lökéseit pillanatszerűeknek vettük, amely kis sebességek esetén biztosan rossz.

b. / a gödrök lökéseit sebességfüggetlennek vettük nagy sebességek esetén, s ez sem fedi a valóságot. A valóságos helyzet az, hogy - geometriai okonál fogva - nagyobb sebességek esetén a keréknek nincs ideje teljesen belesüllyedni a gödörbe, azaz a kocsi kisebb effektív gödörmélységet érez. Természetesen ekkor az átvett impulzus is csökken. Ha ezt az effektust nem vesszük figyelembe nagy sebességek esetén a kocsi nagyon rövid idő alatt nagyon nagy impulzust is kaphat, s ez divergenciákhoz vezet. Ez az oka annak, hogy (11 a) képletben $v \rightarrow \infty$ mellett $X_0 \rightarrow \infty$ adódik.

c. / Maradjunk még a (11a) képletnél! Bár a megoldás szempontjából semmi jelentősége nincs, értelemzavaró lehet, hogy X_0 -ra negatív értékek jöttek ki. Ez kizárólag I_0 irányításától függ.

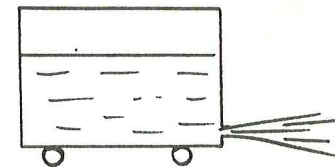
A gödrök hatását mi "lefelé" irányuló impulzusokkal vettük figyelembe. A gödrök hatása tulajdonképpen mindig két impulzusból áll: egy lefelé és felfelé mutatóból. Lefelé akkor kap impulzust a kocsi, amikor beleesik a gödörbe, felfelé pedig akkor, amikor kijön belőle. A gödrök konkrét alakjától függ, hogy melyik impulzus dominál.

Mind az a. / és a b. / mind pedig a c. / hiányosságát figyelembe vehetnénk, ha az

I_0 impulzusnagyságot a sebesség, gödör alak, stb. függvényeként kifejeznénk. Ez azonban a konkrét esetekben nehéz feladat.

4. feladat

Egy kerekeken guruló tartály maximálisan p_{max} nyomást bír ki. A tartályban víz, és a víz felett nagynyomású levegő helyezkedik el. Az edény falán egy nyílás van, amelyen keresztül kilövellt víz mozgathatja a kocsit. Mennyi vizet kell kezdetben beletölteni, hogy a végsebesség a legnagyobb legyen? (2. ábra)



(2. ábra)

Megoldás

A feladat megoldásakor eltekintünk a surlódástól, a viznek a tartályon belüli mozgásától s a nyomás kiszámításánál is csak a gáz nyomását vesszük figyelembe. Legyen M_s a kocsi saját tömege és a tartály térfogata pedig V . Ezek után egyetlen szabad paraméter maradt: a gáz kezdeti térfogatának (V_0) és a teljes térfogatnak az aránya.

Az impulzustételből a kocsi sebességének megváltozására kapjuk:

$$dV = -u \cdot \frac{dM}{M} \quad (1)$$

ahol u a kilőtt víz sebessége a kocsihoz képest, M a kocsi pillanatnyi tömege. M és u között azonban kapcsolat van, melyet a Boyle-Mariotte és a Bernoulli törvény segítségével írhatunk fel.

$$u^2 = \frac{2p}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{M(0) - M}{\rho V_0} + 1}$$

ahol p a kezdeti nyomás, ρ a víz sűrűsége, s $M(0)$ a kocsi teljes kezdeti tömege. (A gáz tömegét elhanyagoljuk.)

M_s és V bevezetésével u^2 így is írható:

$$u^2 = \frac{2p}{\rho} \cdot \frac{\rho V_0}{M_s + \rho V - M}$$

Ezt az (1) differenciálegyenletbe téve és 0-tól V_{max} -ig, illetve $M(0)$ -tól M_s -ig integrálva kapjuk:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \frac{1}{XC} \ln \left(\frac{XC-1}{XC+1} \cdot \frac{C+1}{C-1} \right) \quad (2)$$

ahol

$$X = \sqrt{\frac{V}{V_0}} \quad \text{és} \quad C = \sqrt{1 + \frac{M_s}{\rho V}}$$

Eredményünkből látszik, hogy a legnagyobb végsebesség eléréséhez a kezdeti nyomást a megengedett legnagyobbra, a kocsi saját tömegét az elérhető legkisebbre kell választanunk. Hátra van még V_{max} maximumának megkeresése adott p, ρ, C mellett X függvényében. Ez csak numerikusan végezhető el. Nagyságrendi becslést kaphatunk, ha V_{max} -ot sorbafejtjük $x = 1$ körül, ill. $x \rightarrow \infty$ -re, és a két képletet összehasonlítjuk.

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \frac{2}{c^2-1} (x-1) + \dots, \quad \text{ha} \quad x = 1 + \epsilon \quad \text{és} \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

$$\text{és} \quad v_{max} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \frac{1}{XC} \ln \frac{c+1}{c-1}, \quad \text{ha} \quad x \gg 1$$

A két eset nyilvánvalóan annak felel meg, hogy kezdetben túl kevés, ill. túl sok vizet töltöttünk a tartályba. (A két határesetnek megfelelő függvényeket a 3. ábrán rajzoltuk fel, s maximumként ezek metszéspontját vesszük.)

Ilyen módon az optimális

X -re a következő tájé-

koztató jellegű becslést kap-

hatjuk:

$$X_{opt} \sim \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + 2 \frac{c^2-1}{c} \ln \frac{c+1}{c-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

és ez minden ésszerű C ér-

tékre közel esik

$$X_{opt} \sim 1 + \frac{c^2-1}{2c} \ln \frac{c+1}{c-1}$$

értékéhez, s így az elérhető maximális sebességre a

$$V_{max} \sim \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \cdot \frac{1}{C} \ln \frac{c+1}{c-1} \quad \text{becslés adódik.}$$

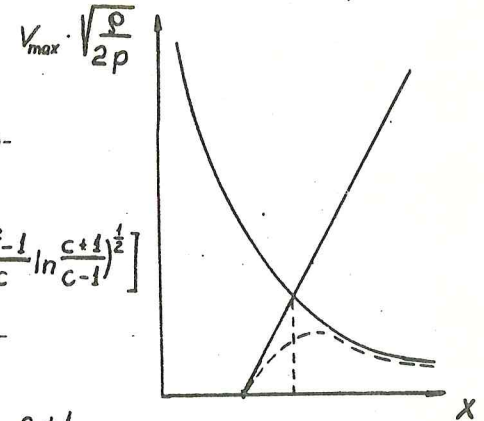
5. feladat

Milyen görbéket írhat le a műholdat a Föld középpontjával összekötő egyenes metszéspontja a Föld felszínén?

Megoldás

Legyen $K(x, y, z)$ az inerciarendszer (amelyikben a Föld súlypontját állónak képzeljük), $K'(x', y', z')$ a műholdhoz rögzített koordinátarendszer, $K''(x'', y'', z'')$ a Földdel együtt forgó. Legyen a három origó ugyanabban a pontban, és $z'' = z$.

a. / Először vizsgáljuk a körpályán mozgó műholdat! $x' = R$ és $y' = z' = 0$ lehet. A K -ban K' helyzetét meghatározó szokásos Euler-szögek ψ, φ, θ . Viszont ψ -t lehet nullának választani, ekkor $\psi =$ állandó, $\varphi = 0$ és $\theta = \Omega t$ (Ω a műhold szögsebessége.)



3. ábra

Ekkor tehát

$$x = R \cdot \cos \Omega t, \quad y = R \sin \Omega t \cdot \cos \psi \quad \text{és} \quad z = R \cdot \sin \Omega t \cdot \sin \psi$$

Mivel

$$z'' = z, \quad x' = x \cdot \cos \omega t + y \sin \omega t, \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

(itt ω a Föld szögsebessége), így

$$\cos \theta = \frac{z'}{R} = \sin \Omega t \cdot \sin \psi$$

$$\text{és} \quad \text{ctg} \phi = \frac{x''}{y'} = \frac{\cos \omega t \cdot \cos \Omega t + \sin \omega t \cdot \sin \Omega t \cdot \cos \psi}{-\sin \omega t \cdot \cos \Omega t + \cos \omega t \cdot \sin \Omega t \cdot \cos \psi}, \quad \text{ahol}$$

z'', θ és ϕ a szokásos polárkoordináták. A feladat földrajzi jellegéből adódóan ϕ a földrajzi hosszúság, $|\frac{\lambda}{2} - \theta|$ pedig a földrajzi szélességnek felel meg.

A ϕ -re felírt egyenlethől

$$\sin \phi = \frac{(1 - \cos \psi) \sin 2\omega t}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \psi) + 2(1 - \cos^2 \psi) \cos 2\omega t}}$$

b. / Ellipszis pálya esetén az általános görbe felírása már bonyolultabb. Egy lehetséges eljárás a következő:

A fentiekben Ωt helyett $[\Omega_0 t + E(t)]$ -t írunk, ahol Ω_0 a műhold átlagos szögsebessége, $E(t)$ egy $\frac{2\pi}{T_0}$ szerint periódikus függvény. A pálya egyenlete a z' -re merőleges síkban

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cdot \cos \varphi} \quad \text{és} \quad \varphi = \Omega_0 t + E(t)$$

Az impulzus momentum megmaradás pedig

$$r^2 \dot{\varphi} = r^2 [\Omega_0 + \dot{E}(t)] = \text{állandó}$$

Ebből a két egyenlethől $E(t)$ meghatározható.

$E(t)$ fizikailag azt írja le, hogy az ellipszispálya távoli részén a műhold lemarad, a közeli részén pedig előresiet a körpályához képest.

6. feladat

Tételezzük fel, hogy az erőhatás véges c sebességgel terjed. Ebben az esetben az $m \ddot{r}(t) = f[r(t)]$ Newton egyenlet helyett az $m \ddot{r}(t) = f[r(t) - \frac{r}{c}]$ egyenlet érvényes. Mekkora Merkúr perihélium-precessziót lehet ezzel magyarázni? ($c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$)

Megoldás

A bolygó mozgását az

$$\ddot{r} = \frac{\alpha}{|r(t - \frac{r}{c})|^3} \cdot r(t - \frac{r}{c}) \quad (1)$$

egyenlet írja le. Amennyiben $|\dot{r}| \ll c$, úgy az

$$r(t - \frac{r}{c}) = r(t) - \frac{r}{c} \dot{r}(t) + \dots \quad (2)$$

sorfejtésben megállhatunk a második tagnál. Ekkor (1) helyett

$$\ddot{r}(t) = -\frac{\alpha}{r^3} \left(r - \frac{r}{c} \dot{r} + \frac{3r}{c^2} \frac{r \dot{r}}{r} \right) \quad (3)$$

egyenletet kell megoldanunk, amely síkbeli polár koordinátarendszerben

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\lambda}{r^2} \dot{r} \quad (4)$$

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} = \frac{\lambda}{r} \dot{\varphi} \quad (5)$$

alaku. (Bevezettük a $\lambda = \frac{\alpha}{c}$ jelölést és a továbbiakban λ magabbb hatványait elhanyagoljuk.)

(5) r -rel szorozva közvetlenül integrálható,

$$r^2 \dot{\varphi} = M + \lambda \varphi \tag{6}$$

amely arra utal, hogy a $\varphi = 0$ -hoz tartozó M impulzusmomentum nem marad állandó, hanem φ -vel arányosan nő.

(4)-et \dot{r}^2 -tal, (5)-t $r \dot{\varphi}$ -tal szorozva és összeadva az energiáté telhez hasonló egyenletet kapunk.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} \right] = \lambda \left(\dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{r}^2}{r} \right) \tag{7}$$

Ebből kiderül, hogy a rendszer energiája sem mozgásállandó.

$\dot{\varphi}$ -t (6)-ból kifejezhetjük

$$\dot{\varphi} = \frac{M + \lambda \varphi}{r^2} \tag{8}$$

és (7)-be helyettesítjük

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} + \lambda \frac{M\varphi}{r^2} \right) = \lambda \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{2\dot{r}^2}{r} \right) \tag{9}$$

$\lambda = 0$ esethez az ismert Kepler-probléma megoldása tartozik, azaz

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2}; \quad \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} = E \tag{10}$$

ahonnan

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{11}$$

melynek integrálja

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \tag{12}$$

$$p = \frac{M^2}{\alpha} \quad \text{és} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\alpha^2}} \tag{12}$$

(9) megoldása csak λ -vel arányos kifejezésben tér el (11)-től, ezért (9) jobboldalán és a baloldali utolsó tagjában - mivel ezek λ -val szorozódnak - nyugodtan vehetjük az ellipszis egyenletét. Ekkor azonban (9) jobboldala is teljes időderiválttá alakítható.

$$\lambda \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{2\dot{r}^2}{r} \right) = - \frac{d}{dt} \lambda U(r) \tag{13}$$

ahol

$$\lambda U(r) = - \lambda \int_{r_{\max}}^r \frac{dr}{\dot{r}} \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{2\dot{r}^2}{r} \right) = - \lambda \int_{r_{\max}}^r \frac{3M^2}{r^2} - 4 \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{dr}{r^2 \sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{14}$$

Ezek után integráljuk (9)-t is

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} + \lambda \left(\frac{M\varphi(r)}{r^2} + U(r) \right) = E \tag{15}$$

Az integrációs állandókat úgy választottuk meg, hogy $\varphi = 0$ -nál, azaz

$$r = r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{\alpha}{M^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^4} + \frac{2E^2}{M^2}}$$

értéknél $U(r)$ zérus, és a rendszer energiája E legyen.

(15) ezek után (8) segítségével átírható.

$$d\varphi = \frac{\frac{M + \lambda \varphi(r)}{r^2} dr}{\sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2} - \lambda \left[2U(r) + \frac{M}{r^2} \varphi(r) \right]}} \tag{16}$$

alakra, amelyet a nevező zérushelyei r_{max} és r_{min} között integrálva megkapjuk a pálya elfordulását egy fél keringés alatt.

$$\pi + \Delta\psi = \int_{r_{max}}^{r_{min}} \frac{\frac{M}{r^2} + \lambda \frac{\varphi(r)}{r^2}}{\sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2} - \lambda(2U + \frac{M}{r^2}\varphi)}} dr \quad (17)$$

A számláló második tagjának

$$\Delta\psi_1 = \int_{r_{max}}^{r_{min}} \frac{\lambda \frac{\varphi(r)}{r^2} dr}{\sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

felel meg, ami (10) és (11) helyettesítéssel könnyen integrálható:

$$\Delta\psi_1 = \int_0^\pi \frac{\lambda}{M} \varphi d\varphi = \frac{1\pi^2}{2M} \quad (18)$$

(17) első tagja a következő azonosság segítségével számítható:

$$\int_{r_{max}}^{r_{min}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2} - \lambda(2U + \frac{M}{r^2}\varphi)}} = -\frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr \sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2} - \lambda(2U + \frac{M}{r^2}\varphi)}$$

Fejtsük sorba λ szerint! A $\lambda = 0$ -hoz tartozó kifejezés éppen

π -t ad, így

$$\Delta\psi_2 = \Delta\psi - \Delta\psi_1 - \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{max}}^{r_{min}} \frac{(U + \frac{M_0}{2r^2}\varphi) dr}{\sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} \Big|_{M_0=M} \quad (19)$$

Áttérve φ szerinti integrálásra (11)-nek megfelelően:

$$\Delta\psi_2 = \lambda \frac{\partial}{\partial M} \int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{r^2}{M} (U + \frac{M_0}{2r^2}\varphi) \Big|_{M_0=M}$$

A második tag közvetlenül számítható

$$\lambda \frac{\partial}{\partial M} \int_0^\pi \varphi d\varphi \cdot \frac{M_0}{M} = -\frac{\lambda\pi^2}{2M} \quad (20)$$

Az első tag meghatározásához szükség van $U(\varphi)$ közvetlen kiszámítására. (14) integrálta (11) helyettesítéssel végezhetjük el.

$$U = - \int_0^{\varphi} \frac{[\frac{3M^2}{r^2} - 4(E + \frac{\alpha}{r})]}{\lambda^2 \sqrt{2(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} dr = -\frac{1}{M} \int_0^\varphi d\varphi \left[\frac{3M^2}{r^2} (1 - \epsilon \cos \varphi)^2 - 4E - \frac{4\alpha}{p} (1 - \epsilon \cos \varphi) \right] = -\frac{\alpha^2}{M^3} \left[(1 - \frac{\epsilon^2}{2})\varphi - 2\epsilon \sin \varphi + \frac{3\epsilon^2}{4} \sin 2\varphi \right] \quad (21)$$

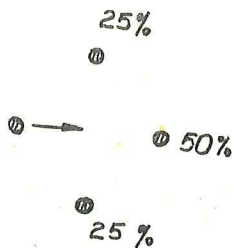
Behelyettesítve (19) első tagjába (21) értékét

$$-\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial M} \int_0^\pi d\varphi \frac{(1 - \frac{\epsilon^2}{2})\varphi - 2\epsilon \sin \varphi + \frac{3\epsilon^2}{4} \sin 2\varphi}{(1 - \epsilon \cos \varphi)^2}$$

adódik, ahol természetesen figyelembe kell vennünk, hogy $\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\epsilon^2 - 1}{EM} \approx \frac{\epsilon^2 - 1}{EM} \frac{\lambda}{M}$ értékével. Mivel szemben az általános relativitás elmélet $6\pi (\frac{\lambda}{M})^2$ értékével. Mivel $\frac{1}{M} \sim 1,7 \cdot 10^{10}$ a fenti számítás hozzávetőleg a kísérleti érték 3000-szeresét adja. A nagyságrendi eltérés oka az, hogy míg a relativitáselmélet csak $\frac{1}{c}$ rendű korrekciót jelent a klasszikus mechanikához képest, addig az erő retardálásának hatása már $\frac{1}{c^2}$ -ben jelentkezik.

7. feladat

Egy síkbeli négyzetrácsban egy részecske bolyong. Annak a valószínűsége, hogy a következő lépést az előző irányába teszi meg 50 százalék, hogy visszalép 0. Az előző lépésre merőleges irányba lépés valószínűsége 25-25 százalék. Mekkora az \bar{x} (átlagos elmozdulás), és \bar{x}^2 , N lépés után? (Az első lépést jobbra teszi meg)



4. ábra

Megoldás

Legyen rendre a_i, b_i, c_i, c_i annak valószínűsége, hogy a részecske első lépésének irányában folytatja útját, megfordul, jobbra illetve balra lép. Jelöljük \vec{e}_i -vel az i -edik lépés vektorát ($|\vec{e}_i| = 1$), N lépés után a részecske helyvektora

$$\vec{r} = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{e}_i$$

Először \vec{r} -t számítjuk ki.

A feladat szimmetriájából következik, hogy ha az első lépés az x tengely irányában történt, akkor $r_y = 0$ -nel annak a valószínűségét, hogy az $a_x^0 = 1$, $a_y^0 = 0$ kezdeti feltételek mellett az n -edik lépés $+x$ illetve $-x$ irányban történik. A n -edik lépésben az átlagos elmozdulás

$$\frac{\bar{e}_x^n}{\bar{e}_x^n} = a_n - b_n$$

könnyen kiszámítható

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_1 + 2c_{n-1} \cdot c_1 + b_{n-1} \cdot b_1$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot a_1 + 2c_{n-1} \cdot c_1 + a_{n-1} \cdot b_1$$

Kivonva egymásból

$$\frac{\bar{e}_x^n}{\bar{e}_x^n} = a_n - b_n = (a_{n-1} - b_{n-1})(a_1 - b_1) = q^n \quad (1)$$

Igy \bar{r}_{xN-1} kiszámítható

$$\bar{r}_x = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{e}_x^n = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$$

A feladatban

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\bar{r}_x = 2 \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)$$

A feladat második részében

\bar{r}_x^2 -t számoljuk ki.

$$\bar{r}^2 = \sum_{i,j=0}^{N-1} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = N + \sum_{i \neq j} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \quad (2)$$

Könnyen belátható, hogy $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = f(|i-j|)$. Gondoljunk például arra, hogy az n és $n+1$ -edik lépés átlagos skalárszorzata $a_n - b_n$ lesz függetlenül az n értékétől, hiszen az n -edik lépésben a részecske valamire lépett, s a_1 annak a valószínűsége, hogy tovább lép, b_1 pedig hogy visszafelé lép. Tehát a_1 valószínűséggel $+1$, b_1 valószínűséggel -1 lesz a skalárszorzat. (Ha oldalt lép a részecske, a skalárszorzat 0.)

$f(n)$ kiszámítható, mint nulladik és az n -edik lépés átlagos skalárszorzata.

$$f(n) = \vec{e}_x^0 \cdot \vec{e}_x^n + \vec{e}_y^0 \cdot \vec{e}_y^n = \vec{e}_x^n = a_n - b_n = (a_1 - b_1)^n = q^n$$

(2) -ben az olyan skalárszorzatok száma, ahol a lépések távolsága n $2(N-n)$ így (2) a következő alakban írható:

$$\bar{r}^2 = N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (N-n)f(n) = N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (N-n)q^n$$

Az összeg kiszámítható

$$\bar{r}^2 = N \frac{1+q}{1-q} - 2q \frac{1-q^N}{(1-q)^2}$$

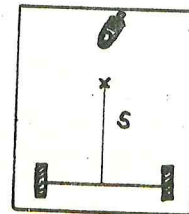
illetve a feladat számértékeivel

$$\bar{r}^2 = 3N - 4 + \frac{1}{2^{N-2}}$$

III. évfolyam

1. feladat

Egy \odot tehetetlenségi nyomatékú (súlypontra vonatkoztatva), m tömegű két-kerekű kis kocsí súlypontja s távol van a tengely felezőpontjától. A tengelyen a két kerék szabadon forog. A kocsí felbillenését a harmadik **önbeálló** kerék akadályozza meg. Hogyan mozog a kocsí vízszintes talajon?



5. ábra

Megoldás

Vegyük fel a 6. ábrán látható koordinátarendszert! A rendszert a tengely felezőpontjának x, y koordinátáival és az SP szakasz ψ szögével jellemezzük. A Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2} m [(\dot{x} - s\dot{\psi} \sin\psi)^2 + (\dot{y} + s\dot{\psi} \cos\psi)^2] + \frac{1}{2} \theta \dot{\psi}^2$$

Ehhez járul a $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ anholonom mellékfeltétel, amely

$$dy \cos\psi - dx \cdot \sin\psi = 0 \quad (1)$$

felelő mozgásegyenletek:

$$\frac{d}{dt} m(\dot{x} - s\dot{\psi} \sin\psi) + \lambda \sin\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt} m(\dot{y} + s\dot{\psi} \cos\psi) - \lambda \cos\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt} (ms^2\dot{\psi} + \theta\dot{\psi}) + ms\dot{\psi}(\dot{x} \cos\psi + \dot{y} \sin\psi) = 0$$

Vezessük be \dot{x} és \dot{y} helyett a P pont sebességét független változóként az $u = \dot{x} \cos\psi + \dot{y} \sin\psi$ definícióval.

Ekkor a mozgásegyenletek

$$(ms^2 + \theta)\ddot{\psi} + ms\dot{\psi}u = 0, \quad \dot{u} - s\dot{\psi}^2 = 0$$

alakra hozhatók. Bevezetve az $1 + \frac{\theta}{ms^2} = k^2$ és $\dot{\psi} = \omega$ jelöléseket

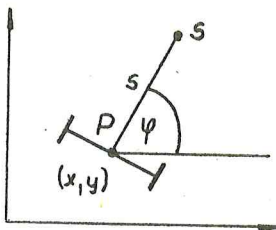
$$k^2 s \dot{\omega} + u \omega = 0 \quad (2)$$

$$\dot{u} = s \omega^2 \quad (3)$$

egyenleteket kapjuk. (2)-ből kifejezve u -t és (3)-ba behelyettesítve

$k^2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}}{\omega} \right) = -\omega^2$ adódik. Ez $\frac{\dot{u}}{\omega}$ -val való szorzás után integrálható, $k^2 \left(\frac{\dot{u}}{\omega} \right)^2 = k^2 c^2 - \omega^2$, ahonnan

$$k \dot{\omega} = \omega \sqrt{k^2 c^2 - \omega^2}$$



6. ábra

alakba írható. A meg-

Bevezetve az

$$\omega(t) = kc \cdot \cos\psi(t) \quad (4)$$

jelölést, a ψ -re adódó

$$\dot{\psi} = c \cos\psi \quad (5)$$

differenciálegyenlet megoldása

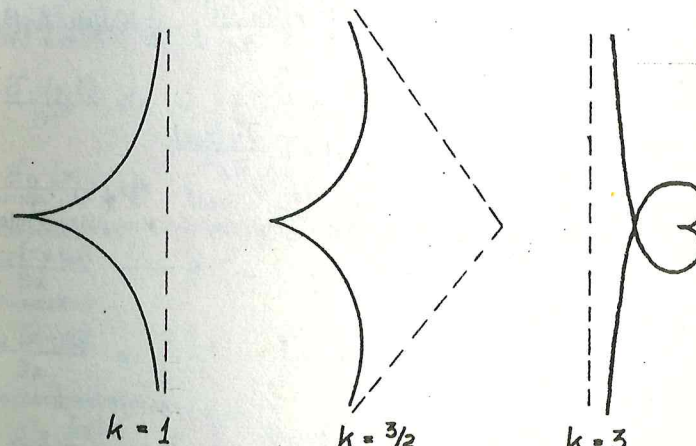
$$ct = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi} \quad (6)$$

Ez az implicit egyenlet meghatározza $\psi(t)$ -t, ebből pedig (4) és (2) alapján $\dot{\psi}(t)$ és $u(t)$ is megkapható.

(4) és (5) összehasonlításából látható, hogy $\dot{\psi} = k\omega$. Mint az (6)-ból kitűnik, $t \rightarrow \pm \infty$ -re $\psi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$, és így a pálya aszimptotái

$$\psi(\pm \infty) = \pm k \frac{\pi}{2}$$

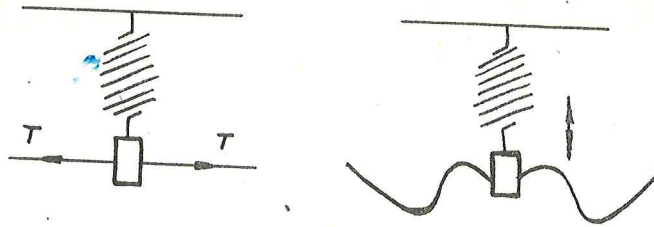
k értékétől függően a mozgás jellegére a 7. ábrán látható pályák utalnak.



7. ábra

2. feladat

Egy K direkciós erejű rugón függ egy M tömeg, amelyet jobbra és balra egy-egy (hosszuságegységként μ tömegű) igen hosszú fonál feszít T feszítő erővel. Ha az M tömeget rezgésbe hozzuk, akkor az a hozzákapcsolt fonalak miatt csillapított rezgőmozgást végez. Számoljuk ki a csillapítási állandót!



8. ábra

Megoldás

A rezgő tömegből és a fonalakkból álló rendszer Lagrange függvénye.

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (\mu + M\delta(x)) \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} K\delta(x) y^2(x,t) \right] dx \quad (1)$$

alakú, amelyből a

$$[\mu + M\delta(x)] \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -k\delta(x)y(x,t) + T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

Euler-Lagrange egyenletet nyerjük. A megoldást először $x \neq 0$ tartományban keressük meg. A fenti feltétel figyelembevételével a mozgásegyenlet egydimenziós hullámegyenlet.

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

melynek megoldása

$$y_1 = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

jobbra haladó és

$$y_2 = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

balra haladó hullám, ahol

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ha az M tömeget nyugalmi helyzetéből kizozditjuk, csillapódó rezgőmozgást végez, és olyan hullámokat kelt, a kótelben, melyek az M tömegű testtől $|x|$ nagyobb értékei felé haladnak. Elképzélhető, az ellenkező eset is, amikor a végtelenből jövő hullámok gerjesztik a rugóra feszített testet. A kifelé haladó hullámok egyenlete

$$y = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ ha } x > 0, \text{ és}$$

$$y = g\left(t + \frac{x}{c}\right), \text{ ha } x < 0.$$

Az $x = 0$ helyen mindkét megoldásnak ugyanazt az értéket kell felvennie, tehát $f(t) = g(t)$ s a feladat szimmetriájából következően a két függvény megegyezik. Vagyis

$$y = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ ha } x > 0, \text{ és}$$

$$y = f\left(t + \frac{x}{c}\right), \text{ ha } x < 0.$$

Ezután térjük át az $x = 0$ pont körüli vizsgálatokra és vizsgáljuk meg az M tömegű test mozgását. Integráljuk a (2) Euler-Lagrange egyenletet a $(-\epsilon, \epsilon)$ intervallumra, majd végezzük el az $\epsilon \rightarrow 0$ határátmenetet!

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f''(t) dx \rightarrow 0$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{\partial y(x+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x-0,t)}{\partial x}$$

Felhasználva az $y = f\left(t - \frac{|x|}{c}\right)$ megoldást

$$\frac{\partial y(x+0,t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} f' = -\frac{1}{c} \frac{\partial y(ct)}{\partial t},$$

és hasonlóan

$$\frac{\partial y(x-0,t)}{\partial x} = \frac{1}{c} f' = \frac{1}{c} \frac{\partial y(ct)}{\partial t}$$

Mozgásegyenletre az

$$M \frac{\partial^2 y(ct)}{\partial t^2} + 2 \frac{T}{c} \frac{\partial y(ct)}{\partial t} + ky(ct) = 0$$

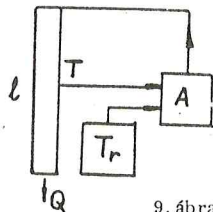
kifejezést kapjuk, amely egy csillapított rezgőmozgás egyenlete. A fenti képletből leolvashatjuk a csillapítás tényezőit.

$$\beta = \frac{T}{cM} = \frac{\sqrt{T\mu}}{M}$$

3. feladat

A feladat során lineáris szabályozó rendszerek tulajdonságait vizsgáljuk. Egy hőmérsékletstabilizátor a következő felépítésű: egy l hosszúságú, hosszegységenként C hőkapacitású, κ hővezetőképességű rud, egyik végén elhanyagolható hőkapacitású kályha van, amely nagyon jó termikus kontak - tusban van a ruddal. A rud közepén mérjük a stabilizálni kívánt T hőmérsék - letet, a rud másik végét pedig hűtjük. A hűtés első közelítésben független a rud hő - mérsékletétől és dt idő alatt $Q dt$ hőmennyiséget szállít el. A stabili - zátorhoz tartozik még egy T_r referencia-előállító és egy teljesítményerő - sítő, mely a kályhát fűtését vezérli. A kályhára jutó fűtőteljesítményt a következő függvény írja le:

$$W = \begin{cases} W_0, & \text{ha } (T_r - T) \geq \frac{W_0}{A} \\ A (T_r - T), & \text{ha } 0 < T_r - T < \frac{W_0}{A} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



9. ábra

Itt A a teljesítményerősítőre jellemző mennyiség

- a./ stabil működés esetén mennyire tér el a stabilizált T hőmérséklet a referenciahőmérséklettől? Milyen módszereket tudunk ajánlani a Q hő - terhelés változásától való függés csökkentésére?
- b./ A rendszer bizonyos feltételek mellett instabillá válhat, begerjedhet. Mi a stabilitás feltétele? (A feladat során szorítkozunk egydimenziós tárgyalásra!)

Megoldás

Stacionárius állapotban az energiamegmaradásból azonnal következik, hogy ugyanannyi hőmennyiséget kell betáplálnunk, amennyit a hűtés elvisz

$$W = A (T_r - T) = Q,$$

s ebből

$$\Delta T = T_r - T = \frac{Q}{A} \tag{1}$$

Stabil üzemben tehát az érzékelt pont hőmérséklete mindig eltér a beállított re - ferenciahőmérséklettől. Az eltérést az erősítés növelésével lehet csökkenteni. A feladat szerinti elrendezésben a Q hőterhelés változásával lineárisan változik a stabilizált pont hőmérséklete is. Javulás érhető el több érzékelő hasz -

nálatával, melyek nemcsak a hőmérsékletet, hanem a hőmérséklet-gradienst is érzékelik.

Az erősítés növelésének a stabilitásviszonyok szabnak határt (ld. a feladat II. ré - szét), több érzékelő használata pedig technikailag nehezebben valósítható meg. Érdekes és hasznos módszer az is, hogy a természetes hűtésnél jóval nagyobb de állandó hűtést biztosítunk (pl. vízzel hűtjük). Ekkor természetesen több energia kell az előírt hőmérséklet eléréséhez, de a természetes hűtés (levegő) változásai az összes hőterheléshez viszonyítva relative kisebbek lesznek, s így a stabilitás növekedhet.

Vizsgáljuk meg a hőmérsékletstabilizátor stabilitási feltételét!

A hővezetés differenciálegyenlete

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2a}$$

A hőmennyiség pedig

$$Q = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2b}$$

Stabil esetben a hőáramsűrűség az egész rud mentén állandó, így az $u(x)$ függvény egyenes. A továbbiakban ettől a stabil helyzettől való kis eltérést vizs - gáljuk.

A stabilitás szempontjából az időfüggő megoldást kell elemeznünk.

A rendszer bemenetére adott jel (fűtőteljesítmény) időkésséssel és lecsökkentve érkezik meg az érzékelési pontra. A csökkenést az erősítő kompenzálja, az idő - késés pedig fázisidőt hoz létre, s így előfordulhat, hogy a zárt szabályozóhurok elejére ismét megfelelő fázisban ér a jel, azaz ciklikus lengés keletkezik.

Ha feltesszük, hogy a stabil munkaponti helyzettől olyan kis amplitudójú gerjedé - sek jönnek létre, melyek még egyik irányban sem vezérlik túl az erősítőt, akkor az erősítő lineáris elemnek tekinthető.

A szabályozóhurok másik tagja a rud első fele, melynek bemeneti jele a fűtőtel - jesítmény kimenőjele pedig a rud középpontjának hőmérséklete. Mivel az egyen - sulyi állapot körüli kis eltérésekkel foglalkozunk, így olyan átviteli függvényt határozunk meg, hogy a rud közepének hőmérséklete hogyan reagál a fűtőteljesít - mény egyensúlyi körüli kis változásaira.

A hővezetés differenciálegyenletének van hullám megoldása is.

(Ld. Frank-Mises: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei II. kötet 625. old.)

A rud elején létrejött eléggé kis hőmérsékletingadozásoknál az állandó rudvégi hővezetés jó közelítéssel biztosítható, hiszen a hullám egyre csökkenő ampli - tudóval "folyik szét" a hővezető anyagban.

Jelöljük $v(x,t)$ -vel a stacionárius megoldástól eltérő, oszcilláló részt.

$$v(x,t) = D \cdot e^{-\sqrt{\frac{n}{2a^2}} x} \cdot \cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2a^2}} x\right) \quad (3)$$

ahol $a^2 = \frac{\kappa C}{\rho}$ és n a hullám frekvenciája. Látható, hogy mind a terjedési sebesség, mind a csillapítás függ a rezgésszámtól

Legyen $\sqrt{\frac{n}{2a^2}} = k$, így

$$v(x,t) = D \cdot e^{-kx} \cdot \cos(nt - kx)$$

Mint hogy a hőáramsűrűség $W = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x}$, így a rud kezdetén

$$W_0(t) = k \cdot \kappa \cdot D \cdot (\cos nt - \sin nt) \quad (4)$$

Ha a hőérzékelő az $x = b$ pontban van, a kimenőjel:

$$v(b,t) = D \cdot e^{-kb} \cdot \cos(nt - kb) \quad (5)$$

A szabályozóhurok visszacsatolása az erősítő lineáris tartományában

$$W(t) = -A \cdot v(b,t), \quad (A > 0) \quad (6)$$

s ezekből

$$k \kappa \cdot D [\cos nt - \sin nt] = -A \cdot D \cdot e^{-bk} (\cos nt \cdot \cos bk + \sin nt \cdot \sin bk)$$

Minden időpillanatban ez csak úgy állhat fenn, ha külön $\cos nt$ és $\sin nt$ -re is fennáll. Az együtthatóknak ekkor két egyenlet adódik:

$$k \kappa + A \cdot e^{-bk} \cdot \cos bk = 0$$

$$k \kappa - A \cdot e^{-bk} \cdot \sin bk = 0$$

Ezekből egyrészt

$$bk = \left(\frac{3}{4} + m\right)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

lehetséges gerjedési frekvenciákat határozza meg, másrészt

$$A = \frac{\kappa}{b} \cdot \frac{bk}{\sin bk} \cdot e^{bk} = \frac{\kappa}{b} \left(\frac{3}{4} + m\right) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot e^{\left(\frac{3}{4} + m\right)\pi} \quad \text{ahol } m = 0, 2, 4, 6, \dots$$

Az $m = 1, 3, 5, \dots$ értékre ennek a negatívja jönne ki, de (6) visszacsatolás felírásakor már A előjelét figyelembe vettük. (Ha $A < 0$ lenne, a rendszer pozitívan lenne visszacsatolva és nem lehetne vele szabályozni)

Látható, hogy ha

$$A < \frac{3\pi\kappa}{4\sqrt{2}b} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi}$$

akkor harmonikus gerjedés semmilyen frekvenciával sem jöhet létre. A értékének növelésével sorba bekapcsolódhatnak a különböző frekvenciájú gerjedések.

Megoldásuk biztosan nem érvényes olyan nagy hőmérsékletingadozások esetén, amikor az erősítő már tulvezérlődik. Ebben az esetben a rendszert már nem tekinthetjük lineárisnak, s ekkor felléphet a határciklus jelensége. Ez azt jelenti, hogy a rendszerben egy bizonyos frekvenciájú és amplitúdójú rezgés keletkezik, amely általában nem harmonikus lefolyású. (A feladatban ilyen nagy hőmérsékletingadozások bekapcsolásakor bizonyosan fennállnak.)

A határciklus vizsgálata azonban sokkal mélyebb analízist igényel és túlnő a feladat keretein.

Ezzel kapcsolatban Csáki Frigyes: Korszerű szabályozásmélet c. könyvére utalunk.

4. feladat

Egy $2a$ széles folyó vizének sebességét $v(x) = v(-x)$ függvény határozza meg $(-a < x < a)$. Milyen módon kell a vízhez képest c sebességgel mozgó csónakkal haladni, hogy leghamarabb érjen át a csónak a kiindulási ponttal szembelevő helyre?

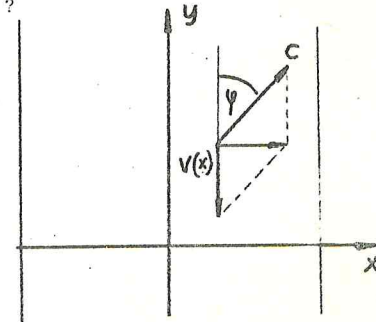
Hol lesz a csónak, mikor a folyó közepére ér? Hogy halad a csónak $v(x) = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ esetben, ha $v_0 \gg c$ illetve $v_0 \ll c$?

Megoldás

Vegyük fel a 10. ábrán látható koordinátarendszert s jelöljük a csónak pályáját $y(x)$ -szel! Ha a csónak a vízhez képest $(c \cdot \cos \varphi, c \cdot \sin \varphi)$ sebességgel halad, akkor a parthoz viszonyított sebessége

$$v_x = c \cdot \sin \varphi$$

$$v_y = c \cdot \cos \varphi - v(x)$$



10. ábra

A $\frac{v_y}{v_x} = y'$ feltételből $v_x = c \cdot \frac{-v(x) \cdot y' + \sqrt{(1+y'^2)c^2 - v^2(x)}}{1+y'^2}$

adódik.

A legrövidebb átérési időhöz tartozó pályára

$$T = \int dt = \int_{-a}^a \frac{dx}{v_x} = \int_{-a}^a \frac{dx}{c} \frac{1+y'^2}{-v(x) \cdot y' + \sqrt{(1+y'^2)c^2 - v^2(x)}}$$

extremális.

A variációs feladat megfelelő Euler-Lagrange egyenlete

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial L}{\partial y'} = 0.$$

Mivel $L = \frac{1+y'^2}{-v(x) \cdot y' + \sqrt{(1+y'^2)c^2 - v^2(x)}}$ (1)

nem függ y -től, az egyenlet

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = A$$

alakra egyszerűsödik. Ez implicit egyenlet

y' -re, melyből elvben

$$y' = f(A, v(x))$$
 (2)

kifejezhető

Vizsgáljuk meg milyen megszorítást ad $y(x) = -x$ -re a $v(x) = v(-x)$ párossági reláció! (2) integrálja

$$y(x) = \int f(A, v(x)) dx + B = \text{páratlan függvény} + B$$

Mivel, $y(a) = y(-a) = 0$ ezért $B = 0$ kell legyen. A legrövidebb átérési időhöz tartozó pálya? tehát páratlan függvénnyel írható le, s így $y(0) = 0$, vagyis a folyó közepén a csónak a kiindulási ponttal lesz egy magasságban.

Vizsgáljuk a $v(x) \ll c$ esetet! Mivel $v(x) \equiv 0$

hoz az $y(x) = 0$ megoldás tartozik, várható, hogy $y(x) = \mathcal{O}(\frac{x}{c})$. Sorbafejtve (1)-t y' és $\frac{v}{c}$ szerint

$$L(y', v(x)) = 1 + y'^2 + \frac{v}{c} y' - \frac{1}{2} (y'^2 - \frac{v^2(x)}{c^2}) + \dots$$

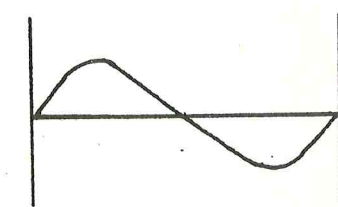
magasabbrendű tagok

$$\frac{\partial L}{\partial y} \approx y' + \frac{v(x)}{c} = A,$$

ahonnan

$$y(x) = \int [A - \frac{v(x)}{c}] dx + B$$

$v(x) = v_0 (1 - \frac{x^2}{a^2})$ esetben a határfeltételeket kielégítő megoldás (11. ábra)



11. ábra

$$y(x) = -\frac{v_0}{3c} x (1 - \frac{x^2}{a^2})$$

Foglalkozunk végül a $v(x) \gg c$ esettel! Ez a feltétel természetesen nem teljesülhet minden x -re, hiszen a partoknál a víz áll, de feltehetjük, hogy a partmenti keskeny sávtól eltekintve érvényes. A mozgás két szakaszra bontható

a./ A folyó gyors részén $T_1 = \int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{dx}{v_x} \approx \int_{-a}^a \frac{dx}{c \cdot \sin \varphi(x)}$
idő alatt ér át a csónak

b./ Ezalatt $\int |v_y| dt = \int_{-a}^a \frac{dx}{c \sin \varphi(x)} \approx \int_{-a}^a \frac{v(x)}{c \sin \varphi(x)} dx$

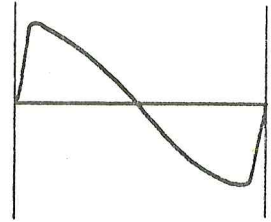
utszakasszal sodródik le, melynek behozásához a partmenti álló vízben

$$T_2 = \frac{1}{c^2} \int_{-a}^a dx \cdot \frac{v(x)}{\sin \varphi(x)}$$

időre van szükség.

$T = T_1 + T_2$ akkor minimális, ha $\varphi(x) \equiv 90^\circ$ vagyis, ha $y' = -\frac{v(x)}{c}$

$$v = \frac{v_0}{c} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad \text{esetben} \quad y = \frac{v_0}{c} x \left(1 - \frac{x^2}{3a^2} \right) \quad (12. \text{ ábra})$$



12. ábra

5. feladat

Hogyan változik egy bolygó pályája és keringési ideje, ha a gravitációs állandó lassan csökken?

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -\beta$$

Megoldás

A megoldásnál a Landau-Lifszitz:Mechanika jelöléseit használjuk.

$$\gamma m M = \alpha, \quad \text{igy} \quad \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$$

A keringési idő

$$T = 2\pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

A pálya jellemzői pedig

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{a paraméter és} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad \text{az excentritás}$$

A fentiekben M az impulzusmomentumot jelöli.

Mint hogy a periódusidőkhöz képest lassu változásról van szó, az adiabatus invariánsok fogalmát használjuk. (Ld. Landau:Mechanika 49§, továbbá II. évf. 1. feladata) Esetünkben két adiabatus invariáns van:

$$I_\psi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\psi d\psi = M$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r dr = -M + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

Ha α lassan változik, a keringési időkhöz képest, I_ψ és I_r állandóak, azaz $\frac{\dot{\alpha}}{|E|} = \text{const.}$

Ezért

$$E \sim \alpha^2 \quad (1a)$$

$$T \sim \frac{1}{\alpha^2} \quad (1b)$$

$$p \sim \frac{1}{\alpha} \quad (1c)$$

$$e = \text{const.} \quad (1d)$$

Bonyolultabban számítható ki a perihéliumforgás.

$U(r)$ potenciálnál az egy periódus alatti elfordulás Landau szerint

$$\Delta\psi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}} dr = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}} dr \quad (2)$$

$$\text{De} \quad U(r,t) = \frac{1}{r} (\alpha + \dot{\alpha}t) = \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} \right) \quad (3)$$

$$\text{és} \quad \dot{E} = E + \dot{E}t$$

$$\text{De (1a)-ból} \quad \dot{E} = E \frac{2\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad \text{igy}$$

$$E(t) = E \left(1 + 2 \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} \right) \quad (4)$$

Az időskála kezdőpontját válasszuk úgy, hogy $t = 0$ -nál r_{min} legyen, ekkor r_{max} $T/2$ -nél lesz
Igy

$$\Delta \varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{min}}^{r_{max}(I_z)} \sqrt{2mE(1+2\frac{\dot{\alpha}t}{\alpha}) + 2m\frac{\alpha}{r}(1+\frac{\dot{\alpha}t}{\alpha}) - \frac{M^2}{r^2}} dr$$

(5)

Vezessük be az új változót r helyett :

$$r = \rho (1 - \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha})$$

definícióval, így

$$dr = d\rho (1 - \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{\rho}{\rho})$$

ezzel

$$\Delta \varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \sqrt{(1+2\frac{\dot{\alpha}t}{\alpha}) [2m(E+\frac{\alpha}{\rho}) - \frac{M^2}{\rho^2}] - \frac{M^2}{\rho^2}} d\rho (1 - \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\rho}{\rho})$$

illetve

$$\Delta \varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{\rho}) - \frac{M^2}{\rho^2}} d\rho (1 - \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\rho}{\rho})$$

Itt a nullarendű tag nem ad perihéliumforgást, így

$$\Delta \varphi = 2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial M} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{\rho}) - \frac{M^2}{\rho^2}} \cdot \frac{\rho}{\rho} d\rho$$

De nullarendben

$$\sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{\rho}) - \frac{M^2}{\rho^2}} = m\dot{\rho}$$

így

$$\Delta \varphi = 2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial M} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} m\rho d\rho = m \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial M} (\rho_{max}^2 - \rho_{min}^2) = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} m 4a^2 \frac{\partial e(m)}{\partial M}$$

Igy

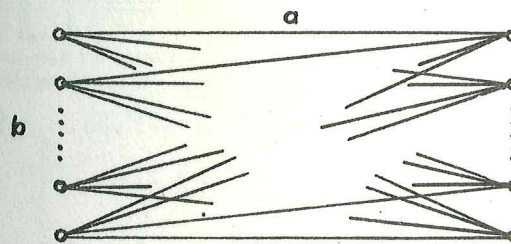
$$\Delta \varphi = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{2M}{Ee}$$

Látható, hogy $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - \beta < 0$ esetén "hátrafelé" forog, ellenkező esetben pedig előre.

6. feladat

$2n$ pontból álló pontrendszerben az egyik n pont mindegyikét k irányú rugalmas, lineáris erő köti a másik n pont mindegyikéhez. Melyek a rendszer lehetséges sajátfrekvenciái?

($a \gg b$ és a tömegpontok csak a -val párhuzamosan mozdulhatnak el.)



13. ábra

Megoldás

A feladat a tett egyszerűsítő feltevések nélkül is megoldható egyenlő tömegű részecskére. Az egyik n pont helyvektorai legyenek x_1, x_2, \dots, x_n , a másik n ponté $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.

A Lagrange függvény ekkor

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 + \dot{\bar{x}}_1^2 + \dots + \dot{\bar{x}}_n^2) - \frac{k}{2} [(x_1 - \bar{x}_n)^2 + \dots + (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n(1))^2]$$

Keressünk egy lineáris transzformációt, amely az L függvényt "diagonalizálja".

Legyen

$$Z_i = \sum_{j=1}^n (\rho_{i(j)} x_j + \bar{\rho}_{i(j)} \bar{x}_j) \quad (i = -n+1, -n+2, \dots, n-1)$$

Ezzel

$$L = nm\dot{x}^2 + \sum_{i=-n+1}^{n-1} \frac{\mu_i}{2} (\dot{Z}_i^2 - \omega_i^2 Z_i^2)$$

alakot akarunk elérni. Itt az első tag a tömegközéppont szabad mozgását írja le.

$$x = \frac{1}{2n} (x_1 + \dots + x_n + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n)$$

A Z_i -k megfelelő normálásával elérhető, hogy $\mu_i = m$ legyen. A feladat tehát az ω_i frekvenciák meghatározása.

A kinetikus energia *diagonalizálásából*

$$d_{jk} = \frac{1}{2n} + \sum_i p_{i(j)} p_{i(k)} = \frac{1}{2n} + \sum_i \bar{p}_{i(j)} \bar{p}_{i(k)}$$

$$0 = \frac{1}{2n} + \sum_i p_{i(i)} \bar{p}_{i(i)}$$

A potenciális energia *diagonalizálásából*

$$\frac{nk}{m} d_{jk} = \sum_i \omega_i^2 p_{i(j)} p_{i(k)} = \sum_i \omega_i^2 \bar{p}_{i(j)} \bar{p}_{i(k)}$$

$$-\frac{k}{m} = \sum_i \omega_i^2 p_{i(i)} \bar{p}_{i(i)}$$

Ezekre egy speciális megoldás

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)$$

$$Z_i = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} \sum_{j=n+1-i}^n (x_{n-i} - x_j) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$Z_i = \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}} \sum_{j=1}^{i-1} (\bar{x}_j - \bar{x}_{-i+1})$$

A megfelelő frekvenciák $\omega_0 = \sqrt{2n} \sqrt{\frac{k}{m}}$ és $\omega_i = \sqrt{n} \sqrt{\frac{k}{m}}$.

A fenti megoldás érdekessége, hogy az ω_0 módus a kétfajta részecskesereg súlypontjának egymás körüli rezgését írja le, míg a többi módus az azonos fajta részecskék egymás körüli rezgésének felel meg.

Megjegyzés

- a./ A megoldás $n > 1$ esetén nem egyértelmű, mert $2n-2$ azonos frekvencia van
- b./ Egy másik, (a fentivel ekvivalens) eljárás lenne a Lagrange függvényből származtatott mozgásegyenlet-rendszer diagonalizálása.

7. feladat

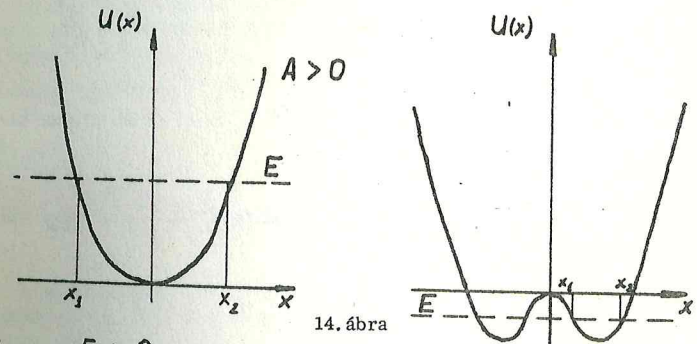
Egy részecske $U(x) = Ax^2 + Bx^4$ alakú potenciálgödörben mozog (egydimenziós probléma). Adjuk meg a mozgás periódusidejét, mint a részecske teljes energiájának függvényét! ($B > 0$)

Megoldás

A rezgésidőt az ismert

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

képlet adja, ahol m a részecske tömege, $x_{1,2}$ pedig az $E = U(x)$ egyenlet megfelelően választott két valós gyöke (14. ábra)



14. ábra

a./ $E > 0$ ekkor $A \geq 0$ lehet

Könnyű belátni, hogy

$$\omega = \frac{2\pi\Omega}{4K(k)}$$

alakban írható, ahol

$$\Omega = \sqrt{\frac{2|A|}{m}} \left(1 + \frac{E}{\frac{A^2}{4B}} \right)^{1/4},$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\text{Sgn}A}{\sqrt{1 + \frac{E}{\frac{A^2}{4B}}}} \right)$$

és $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$ elsőfajú elliptikus integrál

b./ $-\frac{A^2}{4B} < E < 0 \quad (A < 0)$

Most $\omega = \frac{2\pi \Omega'}{2K(k')}$

ahol

$\Omega' = \sqrt{\frac{2|A|}{m}} \left[\frac{1 + (1 + \frac{E4B}{A^2})^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$

és $k'^2 = \frac{1 + [1 + \frac{4BE}{A^2}]^{-\frac{1}{2}}}{2}$

Vizsgáljuk ezeknek a viselkedését az energia néhány karakterisztikus értéke körül.

(A továbbiakban a frekvenciát $\sqrt{\frac{2|A|}{m}}$ az energiát $\frac{A^2}{4B}$ egységekben mérjük)

1./ $A > 0$ esetén $E \approx 0$ körül az oszcillátor harmónikus, frekvenciája 1.

$0 < E \ll 1$ esetén $\omega \approx 1 + \frac{3}{16} E$ módon viselkedik.

$E \gg 1$ esetén aszimptotikusan $\omega \approx \frac{1}{2K(\frac{1}{\sqrt{2}})} (1+E)^{\frac{1}{4}} \approx 0,847 (1+E)^{\frac{1}{4}}$

2./ $A < 0$ esetén az $E \gg 1$ aszimptotika megegyezik a fentivel, $E \approx 0$ körül

$\omega \approx \frac{\pi}{\ln(\frac{64}{|E|})}$ $E \sim -1$ körül az oszcillátor a

$\pm x = \sqrt{\frac{|A|}{2B}}$ pontok egyike körül $\sqrt{2}$ frekvenciájú harmónikus rezgést végez.

IV. évfolyam

1. feladat

Azonos a III. évfolyam 1. feladatával

2. feladat

Egy zárt edényben ρ_1 és ρ_2 sűrűségű folyadék helyezkedik el egyenlő mennyiségben. ($\rho_2 > \rho_1$) A határfelületen hullámokat gerjesztünk. Milyen az $\omega(k)$ függvény?

Megoldás

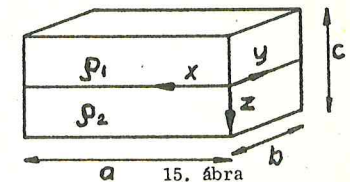
A tartályban a két folyadék határán keletkezett hullámok hasonlítanak a víz hullámokra, ezért ugyanazon alapegyenletekből indulunk ki, csak más peremfeltételek mellett kell megoldanunk.

A kiindulási egyenletek (Budo: Mechanika 245. old.)

$\Delta \phi = 0$ (1)

$\frac{\partial \phi}{\partial t} - gz + \frac{p}{\rho} = \text{állandó}$ (2)

A határfeltételek felírásánál a 15. ábrán látható koordinátarendszert használjuk. Mivel kis amplitúdójú hullámokat vizsgálunk, a folyadékok érintkezési felületét a $z = 0$ síkkal közelítjük.



$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(a, y, z) = 0$ (3a)

$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, b, z) = 0$ (3b)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} (x, y, \frac{c}{2}) = \frac{\partial \phi}{\partial z} (x, y, -\frac{c}{2}) = 0 \quad (3c)$$

Az (1)-(3) képletekben szereplő ϕ függvény a sebességpotenciál.
A (2) egyenletet célszerű t szerint deriválni és így a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

egyenlethez jutunk.

A sebességpotenciált

$$\phi(x, y, z, t) = \psi(x, y) X(z) \cdot e^{i\omega t}$$

alakban keressük, így az (1) egyenlet

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = k^2 \psi, \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = k^2 X$$

egyenletekre esik szét, melyeknek megoldása

$$X = A \cdot e^{kz} + B \cdot e^{-kz}$$

$$\psi = (E_1 \cos k_1 x + F_1 \sin k_1 x) (E_2 \cos k_2 x + F_2 \sin k_2 x).$$

A (3c) határfeltétel behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$X = D \cdot \text{ch} k (z + \frac{c}{2}) \quad \text{ha } z < 0 \quad \text{és}$$

$$X = -D \cdot \text{ch} k (z - \frac{c}{2}) \quad \text{ha } z > 0$$

A (4) egyenletet a határfelületen véve megkapjuk az $\omega(k)$ függvényt, vagyis a disperziós relációt.

$$\frac{1}{\rho_{12}} \frac{\partial p}{\partial t} = [\omega^2 X(0) + g X'(0)] \psi(x, y), \quad \text{melyből}$$

$$\omega = gk \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \text{th} \frac{kc}{2}$$

A megkapott disperziós reláció még nem teljes, mert még nem határoztuk meg a hullámszám milyen értékeket vehet fel. Megoldásunk akkor elégti ki a (3a) és (3b) határfeltételeket,

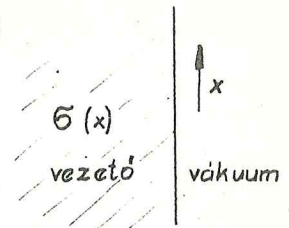
$$\text{ha } F_1 = F_2 = 0, \quad \text{és}$$

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{a}; \quad k_2 = n_2 \frac{\pi}{a}$$

ahol n_1 és n_2 természetes számok.

3. feladat

X irányban periódikus $\sigma(x) = \sigma(x+l)$ vezetőképeségű féltérben áram folyik. Milyen az elektromos tér a vezető féltérben, és a másik féltérben, ahol vákum van?



16. ábra

Megoldás

A j áramsűrűség és az E elektromos térerősség kielégíti a

$$j = \sigma E,$$

$$\text{div} j = 0,$$

$$\text{div} E = 4\pi \rho$$

egyenleteket. Ezekből

$$\rho(x) = -\frac{1}{4\pi\sigma(x)} \frac{d\sigma(x)}{dx} \cdot E_x(x)$$

$$\sigma(x) E_x(x) = j_0 = \text{állandó}.$$

Legyen a vezető a 2-es, a vákum az 1-es közeg, s legyen a határfelületen $\eta(x)$ töltéssűrűség. A két közeg határán a határfeltételek:

$$j_{n2} - j_{n1} = \sigma E_{n2} = 0;$$

$$E_{t1} = E_{t2};$$

$$E_{n2} - E_{n1} = 4\pi\eta.$$

Innen láthatjuk, hogy $\rho(x)$ és $\eta(x)$ is periódikus függvény.

Számoljuk most ki egy periódikusan töltött féltér és egy periódikusan töltött sík elektromos térerét! Például a

$$\rho(x) = \rho_0 \sin \frac{2\pi}{l} x$$

szinuszos töltés elosztás tere elemi integrálásokkal kapható:

$$E_x(x,y) = \begin{cases} l\rho_0 \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi}{l}y}, & \text{ha } y > 0 \\ l\rho_0 \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot (2 - e^{\frac{2\pi}{l}y}), & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

és

$$E_y(x,y) = \begin{cases} l\rho_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi}{l}y}, & \text{ha } y > 0 \\ l\rho_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{\frac{2\pi}{l}y}, & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

Az $\eta(x) = \eta_0 \sin \frac{2\pi x}{l}$ periódikus felületi töltésteret hasonlóan

$$E_x(x,y) = 2\eta_0 \pi \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi}{l}|y|}$$

$$E_y(x,y) = (\operatorname{sgn} y) \cdot 2\eta_0 \pi \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi}{l}|y|}$$

Ha speciálisan $\eta_0 = \rho_0 \frac{l}{2\pi}$, akkor, a két tér összege

$$E_x(x,y) = \begin{cases} 2l\rho_0 \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi}{l}y} & (y > 0) \\ 2l\rho_0 \cos \frac{2\pi x}{l} & (y < 0) \end{cases}$$

$$E_y(x,y) = \begin{cases} 2l\rho_0 \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi}{l}y} & (y > 0) \\ 0 & \text{ha } (y < 0) \end{cases}$$

Ekkor tehát teljesül az $E_{n_2} = 0$ feltétel.

Ehhez a térhez még hozzáadhatunk egy $E_{0x} = \text{áll. } x$ irányú homogén teret, amelyik az x irányban átlagosan folyó árammal arányos. A kiindulási egyenletek alapján az eddig számolt töltéselosztásnak és térnek megfelelő vezetőképesség:

$$\sigma(x) = \frac{j_0}{E_{0x} + 2l\rho_0 \cos \frac{2\pi x}{l}}$$

Ahhoz, hogy az adott, tetszőleges periódikus vezetőképességű féltér esetére ezt

eredményt általánosítsuk, a

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{0k} \cdot \sin \frac{2\pi k}{l} x$$

általános periódikus töltéselosztás terét kell kiszámítani, ami a megfelelő

$$\eta_{0k} = \rho_{0k} \cdot \frac{l}{2k\pi} \quad \text{és} \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{0k} \cdot \sin \frac{2\pi k}{l} x$$

feltületi töltéssűrűséggel együtt

$$E_x(x,y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l\rho_{0k}}{k} \cos \frac{2k\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l}y} & \text{ha } y > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l\rho_{0k}}{k} \cos \frac{2k\pi x}{l} & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

$$E_y(x,y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l\rho_{0k}}{k} \sin \frac{2k\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l}y} & \text{ha } y > 0 \\ 0 & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

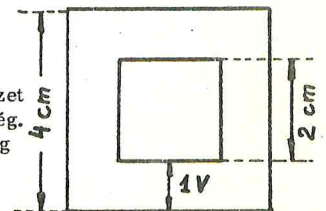
Adott $\sigma(x)$ és E_{0x} átlagos tér esetén a ρ_{0k} állandókat a

$$\sigma(x) = \frac{j_0}{E_{0x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l\rho_{0k}}{k} \cos \frac{2\pi kx}{l}} \geq 0$$

egyenletből kell kiszámítani.

4. feladat

Egyik irányban végtelen kiterjedésű négyzet alakú üreg falai között 1 V a feszültségkülönbség. Határozzuk meg numerikusan a potenciált az üreg különböző helyein 0, 2 V pontossággal!



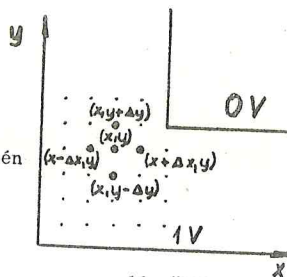
17. ábra

Megoldás

A $\varphi(x,y)$ potenciál kielégíti a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Laplace egyenletet, azaz kis Δx és Δy esetén



18. ábra

$$\varphi(x+\Delta x, y) + \varphi(x-\Delta x, y) + \varphi(x, y+\Delta y) + \varphi(x, y-\Delta y) \approx 4\varphi(x, y) \quad (1)$$

Ennek alapján a numerikus megoldás: a tartományban négyzethálót veszünk fel (18. ábra), a peremen előírjuk az adott potenciálértékeket a belső pontokhoz pedig $0V$ -t rendelünk. Ez a h -edik közelítés. A $h-1$ -edik közelítést a (x,y) pontban az (1) egyenlet alapján számoljuk. Az iterációt addig folytatjuk, míg a régi és új értékek között a különbség minden pontban az előírt pontosságon belül van. (A megoldás pontossága függ természetesen a négyzetháló finomságától is. Már egy rövid számítógépes számolás is nagy pontosságot adhat!)

5. feladat

Fajlagos ellenállást két lényegesen különböző módon mérhetünk:

- a./ Hosszu vékony dróton áram, feszültség és geometria ismeretében;
- b./ Örvényáramokat kelthetünk a próbatesten (pl. egy külső mágneses tér gyors ki és bekapcsolásával) és mérjük az örvényáramok elhalását jellemző relaxációs időt.

Mikor melyik módszert előnyös használni és mi a kétféle módon meghatározott átlagos ellenállás közötti összefüggés enyhén inhomogén anyagban?

Megoldás

Időben állandó áramok esetén az \underline{E} elektrcmos térerősség és a \underline{j} áramsűrűség a

$$\text{rot } \underline{E} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div } \underline{j} = U \quad (2)$$

$$\underline{E} = \rho \underline{j} \quad (3)$$

egyenleteket elégíti ki azzal a határfeltétellel hogy a fém-szigetelő határon áram nem folyik át. Ha átmérőjéhez képest hosszú, un. végtelen hosszú hengeres vezetőt (vezeték) tárgyalunk, akkor további feltétel még, hogy a vezető keresztmetszetén I áram folyik. Homogén fajlagos ellenállású, állandó keresztmetszetű, Z tengellyel párhuzamos vezeték esetén nyilvánvalóan

$$\underline{j} = (0, 0, j_z) \quad (4)$$

$$\underline{E} = (0, 0, E_z)$$

$$E_z = \rho j_z, \text{ és}$$

$$j_z = \frac{I}{Q}$$

és így

$$R = \frac{V}{I} = \rho \frac{L}{Q} \quad (5)$$

ahol Q a keresztmetszet, L pedig a mérési pontok közötti távolság. A fajlagos ellenállás mérésénél általában két különböző hőmérsékleten mért ellenállás hányadosát határozzuk meg ugyanazon a próbatesten s így a mérés pontosságát az elektromos adatok mérésének pontossága, valamint a termostálás jósága szabja meg. Azonos próbatest-hossz és feszültségdetektor esetén különböző vastagságu és fajlagos ellenállású mintákon azonos mérési pontosságot érünk el, ha a nagyobb keresztmetszetű, illetve alacsonyabb fajlagos ellenállású mintákon a rányosan nagyobb mérő áramot bocsájtunk át. A mérő áram korlátlan növekedésének határt szab azonban az, hogy a mérés során felszabaduló hő a termostáló folyadéknek hőmérséklet-fluktuáció nélkül kell elvezetni. Az ellenkező esetben ugyanis nem lehet az áram függvényébe mért ellenállásból (vagy egy etalonként együtt mért ellenállásból) a zérus mérőáramhoz tartozó (azaz termostáló folyadék tényleges hőmérsékletén mért) ellenállásra visszakövetkeztetni. A hőátadás akkor nem vezet forrásra, ha a próbatest felületén a hőterhelés (a hőáram-sűrűség) nem halad meg egy - a folyadékra jellemző - W értéket. (V.ö. Jacobs: Heat Transfer)

Igy egy a sugaru hengeres próbatest esetén:

$$\frac{V^2}{I^2 \rho} = 2TaLW, \text{ ahonnan } V^2 = \frac{WL^2}{5a} \left(5 - \frac{1}{\rho}\right) \quad (6)$$

Tekintve, hogy L értékét mérés technikai okokból nem lehet széles határok között változtatni, (6) azt jelenti, hogy a feszültség és áram méréssel meghatározott ellenálláshányados annál pontosabb, minnél kisebb a (6a) szorzat. Tehát feszült-

ség-áram hányadosából vékony, nagyfajlagos ellenállású vezeték ellenállását határozzuk meg. A következőkben megmutatjuk, hogy örvényáramokkal történő fajlagos ellenállásmérés éppen az ellenkező határesetben kedvező.

Az örvényárammal történő fajlagos ellenállásmérést csak alacsony frekvencián végezhetünk, magas frekvencián ugyanis a skin effektus miatt csak egy vékony felületi rétegre kapunk felvilágosítást.

Magas frekvencia esetén kvázistacionárius közelítést alkalmazunk. A Maxwell egyenletek ekkor:

$$\text{rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}, \quad (7)$$

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\text{div } \underline{B} = 0, \quad (9)$$

$$\text{div } \underline{D} = 0, \quad (10)$$

$$\sigma \underline{E} = \underline{j}, \quad (11)$$

$$\underline{B} = \mu \underline{H}. \quad (12)$$

A határon \underline{E} és \underline{H} tangenciális, \underline{B} és \underline{D} normális komponense át folytonosan, továbbá a fém szigetelő határon átfolyó áram nulla. Dia- és paramágneses fémekben, közönséges gázokban $\mu \sim 1$. (10^{-5} -es pontossággal)

Igy a szuszceptibilitás mérést kivéve gyakorlati szempontból ezekben az esetekben nem kell különbséget tenni \underline{H} és \underline{B} között, ami egyben azt is jelenti, hogy a határon \underline{H} folytonosan megy át rotációját képezve (8), (9) és (11) felhasználásával azt kapjuk, hogy a fém belsejében

$$\Delta \underline{H} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \quad (13)$$

Periódikusan változó $\underline{H} = (0, 0, H_0 \cos \omega t)$ külső gerjesztő mágneses tér esetében azt várjuk, hogy a külső mágneses térrel párhuzamos végtelen hosszú hengeres vezetékben a mágneses tér

$$\underline{H} = (0, 0, H_z^{fém})$$

tipusu lesz, ahol

$$H_z^{fém} = H_z^c(r) \cdot \cos \omega t + H_z^s(r) \sin \omega t \quad (14)$$

(14)-et (13)-ba helyettesítve

$$\Delta H_z^c \cdot \cos \omega t + \Delta H_z^s \sin \omega t = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega [-H_z^c \sin \omega t + H_z^s \cos \omega t] \quad (15)$$

amiből

$$\Delta H_z^s = -\frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega H_z^c \quad (16)$$

$$\Delta H_z^c = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega H_z^s$$

Ezt a csatolt differenciálegyenlet rendszert a

$$H_z = H_z^c + i H_z^s \quad (17)$$

komplex változó bevezetésével szeparáljuk:

$$\Delta H_z(r) = -\frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega i H_z(r) \quad (18)$$

Illetve hengerkoordinátákban:

$$H_z''(r) + \frac{1}{r} H_z'(r) + k^2 H_z(r) = 0 \quad (19)$$

$$\text{ahol } k = \sqrt{i \frac{4\pi}{c^2} \omega \sigma} \quad (20)$$

Az egyenlet lineárisan független reguláris megoldásai a $H_z^c(a) = H_0$, $H_z^s(a) = 0$ határfeltételek felhasználásával (ld. Diákköri problémamegoldó verseny 1970. 35. old.)

$$H_z(r) = H_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}, \text{ és } H_z^s(r) = H_0 \frac{Y_0(kr)}{Y_0(ka)} \quad (21)$$

(7)-ből és (11)-ből a fém belsejében

$$\underline{E} = -\frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \underline{H} \quad (22)$$

és így az elektromos térerősség egyetlen zérustól különböző komponense az azimutális komponens, melynek értéke

$$E_\varphi = -\frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{d}{dr} H_z^c(r) \cos \omega t + \frac{d}{dr} H_z^s(r) \sin \omega t \right] \quad (23)$$

illetve (17) és (21) figyelembevételével

$$E_\varphi = \frac{c H_0}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{k J_1(kr)}{J_0(ka)} + \frac{k^2 Y_1(kr)}{Y_0(ka)} \right] \cos \omega t + \frac{1}{2i} \left[\frac{k J_1(kr)}{J_0(ka)} - \frac{k^2 Y_1(kr)}{Y_0(ka)} \right] \sin \omega t \right\} \quad (24)$$

ahol tekintetbe vettük hogy $J_0'(kr) = -k J_1(kr)$. Mivel az áramra vonatkozó határfeltétel E_r eltűnését követeli, nyilván a szigetelőben újra csak az azimutális komponens különbözik nullától:

$$E_\varphi(r) = E_\varphi^c(r) \cos \omega t + E_\varphi^s(r) \sin \omega t \quad (25)$$

(25)-öt (8)-ba helyettesítve és (14) figyelembevételével

$$\text{rot } E^c(r) \cos \omega t = 0$$

$$\text{rot } E^s(r) \sin \omega t = \frac{\omega}{c} H_0 \sin \omega t$$

illetve

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_\varphi^c(r)) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_\varphi^s(r)) = \frac{\omega}{c} H_0$$

és így

$$E_\varphi^c(r) = \frac{a E_\varphi^c(a)}{r}, \quad E_\varphi^s(r) = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) + a \frac{E_\varphi^s(a)}{r} \quad (26)$$

ahol az $E_t^{\text{szigetelő}} = E_t^{\text{fém}}(a)$ határfeltétel következtében (24)-ből:

$$E_\varphi^c(a) = \frac{1}{2} \left[\frac{k J_1(ka)}{J_0(ka)} + \frac{k^* J_1(k^* a)}{J_0(k^* a)} \right]; \quad E_\varphi^s(a) = \frac{1}{2} \left[\frac{k J_1(ka)}{J_0(ka)} - \frac{k^* J_1(k^* a)}{J_0(k^* a)} \right]$$

Az örvényáramok jelenlétére a $H_0 \cos \omega t$ teret gerjesztő tekercs veszteségének növekedéséből következtethetünk. A fémhengerben az örvényáramok következtében időegység alatt átlagosan

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\text{henger}} \sigma E^2(r,t) dV dt \quad (27)$$

energia disszipálódik. A térfogati integrál felületi integrállá alakítható, azt felhasználva, hogy a felszabaduló hő a szigetelőből a fémbe áramló elektromágneses energiából ered. Így

$$Q = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\text{hengerpalást}} \underline{E}(a,t) \times \underline{H}(a,t) dS dt$$

illetve

$$Q = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\text{palást}} (E_\varphi^c \cos \omega t + E_\varphi^s \sin \omega t) (H_z^c \cos \omega t + H_z^s \sin \omega t) dS dt$$

Az idő szerinti átlagolást elvégezve:

$$Q = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \int_{\text{palást}} [E_\varphi^c(a) H_z^c(a) + E_\varphi^s(a) \cdot H_z^s(a)] dS$$

A felületi integrálás után (17), (21) és (24) felhasználásával a henger L hosszára eső átlagos disszipáció:

$$Q = -H_0^2 \pi a^2 L \left\{ \frac{c^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{2\sigma_0} \left[\frac{k J_1(ka)}{J_0(ka)} + \frac{k^* J_1(k^* a)}{J_0(k^* a)} \right] \right\} \quad (28)$$

Ha $S = \frac{\pi \omega \sigma_0 a^2}{c^2} < 1$ ($\omega = 2\pi/\text{sec}$, $\rho = 0.1 \mu\Omega \text{cm}$, $a = 1 \text{cm}$ esetén $S \sim 0,2$),

akkor J_0 és J_1 sorfejtésében negyedrendig elmenve azt kapjuk, hogy

$$Q = \frac{1}{2} \omega H_0^2 \pi a^2 L \cdot \frac{\sigma_0 \omega a^2}{8c^2} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{24} S^2}{1 + \frac{1}{2} S^2 + \frac{11}{16 \cdot 18} S^4} \right\} \quad (29)$$

ahonnan látható, hogy a veszteség adott, "alacsony" frekvencián (σa^2 növekedésével növekszik, miként azt állítottuk.

A következőkben az inhomogenitások jelenlétében történő ellenállásmérést vizsgáljuk. A számítást az extrém alacsony frekvenciák határesetére végezzük csak el.

Elegendően kis ω esetén (13) jobb oldala: első közelítésben zérus, azaz a mágneses tér a fémbe és a fémét körülölelő szigetelőben is

$$\underline{H} = (0, 0, H_0 \cos \omega t)$$

alakú. Ha ezt a közelítést (27)-be helyettesítjük, akkor a fémbe $\underline{E} = 0$ megoldást kapunk, s ez a határfeltétel miatt a szigetelőre is kiterjed. Második közelítésben \underline{E} -t (8)-ból számítjuk és a mágneses teret az első közelítésből vesszük. Ekkor (26) analógiájára

$$E_\varphi^s(r) = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H_0(r) \quad (30)$$

Ezt (27)-be helyettesítve és az idő szerinti integrálást elvégezve:

$$Q = \frac{1}{T} \frac{\omega^2}{c^2} H_0^2 \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(r, \varphi, z) r^2 dr d\varphi dz \quad (31)$$

Ebből nulladik közelítésben

$$Q = \frac{1}{2} \omega H_0^2 L \pi a^2 \frac{\omega \sigma_0 a^2}{8c^2}$$

ezt a (29) pontos eredményből $S^2 \ll 1$ esetén kapjuk, azaz ω -nak olyan kicsinek kell lennie, hogy

$$\frac{\pi \omega \sigma_0 a^2}{c^2} \ll \ll 1$$

teljesüljön.

Definiáljuk (31) alapján az effektív vezetőképességet:

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi a^2 L} \iiint_{0,0,0}^{L,2\pi a} \sigma(r,\varphi,z) r^3 dr d\varphi dz \quad (32)$$

σ_{eff} és σ átlagos értéke $\langle \sigma \rangle$ azért különbözik egyenletünkben, mert σ_{eff} -ben σr , míg $\langle \sigma \rangle$ -ban σ térfogati átlaga szerepel.

Ha p inhomogenitását a szennyezők inhomogenitása okozza, ($p = p_m + p, c(r)$) és az inhomogenitás kicsi, akkor könnyű meggyőződni róla, hogy $\langle c(r) \rangle$ átlagkoncentrációval számított $\langle \sigma \rangle$ -tól σ_{eff} csak az inhomogenitás amplitudójának első hatványával menő korrekcióval tér el.

Az egyenáramu esetben szorítkozunk kis inhomogenitások esetére.

$$\frac{\sigma(r) - \langle \sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle} \ll 1 \quad (32)$$

Ha σ -nak van radiálislól különböző helyfüggése is, akkor $\underline{E} = (0, 0, E_0)$ feltevés mellett (1), (2) és (3)-nak nincs megoldása.

A megoldás ezért

$$\underline{E} = E_0 \underline{e}_3 + \text{grad } V \quad (33)$$

alakban keressük, ahol \underline{e}_3 a z tengely irányába mutató egységvektor. Fejtsük σ -t Fourier-sorban:

$$\sigma = \langle \sigma \rangle + \sum_k \sigma(k) e^{ikr} \quad (34)$$

és $V_1(r)$ -et pedig keressük a $\frac{\sigma(k)}{\langle \sigma \rangle}$ kis paraméter szerinti sor alakjában:

$$V_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \left[\frac{\sigma(k)}{\langle \sigma \rangle} \alpha_n(k) \right]^n e^{ikr} \quad (35)$$

ahol

$$\underline{k} = 2\pi \left(\frac{h}{a}, \frac{m}{b}, \frac{l}{L} \right) \quad (h, l, m) = \dots -2, -1, 1, 2, \dots$$

és a, b, L pedig a téglatest alaku vezető élei. (33) miatt (1) automatikusan teljesül, és így csak (2) teljesüléséről kell gondoskodnunk.

$$\text{div } \underline{j} = \text{div} \left[\langle \sigma \rangle (1 + \sum_k \frac{\sigma(k)}{\langle \sigma \rangle} e^{ikr}) \right] \left[\underline{e}_3 E_0 + \sum_n \sum_k ik \frac{\sigma(k)}{\langle \sigma \rangle} \alpha_n(k) e^{ikr} \right] = 0 \quad (36)$$

Mielőtt ennek közelítő megoldásához fognánk, számítsuk ki a téglatest alaku vezető ellenállását!

Mivel $\frac{V_{\text{max}}}{L} = E_0$ és

$$I = \int_{\Sigma} dx dy = Q \sigma_0 \left[E_0 + \sum_n \sum_k ik \frac{\sigma(k)}{\langle \sigma \rangle} \alpha_n(k) \right] \quad (37)$$

ahol $Q = ab$, így az első el nem tűnő korrekció és α_1 kiszámítását követeli. (36)-ot rendezve és az együtthatókat rendre zérussá téve:

$$\frac{\sigma(k)\sigma(-k)}{\langle \sigma \rangle^2} \text{ rendű hatványai szerint}$$

$$\alpha_1(k) = \frac{ik_3}{k^2} E_0$$

ahonnan

$$\sigma_{\text{eff}} = \langle \sigma \rangle \left[1 - \sum_k \frac{k_3^2}{k^2} \frac{\sigma(k)\sigma(-k)}{\langle \sigma \rangle^2} \right] \quad (38)$$

Ha az inhomogenitás izotróp, akkor σ csak k^2 függvénye s így

$$\sigma_{\text{eff}} = \langle \sigma \rangle \left[1 - \frac{1}{3} \frac{\langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \rangle}{\langle \sigma \rangle^2} \right] \quad (39)$$

míg ha az inhomogenitás radiális, akkor

$$\rho_{\text{eff}} = \langle \rho \rangle \left[1 - \frac{\langle (\rho - \langle \rho \rangle)^2 \rangle}{\langle \rho \rangle^2} \right]$$

Feltéve, hogy $p = p_0 + p, c(r)$ (azaz koncentráció-inhomogenitás okozta az ellenállás-inhomogenitást), azt kapjuk, hogy a korrekció a koncentráció szórásnégyzetével arányos. Ez azt jelenti, hogyha inhomogén anyagban a szennyezők átlagkoncentrációját akarjuk ellenállásméréssel meghatározni, akkor az egyenáramu mérést részesítjük előnyben, míg a koncentráció-inhomogenitások kimutatására az örvényáramos mérés az alkalmasabb.

6. feladat

Határozzuk meg a $V(r) = \frac{1}{2} Dr^2$ potenciálban kötött elektron energiaszintjét mágneses térben!

Megoldás

\hat{B} homogén mágneses térben mozgó elektron Hamilton-operátora ($e \gg 0$)

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} Dr^2 + \frac{e\hbar}{2mc} (\underline{L} + \underline{\sigma}) B \equiv \hat{H}_0 + \frac{e\hbar}{2mc} (\underline{L} + \underline{\sigma}) B \quad (1)$$

\hat{H}_0 három független lineáris oszcillátor Hamilton operátora, s így saját értékei

$$E_n = \hbar \omega (n + 3/2), \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

illetve saját függvényei

$$\chi_{n_1 n_2 n_3}(r) = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y) \psi_{n_3}(z) \quad n_1 + n_2 + n_3 = n \quad (3)$$

ahol ψ_i az egydimenziós oszcillátorprobléma ismert saját függvényei. Az n -edik energiaszint $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ -szeresen degenerált. Legyen a mágneses tér z -tengely irányú! \hat{H}^2 és \hat{H}_0 felcserélhető az L_x, L_y és \hat{L}_z operátorokkal, ezért létezik közös saját függvényrendszerük. Legyen ez

$$\Psi_{n \ell m s} = F_n(r) Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi) \chi^s(\alpha) \quad (4)$$

Ekkor

$$\hat{H} \Psi_{n \ell m s} = \left\{ \hbar \omega \left(n + \frac{3}{2} \right) + \frac{e \hbar}{2 m c} (m + s) B \right\} \Psi_{n \ell m s} \quad (5)$$

Meg kell határozni az összetartozó n, l, m, s értékeket és azt, hogy hányszorosan degeneráltak az egyes szintek. A H_0 operátor saját függvényei $\chi_{n_1 n_2 n_3}$ ($n = n_1 + n_2 + n_3$ rögz.) kifejezhetők az Y_{ℓ}^m függvények szerint. $\chi_{n_1 n_2 n_3}$ paritása

$$\chi_{n_1 n_2 n_3}(-r) = (-1)^n \chi_{n_1 n_2 n_3}(r)$$

Mivel

$$Y_{\ell}^m \left(-\frac{r}{|r|} \right) = (-1)^{\ell} Y_{\ell}^m \left(\frac{r}{|r|} \right),$$

a kifejezésben csak olyan Y_{ℓ}^m függvények szerepelhetnek, melyekre

$$(-1)^{\ell} = (-1)^n \quad (6)$$

Polárkoordinátákra áttérve $\chi_{n_1 n_2 n_3}$ \mathcal{V} -ban legfeljebb n -edfoku trigonometrikus polinom, ezért $\ell \leq n$. Ennek és a (6) feltételnek eleget tevő Y_{ℓ}^m gömbfüggvények már kifizetik az E_n -hez tartozó alteret, mivel

$$\sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \leq n}} 2\ell + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Igy a megengedett n, l, m, s értékek:

$$n = 0, 1, \dots$$

$$l = n, n-2, \dots, l \geq 0$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$$s = \pm 1$$

Az energiaszintek degeneráltsága pedig:

$$k = 0 \quad \begin{array}{l} n \text{ páros } n \\ n \text{ páratlan } n+1 \end{array}$$

$$k > 0 \quad \begin{array}{l} n-k \text{ páros } n-k+1 \\ n-k \text{ páratlan } n-k+2 \end{array}$$

7. feladat

Vizsgáljuk meg egy részecske szóródását a stacionárius állapotok módszerével a következő potenciál esetén.

$$V(x, y, z) = V(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = a.$$

Mutassuk meg, hogy azonos energia esetén a balról jobbra való áthaladás valószínűsége megegyezik a jobbról balra való áthaladás valószínűségével. (A fogalmak megtalálhatók: Marx: Kvantummechanika 28. pont)

Megoldás

A részecske Hamilton operátora felcserélhető az $x = 0$ sikkal párhuzamos impulzussal, így hullámfüggvénye

$$\Psi = \varphi(x) \cdot e^{ik_y y}$$

alakba írható. $\varphi(x)$ egydimenziós mozgást ír le.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = E_x \varphi(x), \quad E_x = E - \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} \quad (1)$$

$V(x)$ aszimptotikus viselkedéséből következik, hogy a hullámfüggvény

$$\varphi(x) \approx A \cdot e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x}, \quad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_x - a, \quad \text{ha } x \rightarrow -\infty \quad (2)$$

$$C e^{ik_x x} + D e^{-ik_x x}, \approx \varphi(x) \quad \text{és } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_x, \quad \text{ha } x \rightarrow +\infty$$

$\varphi(x)$ stacionárius állapotot ír le, ezért az áramsűrűség állandó, s így

$$k (|A|^2 - |B|^2) = K (|C|^2 - |D|^2) \quad (3)$$

Az (1) differenciálegyenletnek két lineárisan független megoldása van, ezért az A, B, C, D, együtthatók közül kettőt szabadon választhatunk meg. Legyen $\psi(x)$ olyan megoldás amelyre $D=0$, de $C \neq 0$. Ekkor a balról jobbra való áthaladás valószínűsége

$$P_{bj} = \frac{J_{\text{kifutó}}}{J_{\text{kifutó}}} = \frac{k|C|^2}{k|A|^2}$$

ψ és ψ^* a differenciálegyenletnek két lineárisan független megoldása, ezekből kikeverhető az χ hullámfüggvény, amely $x \rightarrow -\infty$ -re csak kifutót tartalmaz:

$$\chi = B^* \psi - A \psi^*$$

Ebből a jobbról-balra való áthaladás valószínűsége (a (3) összefüggést is felhasználva):

$$P_{jb} = \frac{k(|B|^2 - |A|^2)^2}{k|A|^2 \cdot |C|^2} = \frac{k|C|^2}{k|A|^2}$$

Tehát valóban

$$P_{bj} = P_{jb}$$

V. évfolyam

1. feladat

Becsüljük meg gömszerű pórusok (gázzal töltött üregek) által okozott fajlagos ellenállásnövekedést fémekben, amikor a pórusok átmérője

- a. / lényegesen nagyobb,
 - b. / lényegesen kisebb,
- az elektron szabad úthosszánál!

Megoldás

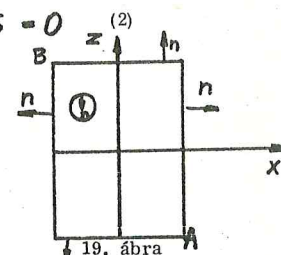
a. / Ha a pórusok átmérője lényegesen nagyobb, az elektronok átlagos szabadúthosszánál, a fémes mátrixot a homogén fém vezetőképességével, a benne helyet foglaló pórusokat pedig zérus vezetőképességgel jellemezhetjük. Feladatunk tehát ebben az esetben inhomogén anyagból készített vezető ellenállásának meghatározása. Homogén vezetőben a potenciál kielégíti Laplace egyenletét, a

$$\nabla \cdot \text{grad } V(x) = 0 \tag{1}$$

határfeltétel mellett, ahol $\underline{n}(r)$ a felületi normális egységvektor. A szabad határfelület most a vezető palástja, és a pórusok felülete. Átmérőjéhez képest hosszú vezető esetén további feltétel még, hogy a vezetőn áram folyik. A Laplace egyenletnek a mondott feltételeket kielégítő pontos megoldása nem ismert. A közelítő számítás könnyebb elvégzése érdekében vesszük be először egy egzakt összefüggést az ellenállásra! Legyen a potenciálprobléma ismeretlen pontos megoldása $V(r)$, és tekintsük a Laplace egyenletet ugyancsak kielégítő $U = z$ függvényt. Alkalmazzuk ezekre a Green-tételt!

$$\int U (\text{grad } V) \cdot \underline{n} \, dS - \int V (\text{grad } U) \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

Itt a felületi integrál kiterjesztendő a pórusok felületére, a vezető palástjára, valamint azon két felületre, amely a hengert "fent" és "lent" lezárja, s amelyről a potenciált az ellenállásmérés céljára levesszük. Az (1) határfeltétel és a 19. ábra alapján világos, hogy (2) így is írható:



$$\frac{1}{\sigma} I L - V_{\text{mért}} Q - \int_{\text{pórusok}} V (\text{grad } U) \cdot \underline{n} \, dS = 0, \tag{3}$$

ahol I a vezető Q keresztmetszetén átfolyó teljes áram, L a potenciálmérés A és B síkjai közötti távolság, V mért pedig a mért potenciálkülönbség.

$$Q V_{\text{mért}} = \int_A V \, ds - \int_B V \, ds$$

(3)-ból az ellenállásra azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{V_{\text{mért}}} = \sigma \frac{Q}{L} \left(1 + \frac{\int_{\text{pórusok}} V (\text{grad } U) \cdot \underline{n} \, dS}{Q V_{\text{mért}}} \right) \tag{4}$$

Ez az összefüggés közelítő számítás céljára azért alkalmas, mert benne az ismeretlen $V(r)$ potenciálnak csak a pórusok felületén vett értékei szerepelnek. Tudjuk, hogy végtelen homogén vezetőben elhelyezkedő q sugarú nem vezető gömb körül a potenciál a gömb középpontjára vonatkoztatott koordinátákban

$$V_i(r, z) = E_0 \left(z + \frac{q^2 z}{2r^3} \right) \tag{5}$$

alaku, ha a gömbtől távol z irányu, homogén E_0 térerősség uralkodik. Világos az is, hogy az átlagos mért potenciálkülönbség a z tengellyel párhuzamos L hosszúságú szakasz mentén

$$V_{\text{mért}} = E_0 L$$

Az egzaktul végigszámolható feladatokon nyert tapasztalatok alapján azt várjuk, hogy elég alacson póruskoncentráció esetén a határfeltételek az (5) megoldást nem módosítják lényegesen. Így első közelítésben (4) -ben $V(r)$ helyébe $V_1(r)$ -t helyettesítjük. Ebből

$$\frac{1}{R} = \sigma \frac{Q}{L} \left(1 - \frac{P}{QL} 2\pi a^2\right) \quad (6)$$

ahol P-vel az A és B felületek között elhelyezkedő pórusok számát jelöljük. A pórusok térfogati koncentrációját bevezetve

$$\frac{1}{R} = \sigma \frac{Q}{L} \left(1 - \frac{2}{3} c\right), \quad \text{illetve}$$

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{mátrix}} \left(1 - \frac{2}{3} c\right) \quad (7)$$

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a Pórusokat tartalmazó fém átlagos vezetőképessége

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_{\text{mátrix}} (1 - c) \quad (8)$$

Nem egyenlő az effektív vezetőképességgel, miként azt várnánk. Ennek az az oka, hogy a vezetőképesség (8) térfogati átlaga csak akkor egyenlő az effektív vezetőképességgel, ha a térerősség vektor a vezető minden pontjában azonos.

Az átlagos és az effektív vezetőképesség közötti különbséget esetünkben az okozza, hogy a nem vezető második fázisokat az áramvonalak megkerülik, az áram-sűrűség és térerősségvektor helyfüggővé válik, a homogén áramvezetésből a második fázisok térfogatánál nagyobb térfogat szorul ki.

Az "első" közelítésben csak a homogén alaptér által a pórusokon létrehozott dipol teret vettük figyelembe. Második közelítésben az egyes pórusok közötti kölcsönhatást is figyelembe kell venni.

Ez a korrekció nyilván c^2 nagyságrendű lesz. Az effektív vezetőképességet Rayleigh (Phil. Mag. 34. 481. 1892) köbös pórusrács esetére c-ben hatodrendű tagokig számította ki és c hatványainak együtthatóit mind 1 nagyságrendűnek találta, c együtthatójára természetesen neki is 3/2-ed jött ki.

b. /Ha a pórusok átmérője lényegesen kisebb az elektronok szabaduthosszánál, vizsgálatainknak le kell nyulni az atomszintig.

Ismeretes, hogy a fajlagos ellenállás

$$\rho = \frac{B}{\Lambda} \quad (9)$$

ahol B az alaprácsra jellemző állandó (mely hőmérséklet és rácshiba független) Λ pedig a szabad uthossz. (B értéke egyszerű fémekre $10^{-44} - 10^{-42} \Omega \text{ cm}^2$ nagyságrendű, ami azt jelenti, hogy fémekben a szabad uthossz 100 \AA nagyságrendű. Ez igen szemléletesen mutatja azt a kvantummechanikai effektust, hogy vezetési elektronok az ideális kristályrácsra nem szóródnak).

Tudjuk, hogy a vezetési szabaduthossz az elasztikus szórás differenciális hatáskeresztmetszetével a következő összefüggésben van. (V. Ö. Ziman: Electrons and Phonons):

$$\frac{1}{\Lambda} = p \int (1 - \cos \theta) q(\theta) d\Omega \quad (10)$$

ahol p az egységnyi térfogathon lévő szórócentrumok száma, $q(\theta)$ a differenciális szórási hatáskeresztmetszet, θ a szórás szöge, az integrálás pedig a teljes térszögre történik.

A pórusokon (a Pauli elv miatt) csak a Fermi felületen lévő elektronok szóródnak. A pórusok felülete az elektronok számára olyan potenciálgát, amelynek energiája a Fermi elektronok (néhány eV-os) energiájánál a néhány eV nagyságú kilépési munkával nagyobb.

Ha a Fermi elektronokat klasszikus részecskének tekintjük, akkor a szóródó részecskék energiájánál nagyobb energiájú gömb-szimmetrikus potenciálgátra

$$q(\theta) = \frac{1}{4} a^2 \quad (11)$$

ahol a a pórusok sugara. Így (10) -ből

$$\frac{1}{\Lambda} = p \pi a^2 \quad (12)$$

Az elektronok viselkedése a klasszikus viselkedéstől akkor tér el lényegesen, ha hullámhosszuk a potenciál valamely jellegzetes méretével összemérhető. A Fermi elektronok hullámhossza közönséges fémekben rácsháló nagyságrendű. Így a 100 \AA -nél nagyobb pórusokon diffrakciós és tunnel effektussal nem kell számolnunk. A potenciálfal meredeksége azonban ebben esetben is összemérhető a hullámhosszal. Könnyű azonban meggyőződni arról, hogy esetünkben a kvantummechanikaszámítás nem vezet a klasszikus számítástól megkülönböztethető eredményre.

A térfogati koncentráció bevezetve, (10)-ből és (12)-ből:

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{4}{3} \frac{1}{a} \cdot c$$

Azzal a nem triviális, de empirikusan jól bevált feltevéssel élve, hogy különböző szórásmechanizmusokra

$$\frac{1}{\Lambda_{\text{eff}}} = \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_2} \quad (13)$$

(V.Ö. Ziman: Electrons and Phonons)

azt kapjuk, hogy

$$p = p_0 + \frac{4}{3} \frac{p_0 \Lambda_b}{a} c \quad (14)$$

illetve

$$p = p_0 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\Lambda_b}{a} c \right) \quad (15)$$

ahol Λ_b -vel a mátrixra jellemző szabad úthosszat jelöltük. (14)-ből látható, hogy a pórusok okozta többlet ellenállás (13) érvényessége esetén mind a hőmérséklettől, mind egyéb szórócentrumok jelenlététől független, másszóval a pórusokra is teljesül a Matthiessen szabály. (15)-ből könnyű belátni, hogy a relatív effektív ellenállásnövekedés nagy szabadúthosszak esetén nagyságrendben is meghaladhatja a makroszkópikus elektrodinamikai effektusból eredő növekedést.

Azon esetek tárgyalása, amikor a pórusok átmérője az elektronhullámhosszal összemérhető (pl. Bi), vagy a szabadúthossz nagyságrendjébe esik, az itt tárgyalt közelítésekkel nem végezhető el. Ez a kérdéskör máig sincs megnyugtatóan tisztázva.

2. feladat

Nagyenergiájú elektromágneses sugarak előállításának egyik módja az, hogy ω frekvenciájú, nagy fonsűrűségű lasersugárral betatronban felgyorsított, jól kollimált elektronsugarat lövünk szembe. Az elektronok $v = \beta c$ sebességgel jönnek ki a gyorsítóból. Számoljuk végig a szóródási folyamatot, s határozzuk meg az így nyerhető sugárzás maximális energiáját!

Megoldás

Először a szórt fotonok energiáját határozzuk meg, azután a hatáskeresztmetszetet polarizálatlan nyalábokra.

Legyen p az elektron, k a foton négyesimpulzusa szórás előtt, p' és k' pedig a szórás után. A szóródást laboratóriumi rendszerben vizsgáljuk. $\hbar = 1$, $c = 1$ egységekben

$$p + k = p' + k' \quad (1)$$

Ebből

$$p + k - k' = p'$$

Mindkét oldalt négyzetreemelve

$$pk - pk' - kk' = 0 \quad (2)$$

Laboratóriumi rendszerben

$$p = \begin{pmatrix} \frac{m\beta n_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ i \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} \omega_0 n_x \\ i\omega_0 \end{pmatrix}; \quad k' = \begin{pmatrix} \omega'_0 n'_x \\ i\omega'_0 \end{pmatrix}$$

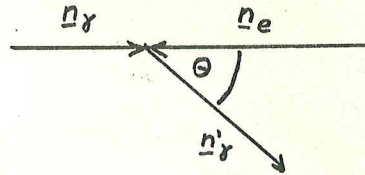
A jelölések a 20. ábrán látható szórásfolyamatra vonatkoznak.

Igy

$$(\underline{n}_\gamma \underline{n}_e) = -1$$

$$(\underline{n}_e \underline{n}'_\gamma) = -\cos \theta$$

$$(\underline{n}_\gamma \underline{n}'_\gamma) = \cos \theta$$



20. ábra

Ezek figyelembevételével

$$pk = -m\omega_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3a)$$

$$pk' = -m\omega_0' \frac{1+\beta \cdot \cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3b)$$

$$kk' = -\omega\omega_0 (1 - \cos \theta) \quad (3c)$$

Ezeket (2)-be helyettesítve ω_0' kifejezhető

$$\omega_0' = \frac{m\omega_0 (1+\beta)}{m + \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} + \cos \theta (m\beta - \omega_0 \sqrt{1-\beta^2})} \quad (4)$$

Mivel az elektron nyugalmi energiája nagyságrendekkel nagyobb az általánosan használt laser-foton energiájánál, vagyis $m \gg \omega_0$ s föltéve, hogy az elektron hármásimpulzusának abszolút értéke nagyobb a foton hármásimpulzusánál, a visszaszórt fotonnak lesz a legnagyobb energiája. Ezért

$$\omega_{0max}' = \omega_0 \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (5)$$

Látható, hogy $1-\beta$ csökkenésével ω_0' rohamosan nő.

A feladat második részében a hatáskeresztmetszetet számítjuk ki. A hatáskeresztmetszet célszerű invariáns mennyiségek függvényeként vizsgálni.

$$s = (p+k)^2 - (p'+k')^2 = -m^2 + 2pk = -m^2 + 2p'k' \quad (6a)$$

$$t = (p-p')^2 = (k'-k)^2 = -2(m^2 + pp') = -2kk' \quad (6b)$$

$$u = (p-k')^2 = (p'-k)^2 = -m^2 - 2pk' = -m^2 - 2p'k \quad (6c)$$

Ezek közül azonban csak kettő független. Fennáll közöttük a következő összefüggés:

$$s + t + u = -2m^2 \quad (7)$$

Ezeknek segítségével a polarizálatlan elektron-foton szóródási hatáskeresztmetszetet (V.Ö. Landau-Lifschitz: Relativistische Quantentheorie 86§)

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{-m^2 dt}{(s+m^2)^2} \left\{ \left(\frac{-m^2}{s+m^2} + \frac{-m^2}{u+m^2} \right)^2 + \left(\frac{-m^2}{s+m^2} + \frac{-m^2}{u+m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s+m^2}{u+m^2} + \frac{u+m^2}{s+m^2} \right) \right\} \quad (8)$$

ahol

$$r_e = \frac{e^2}{m}$$

A (3) összefüggéseket felhasználva

$$s+m^2 = -2m\omega_0' \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u+m^2 = -2m\omega_0' \frac{1+\beta \cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = 2\omega_0' \omega_0' (1 - \cos\theta) \quad , \text{ s így}$$

$$dt = -2\omega_0' \omega_0' \sin\theta d\theta + 2\omega_0' (1 - \cos\theta) \frac{d\omega_0'}{d\theta}$$

Viszont (4) szerint

$$\frac{d\omega_0'}{d\theta} = -\omega_0'^2 \frac{m\beta - \omega_0' \sqrt{1-\beta^2}}{m\omega_0' (1+\beta)} \sin\theta$$

Igy

$$dt = -2\omega_0' \omega_0' \left[1 + \frac{\omega_0' (1 - \cos\theta) (m\beta - \omega_0' \sqrt{1-\beta^2})}{m\omega_0' (1+\beta)} \right] \sin\theta d\theta$$

Ezeket felhasználva

$$d\sigma = \frac{r_e^2 \omega_0' (1-\beta)}{2\omega_0' (1+\beta)} \left[1 + \frac{\omega_0' (1 - \cos\theta) (m\beta - \omega_0' \sqrt{1-\beta^2})}{m\omega_0' (1+\beta)} \right] \left\{ \frac{\omega_0' (1+\beta)}{\omega_0' (1+\beta \cos\theta)} + \frac{\omega_0' (1+\beta \cos\theta)}{\omega_0' (1+\beta)} - \sin^2\theta \right\} d\tau$$

ahol

$$d\tau = 2\pi \sin\theta d\theta$$

Látjuk, hogy képletünkben $\beta = 0$ helyettesítéssel és az erre az esetre érvényes

$$\frac{1 - \cos\theta}{m} = \frac{1}{\omega_0'} - \frac{1}{\omega_0}$$

felhasználásával visszakapjuk a Klein-Nishina formulát.

3. feladat

Adott a

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

alakú Hamilton operátor λ csatolási tényezővel. Mutassuk meg, hogy a

$$z = S p e^{-\beta H}$$

állapotösszegegre fennáll a

$$\frac{\partial^2 \ln z}{\partial \lambda^2} = 0$$

egyenlőség.

Megoldás

Tegyük fel, hogy a Hamilton operátor sajátértékei és sajátvektorai λ szerint kétszer differenciálhatók. Jelöljük E_i -vel az i -edik sajátértéket, $|i\rangle$ pedig az i -edik sajátvektor legyen. Ekkor

$$H|i\rangle = E_i|i\rangle \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Az állapotösszeg pedig:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (2)$$

A λ szerinti differenciálást vesszővel jelöljük, s legyen

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i O_i \cdot e^{-\beta E_i}$$

Ekkor

$$Z' = -\beta Z \cdot \langle E' \rangle$$

$$Z'' = \beta^2 Z \langle E'^2 \rangle - \beta Z \langle E' \rangle^2$$

$$(\ln Z)'' = \frac{Z'}{Z} - \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2 = \beta^2 (\langle E'^2 \rangle - \langle E' \rangle^2) - \beta E'' \quad (3)$$

Mivel az első tag az energia szórásnégyzete, így pozitív, ezért csak azt kell belátni, hogy $E'' \leq 0$

Differenciáljuk (1) -et λ szerint

$$(H - E_i)|i'\rangle - (H_i - E_i')|i\rangle = 0 \quad (4)$$

Majd szorozzuk $\langle k|$ -val:

$$(E_k - E_i)\langle k|i'\rangle + \langle k|H_i|i\rangle - E_i' \delta_{ki} = 0 \quad (5)$$

Ha $E_k = E_i$, akkor

$$\langle k|H_i|i\rangle = \delta_{ki} E_i' \quad (6)$$

ha pedig $E_k \neq E_i$, akkor

$$\langle k|H_i|i\rangle = (E_i - E_k)\langle k|i'\rangle \quad (7)$$

Differenciáljuk (4) -et még egyszer!

$$(H - E_i)|i''\rangle + 2(H_i - E_i')|i'\rangle - E_i''|i\rangle = 0$$

$\langle i|$ -vel szorozva, s a $\sum_k |k\rangle\langle k| = 1$ operátor beírásával:

$$E_i'' = 2 \sum_k (\langle i|H_i|k\rangle \langle k|i'\rangle) - 2E_i' \langle i|i'\rangle \quad (8)$$

Külön végezzük el az összegezést azon k -kra, amelyekre $E_k = E_i$

$$\sum_k \langle i|H_i|k\rangle \langle k|i'\rangle = E_i' \langle i|i'\rangle;$$

$$E_k = E_i.$$

Ez kiejti (8) második tagját, s így (7) figyelembevételével

$$E_i'' = 2 \sum_k (E_i - E_k) |\langle i'|k\rangle|^2; \quad (9)$$

$$E_i \neq E_k.$$

Az összegezés most már kiterjeszhető $E_i = E_k$ -ra is, s így

$$\langle E^2 \rangle = -\frac{1}{Z} \sum_{ik} 2(E_k - E_i) |\langle i | k \rangle|^2 e^{-\beta E_i}$$

Az (i, k) és a (k, i) párokat egyútt összegezve

$$\langle E^2 \rangle = -\frac{1}{Z} \sum_{(i, k)} (E_k - E_i) |\langle i | k \rangle|^2 (e^{-\beta E_i} - e^{-\beta E_k})$$

Az összeg minden tagja pozitív, s így valóban

$$\langle E^2 \rangle \geq 0.$$

4. feladat

Egy d mágneses dipól, irányára merőleges tengely körül ω szögsebességgel forog. Irjuk le az elektromágneses teret a sugárzási zónában! (Vizsgáljuk az elektromágneses teret együttforgó rendszerből) [Pulzár modell]

Megoldás

A Maxwell egyenletek adott $M(r)$ mágneses dipólsűrűség esetén Coulomb mértéket használva a következő egyenletekre vezetnek.

$$\Delta \phi = -4\pi \rho \tag{1}$$

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}_t \tag{2}$$

ahol ρ a térfogati töltéssűrűség, és \underline{j}_t az árameloszlás divergenciamentes része. Feladatunkban $\rho = 0$, ezért $\phi = 0$, és a mágneses dipóloszláshoz rendelt árameloszlás $\underline{j}_m = c[\nabla \times \underline{M}]$ teljesen divergenciamentes. Így megoldandó a

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = -4\pi [\nabla \times \underline{M}] \tag{3}$$

egyenlet.

Bevezetve az $\underline{A}(x, t) = \nabla \times \underline{z}(x, t)$ összefüggéssel a $\underline{z}(x, t)$ teret, az elektromos dipólsugárzás Hertz-féle megoldásával analóg módon következik a

$$\Delta \underline{z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{z}} = -4\pi \underline{M} \tag{4}$$

egyenlet, melynek megoldása a hullámegyenlet Green-függvényének segítségével

$$\underline{z}(x, t) = \int \frac{\underline{M}(x', t - \frac{|x - x'|}{c})}{|x - x'|} d^3x'$$

alakba írható. Esetünkben $\underline{M}(x, t) = \delta^{(3)}(x) \cdot \underline{m}(t) \cdot \delta^{(3)}(x) \cos \omega t$, $\sin \omega t, 0$ Így

$$\underline{z}(x, t) = \frac{\underline{m}(t - \frac{r}{c})}{r} \tag{5}$$

$\underline{z}, \underline{A}, \underline{\phi}$ definícióját kihasználva kapjuk \underline{E} -t és \underline{B} -t, melynek csak a hullámzónában domináns tagjait írjuk ki.

$$\underline{B}(x, t)_H = \frac{[\underline{z} \times (\underline{z} \times \underline{m}'')]}{c^2 r^3}$$

$$\underline{E}(x, t)_H = \frac{[\underline{x} \times \underline{m}''']}{c^2 r^2} \quad (7)$$

itt m'' a $t - \frac{r}{c}$ szerinti deriváltat jelenti a $t - \frac{r}{c}$ időpillanatban. Mivel itt \underline{E} merőleges \underline{B} -re, a Poynting-vektor azonnal adódik:

$$\underline{S} = \frac{\underline{x} |\underline{x} \times \underline{m}''|^2}{4\pi c^3 r^2}$$

Tehát \underline{S} -nek csak radiális komponense van

$$S_{rad} = \frac{|m''|^2 \sin^2 \gamma(\tau) \left| \tau - t - \frac{r}{c} \right|}{4\pi c^3 r^2} = \frac{\omega^4 m^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \gamma(\tau) \left| \tau - t - \frac{r}{c} \right|$$

ahol $\gamma(\tau)$ a τ pillanatban a megfigyelési pont és a dipól által bezárt szög. $\cos \gamma$ -t kifejezhetjük a dipólmomentum és a megfigyelési pont gömbi polárszögeivel, amely összefüggés a dipól speciális helyzetében $\cos \gamma(\tau) = \sin \vartheta \cdot \cos(\varphi - \omega\tau)$ alakul. (ϑ és φ a megfigyelési pont adatai). Így

$$S_{rad} = \frac{\omega^4 d^2}{4\pi c^3 r^2} [1 - \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2(\varphi - \omega\tau)] \left| \tau - t - \frac{r}{c} \right|$$

Ha speciálisan a dipól síkjában észlelünk, akkor az energiamaximum helyeit a

$$\varphi - \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

egyenlet határozza meg. Bevezetve $\psi(t) = \varphi - \omega t$ jelölést, ez az egyenlet egy archimedesi spirális két karját adja. $\psi(t)$ időfüggése miatt a spirális körbeforog és a rögzített helyzetű megfigyelő $T = \pi/\omega$ periódusidővel energiamaximumokat észlel ("pulzár")

Megjegyzés:

A feladat természetesen megoldható két, egymásra merőleges $\frac{\pi}{2}$

relatív fázisu harmonikusan oszcilláló, és azonos maximális mágneses momentum dipólus terének szuperpozíciójával is.

Irodalom: V. G. Eudzan, J. E. Allen. Nature, 228, 348. (1970. okt.)

5. feladat

$$H = \omega_0 \sum_k a_k^+ a_k - \frac{\omega_0}{4} \sum_k \cos(kd) A_k A_{-k} = H_0 + H'$$

Hamilton operátor kölcsönható bozongázt ír le. ($A_k = a_k + a_{-k}^+$)
Tekintsük H' -t perturbációnak, írjuk fel és oldjuk meg a megfelelő Dyson egyenletet a

$$G(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i) \langle 0 | T a_k(t) a_k^+(0) | 0 \rangle e^{i\omega t} dt$$

Green függvény-Fourier transzformáltra.
(Irodalom: Abrikosov, Gorkov, Dzsalisinszkij: Kvantumtérelméleti módszerek a statisztikus fizikában.)

Megoldás

Az alábbi Hamilton operátor a rácsrezgések elemi elméletében szerepel:

$$H = \omega_0 \sum_k a_k^+ a_k - \frac{\omega_0}{4} \sum_k \cos(kd) A_k A_{-k}$$

ahol

$$A_k = a_k + a_{-k}^+$$

és az a_k operátorok eleget tesznek a szokásos Bose kommutációs relációknak:

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{k, k'}$$

és a többi kommutátor zérus.

H első tagja az "Einstein fononokat" írja le. (Minden oszcillátor frekvenciája azonos ω_0).

H elemi átalakításokkal ilyen alakra hozható:

$$H = \text{konst.} + H_0 + H_1$$

ahol

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k, \quad \epsilon_k = \omega_0 \left(1 - \frac{\cos(kd)}{2}\right)$$

és $H_1 = \frac{1}{2} \sum_k V_k (a_k a_{-k} + a_k^\dagger a_{-k}^\dagger) = \sum_{k>0} V_k (a_k a_{-k} + a_{-k}^\dagger a_k^\dagger)$

itt $V_k = -\frac{\omega_0}{2} \cos(kd)$.

H ebben a formájában teljesen analóg a szuperfolyékonyság un. Bogoljubov modelljében szereplő Hamilton operátorral. Ennek megfelelően Bogoljubov transzformációval diagonalizálható is, így a keresett Green függvény egyszerű számolás során megkapható.

A térelméleti technika gyakorlása céljából tanulságos G -t grafikusan meghatározni.

A H_0 -nak megfelelő szabad propagátor:

$$G_0(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + i0}$$

H_1 ilyen vertexeket ad:

A "renomált" Green függvényre ekkor fennáll:

$$\hat{G}(k, \omega) = G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) \hat{V} G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) \hat{V} G_0(k, \omega) \hat{V} G_0(k, \omega) + \dots$$

$$G(k, \omega) = G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) G_0(k, -\omega) G_0(k, \omega) + \dots$$

(\hat{V} -ben páratlan rendű gráfok nem lépnek fel, mert nincs ilyen vertex:)

A fenti egyenlet így is írható:

$$\hat{G}(k, \omega) = G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) M(k, \omega) G_0(k, \omega)$$

(2)

Az előzővel való összehasonlítás mutatja, hogy az M sajátenergia itt:

$$M(k, \omega) = V_k^2 G_0(k, -\omega)$$

A grafikus egyenleteknek megfelelő analitikus kifejezések:

$$G = \frac{G_0}{1 - G_0 M} = \frac{G_0}{\omega^2 - \epsilon_k^2} = \frac{A_k}{\omega - \epsilon_k + i0} + \frac{B_k}{\omega + \epsilon_k - i0}$$

Itt a következő jelöléseket vezettük be:

$$E_k = \omega_0 (1 - \cos kd)$$

$$A_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k}\right)$$

$$B_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k}\right)$$

Vegyük észre, hogy a d rácsállandóhoz képest hosszú hullámhosszak ($kd \rightarrow 0$) esetén a renormált sajátfrekvencia lineáris ("Debye fonon"), azaz $E_k \sim k$, az A_k és B_k residumok pedig $\frac{1}{k}$ szerint divergálnak.

Megjegyzés

Szokatlanul tűnhet, hogy a (2) egyenlettel definiált sajátenergia a G_0 vonal szétvágásával kettévágható. Ez azért van így, mert (1)-t a (2) alakra akartuk hozni: (2) iterálása nyilván visszaadja (1)-t.

Ha \hat{G} -n kívül bevezetnénk $\hat{G} = -i < T a_k(t) a_{-k}(0) >$ anomális propagátort is (vegyük észre, hogy $\hat{G} \neq 0$ mert H operátorunk nem kommutál a részecskeszám operátorával) akkor G és \hat{G} -ra a Beljajev egyenletekkel párhuzamba állítható egyenletrendszert írhatnánk fel.

$$\begin{aligned} G(k, \omega) &= G_0(k, \omega) + \left[\text{diagram: } G_0 \text{ line with a box containing } \hat{\Sigma} \text{ and a } G_0 \text{ line} \right] \\ \hat{G}(k, \omega) &= G_0(-k, \omega) + \left[\text{diagram: } G_0 \text{ line with a box containing } \hat{\Sigma} \text{ and a } \hat{G} \text{ line} \right] \end{aligned}$$

(3)

ahol most valóban azokat a gráfokat jelöli, amelyek nem vágathók ketté egy folytonos vonal elvágásával. Ilyen gráf csak kettő van, a már felrajzolt két elemi vertex, így

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}' = V_k$$

(A normális sajátenergia éppen ezért hiányzik (3)-ból mert a megfelelő gráf szétvágható volna)

(3)-ból \hat{G} -t kiküszöbölve (2)-re juthatunk vissza.

6. feladat

Relativisztikus v sebességgel kiáramló gáz hajt egy rakétát. Irjuk le a rakéta mozgását!

Megoldás

Tegyük fel, hogy a rakéta hátrafelé folyamatosan időegység alatt μ tömeget dob ki, s legyen ennek a rakétához viszonyított sebessége $w = \text{állandó}$.

A rakétához rögzített rendszerben dt idő alatt a rakéta tömege dm -mel csökken, sebessége dv' -vel nő. Az energia- és impulzusmegmaradás:

$$-dm = \frac{\mu dt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \quad m dv' = \frac{\mu dt w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Ebből a következő differenciálegyenlet nyerhető:

$$-\frac{dv'}{dm} = \frac{w}{m}. \quad (1)$$

A Földhöz rögzített koordináta-rendszerben legyen a sebességváltozás dv . A sebességösszeadás törvénye szerint:

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{v dv'}{c^2}}$$

ahol v a rakéta pillanatnyi sebessége

A Földhöz rögzített rendszerben. Így az (1) egyenlet

$$-\frac{dv}{dm} = \frac{w(1 - \frac{v^2}{c^2})}{m},$$

alakra hozható, amiből a rakéta végsebessége a megmaradó m_1 tömeg függvényében:

$$v = c \frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right)^{2 \frac{w}{c}}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right)^{2 \frac{w}{c}}}$$

(Itt m_0 a rakéta indulási tömegét jelenti)

7. feladat

Egy tömegpont (egy dimenziós probléma) $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ potenciál hatása alatt mozog. Legyen a koordináta és impulzus operátora \hat{x} és \hat{p} , és legyen

$$\hat{a} = k(\hat{x} + i f \hat{p})$$

$$\hat{a}^\dagger = k(\hat{x} - i f \hat{p})$$

ahol f és k állandók. Vezessük be az \hat{a} operátor sajátállapotait (az un. koherens állapotokat)

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

Határozzuk meg az $|\alpha\rangle$ állapot hullámfüggvényeit

$$\psi_\alpha(x) = \langle x | \alpha \rangle - t,$$

és vizsgáljuk meg ennek időbeli változását

$$\psi_\alpha(x, t) - t!$$

Megjegyzés

A feladat -sajnálatos módon- hibásan került kitűzésre. Az \hat{a} és \hat{a}^\dagger operátorok definíciójából az f állandó hiányzott. A legtöbb megoldó ezt észre is vette, s a helyes operátorokkal számolták végig a feladatot.

Megoldás

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $|\alpha\rangle$ állapotok normáltak.

Oszcillátor-probléma esetén a teljes Hamilton operátor:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 = \hbar \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right),$$

ahol

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \text{és} \quad k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \quad \text{és} \quad f = \frac{1}{m\omega} \quad \text{a feladatban szereplő konstansok.}$$

Természetesen

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1; \quad [\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar \omega \hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar \omega \hat{a}^\dagger$$

Az \hat{a} sajátállapotát keressük, melyre

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

energia sajátállapotok teljes ortonormált rendszert alkotnak, így

$$|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle |n\rangle$$

$\langle n|\alpha\rangle$ meghatározására használjuk fel a sajátérték egyenletet:

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \langle n|\alpha\rangle |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n+1|\alpha\rangle \sqrt{n+1} |n\rangle = \\ &= \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \langle n+1|\alpha\rangle |n\rangle. \end{aligned}$$

A kifejtés egyértelmősége miatt

$$\sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle,$$

így

$$\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Ha megköveteljük, hogy az $|\alpha\rangle$ normált legyen,

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = 1 \quad \text{ből}$$

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1.$$

Így

$$|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

azaz

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + i\delta}$$

Válasszunk $\delta = 0$ -t, s számítsuk ki a hullámfüggvényt!

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$$

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle x|n\rangle$$

De az $\langle x|n\rangle$ saját függvényeket már a kvantummechanikából ismerjük, így

$$\psi_\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left(\frac{m\omega}{\hbar k}\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\alpha}{\sqrt{2}})^n}{n!} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Felhasználva a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(\xi) = e^{-\lambda^2 + 2\lambda\xi}$$

összefüggést kapjuk

$$\psi_\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left(\frac{m\omega}{\hbar k}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2} + \alpha \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x - \frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right].$$

Legyen $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$

$$\psi_\alpha(x) = e^{-i\delta_\alpha} \left(\frac{m\omega}{\hbar k}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar} (x - \langle x \rangle)^2 + i \frac{\langle p \rangle}{\hbar} x\right]$$

ahol

$$\langle x \rangle = \alpha_r \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \quad ; \quad \langle p \rangle = \alpha_i \sqrt{2\hbar m\omega} \quad \text{és} \quad \delta_\alpha = \alpha_i \alpha_r \quad \text{fázisfaktor}$$

Bevezetve a $(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ és $(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$ jelöléseket

$$\psi_\alpha(x) = \frac{e^{-i\delta_\alpha}}{[2\pi(\Delta x)^2]^{1/4}} \exp\left[-\left(\frac{x - \langle x \rangle}{2\Delta x}\right)^2 + i \frac{\langle p \rangle}{\hbar} x\right]$$

Vizsgáljuk az $|\alpha\rangle$ állapot időbeli fejlődését!

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle = H |\alpha, t\rangle$$

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\alpha, 0\rangle$$

Legyen $|\alpha, 0\rangle = |\alpha\rangle$, akkor

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |n\rangle =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\frac{i}{\hbar} \hbar \omega (n+\frac{1}{2}) t} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - i\omega \frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{n!} |n\rangle$$

Innen látható, hogy

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega \frac{t}{2}} |\alpha(t)\rangle, \text{ ahol } \alpha(t) = \alpha \cdot e^{-i\omega t}$$

Ebből a hullámfüggvény könnyen származtatható:

$$\psi_{\alpha}(x, t) = \langle x | \alpha(t) \rangle \cdot e^{-i\omega \frac{t}{2}}$$

Legyen $\langle x(t) \rangle = 2\alpha_r(t) \cdot \Delta x$ és $\langle p(t) \rangle = 2\alpha_i(t) \Delta p$, ezekkel

$$\psi_{\alpha}(x, t) = \frac{e^{-i\omega \frac{t}{2} - i\phi_{\alpha}(t)}}{[2\sigma(\Delta x)^2]^{1/4}} \exp\left[-\left(\frac{x - \langle x(t) \rangle}{2\Delta x}\right)^2 + i\langle p(t) \rangle x\right].$$