5. Útkereső algoritmusok

Dr. Szalkai István

2020.03.31.

Probléma: Adott $G=(V,E)$ súlyozott élű gráf: $w:E\to\mathbb{R}_+$ **súly/költség-függvény**, adott két csúcs $a,b\in V$. Keresendő a és b között *legkisebb összköltségű* ("legrövidebb/legolcsóbb") út,

azaz $P=(x_0,...,x_t)$, ahol $x_0=a$ és $x_n=b$ és

$$w\left(P\right):=\sum_{i=1}^{t}\ w(x_{i-1},x_i)$$

minimális. □

Megjegyzések: $w\left(e\right)=1$ esetén $w\left(P\right)=$ P -ben levő élek száma.

G összefüggőségét is megadja.

!!! Csak $w\geq 0$ esetén oldható meg a probléma !!!

Tétel: Csak olyan algoritmus van, amely a -ból az *összes* $v\in V$ csúcsba keres legrövidebb utat. □

Dijkstra algoritmusa

(Edsger Wybe Dijkstra, 1959, holland)

Egyszerű de elég gyors és hasznos algoritmus, csak egy a rengeteg közül.

Minden $x \in V$ csúcshoz az alábbi információk:

$\ell(x) :=$ a -ból x -be eddig megtalált legrövidebb út *hossza* ("length"), **vagy** $\ell(x) = +\infty$, $\ell(x) \in \mathbb{R}$,

$S(x) :=$ a fenti út *leírása*, pl. csúcssorozat (v. string),

$T(x) = "i" \iff$ a fenti információk *ideiglenesek* ("temporary"), $T(x) =$ Boolean.

Kezdetben: $\forall x \in V \qquad \ell(x) := +\infty$, $S(x) := ""$, $T(x) := i$,

Kezdőlépés: Legyen $\ell(a) := 0$, $S(a) := "a"$ és $T(a) := i$ (lényeges!).

Ciklus: Legyen $y \in V$ olyan temporary csúcs, amelyre:

$$\ell(y) < +\infty \quad \text{és} \quad \ell(y) \text{ minimális } \; (T(x) = i \text{ között}).$$

HA nincs ilyen y akkor STOP.

HA van y , akkor

i) $S(y)$ -t véglegesítjük: $T(y) := h$, $S(y)$ és $\ell(y)$ változatlan marad, és

ii) $\forall x \in V$, $T(x) := i$ esetén: van-e y -on *keresztül* x -be rövidebb út, mint az eddigi ?

azaz:

$$\textbf{ha} \quad \ell(y) + w(x,y) \lneqq \ell(x) \quad \textbf{akkor} \quad S(x) := S(y)\hat{}\,"x" \;\text{ és }\; \ell(x) := \ell(y) + w(x,y)$$

(^a *konkatenáció*, azaz egymás után fűzés jele), $T(x) = i$ marad.

□

Megjegyzések:

a) azon $x \in V$ csúcsok, amelyekre $\ell(x) = +\infty$, nem érhetőek el a -ból (és ekkor $T(x) = i$), $\ell(x) < +\infty$ esetén $S(x)$ megad *egy* igazi legrövidebb utat (és ekkor $T(x) = h$).

b) Tétel: *Ez így van*, !!! **Bizonyítás KELL!** $\square$

c) Lemma (segédtétel):

Ha P egy legrövidebb út a -ból z -be, akkor a P út bármelyik c csúcsa esetén a P út a -tól c -ig eső része is legrövidebb *út a és c között.* $\square$

d) sebesség: rögzített $a \in V$ esetén $\Theta(n^2)$ lépés ($n = |V|$),

e) G összefüggőségét és komponenseit is megadja,

f) $S(x)$ helyett elég $P(x)$ -et tárolni.

g) változatok: több legrövidebb út, kevésbé rövid utak, ...

Példa: Legrövidebb utat A és Z között (a táblázat ki nem töltött elemei 0 -ák, T üresen hagyott mezői i értékűek).

	A	B	C	D	E	F	G	Z
A		2			8			
B	2		2	6	4	2		
C		2		5		3		2
D		6	5		2		2	5
E	8	4		2		3		
F		2	3		3		2	
G				2		2		4
Z			2	5			4	

	Start			1.			2.			3.			4.		
	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T
A	**0**	**-**		0	-	h	0	-	h	0	-	h	0	-	h
B	∞			**2**	A		2	A	h	2	A	h	2	A	h
C	∞			∞			**4**	B		4	B	h	4	B	h
D	∞			∞			8	B		8	B		8	B	
E	∞			8	A		6	B		6	B		**6**	B	
F	∞			∞			4	B		**4**	B		4	B	h
G	∞			∞			∞			∞			6	F	
Z	∞			∞			∞			6	C		6	C	

	5.			6.			7.			vége		
	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T
A	0	**-**	h	0	-	h	0	-	h	0	-	h
B	2	A	h	2	A	h	2	A	h	2	A	h
C	4	B	h	4	B	h	4	B	h	4	B	h
D	8	B		8	B		**8**	B		8	B	h
E	6	B	h	6	B	h	6	B	h	6	B	h
F	4	B	h	4	B	h	4	B	h	4	B	h
G	**6**	F		6	F	h	6	F	h	6	F	h
Z	6	C		**6**	C		6	C	h	6	C	h

Tehát: a csúcsokba vezető (egyik) legrövidebb utak a következők: A, A**B**, AB**C**, AB**D**, AB**E**, AB**F**, ABF**G** és ABC**Z** .