Matematik B, STX

18. maj 2011

Delprøve 1

Opgave 1:

a) Ligningen løses.

$$5x + 11 = 19x - 17 \Leftrightarrow$$
$$-14x = -28 \Leftrightarrow$$
$$14x = 28 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{28}{14} = 2$$

Opgave 2:

a) Udtrykket reduceres.

$$T^2 - K^2 + (T + K)^2 - 2KT$$
$$= T^2 - K^2 + T^2 + K^2 + 2KT - 2KT$$
$$= 2T^2$$

Opgave 3:

a) Længden $|AB|$ bestemmes vha. Pythagoras.

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

Størrelsesforholdet bestemmes.

$$k = \frac{|GH|}{|BC|} = \frac{18}{6} = 3$$

Så er

$$|FH| = k \cdot |AC| = 3 \cdot 8 = 24$$

Opgave 4:

a) Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9, \qquad d > 0$$

Da $d > 0$ betyder det, at ligningen har to løsninger. Disse kan bestemmes ved anvendelse af nulpunktsformlen.

Opgave 5:

a) To funktioner er givet. Der ses efter fremskrivningsfaktoren i hvert af tilfældene. Pr. definition er en eksponentiel funktion voksende, hvis $a > 1$ og aftagende, hvis $0 < a < 1$. Det følger, at $f(x)$ er aftagende og $g(x)$ er voksende. Der kan sluttes, at A er $f(x)$ og B er $g(x)$.

Opgave 6:

a) Arealet under grafen, afgrænset af $[a; b] = [0; 5]$ giver et areal på 12.5

Arealet af trekanten ABC svarer til at trække $g(x)$ fra $f(x)$, så

$$\begin{aligned} T_{ABC} &= \int_0^5 f(x)\,dx - \int_0^5 g(x)\,dx \\ &= 12.5 - 7.5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Som er det ønskede areal.

Matematik B, STX

18. maj 2011

Delprøve 2

Opgave 7:

a) Vinkel A bestemmes vha. cosinusrelationerne, så

$$\angle A = \arccos\left(\frac{22^2 + 13^2 - 11^2}{2 \cdot 22 \cdot 13}\right) = 21.554^o$$

Den ønskede vinkel blev fundet.

b) Arealet af trekanten ABC bestemmes vha. ½appelsinformlen.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 22 \cdot \sin(21.554) = 52.535$$

Dermed blev arealet bestemt.

c) Sinusrelationerne anvendes.

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(21.554)}{|BD|} = \frac{\sin(120)}{13} \Leftrightarrow \\ &\sin(21.554) \cdot 13 = |BD| \cdot \sin(120) \Leftrightarrow \\ &|BD| = \frac{\sin(21.554) \cdot 13}{\sin(120)} = 5.515 \end{aligned}$$

Længden $|BD|$ blev udregnet.

Opgave 8: Vi betegner y som $f(x)$.

a) I år 1997 svarer til $x = 10$, så

$$f(10) = 273 \cdot 10 + 8245 = 10975$$

I år 1997 var de årlige udgifter 10975 mio. kr.

b) Tallet 8245 fortæller, at i 1987 var udgifterne for ressourcesvage grupper 8245 mio. kr. I de efterfølgende år steg dette med 273 mio. kr. p.a.

Opgave 9:

a) Tabellens data indlæses i WordMat. Bemærk, at $\text{Årstal} = x = 2006 = 0$

0	1	2	3
2180	2955	3698	5530

Eksponentielregression udført vha. CAS-værktøjet WordMat:

$$R^2 = 0.9875447$$
$$f(x) = 2154.737 \cdot 1.35214^x$$

Eksponentielregressionen gav en model, hvor $f(x)$ er årlige antal af tvangsopløste selskaber til tidspunktet x, målt fra år 2006.

b) År 2012 svarer til $x = 6$, så

$$f(6) = 2154.737 \cdot 1.35214^6 = 13168.134 \approx 13168$$

Så i år 2012 var antallet af tvangsopløste selskaber 13168.

c) Fordoblingskonstanten anvendes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.35214)} = 2.297 \approx 2.3$$

Dvs. der går ca. 2.3 år før antallet af tvangsopløste selskaber fordobles ifølge modellen.

Opgave 10:

a) Oplysningerne indskrives i en lang række. Her er nedre kvartil, median og øvre kvartil angivet med farver.

23,25,25,26,26,26,26,27,27,27,27,28,29,29,29,30,30,31,31,31,32,32,32,33,34,34,35,35,36,39

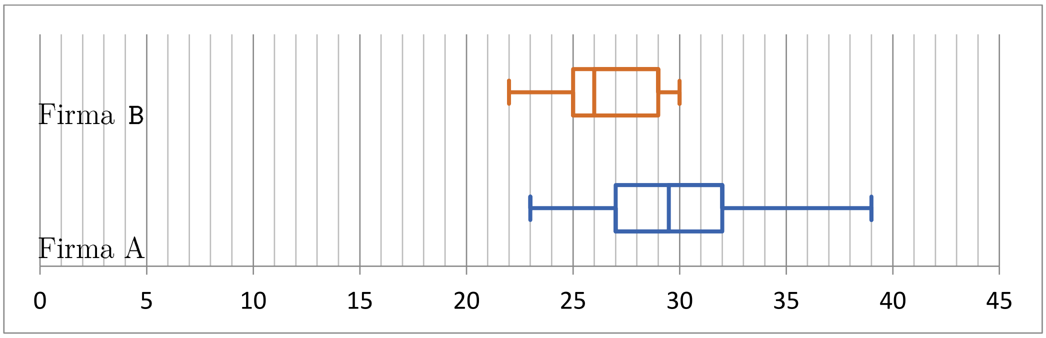
Dermed er

$$\text{Nedre} = 27$$
$$\text{Median} = \frac{29 + 30}{2} = 29.5$$
$$\text{Øvre} = 32$$

Så det udvidede kvartilsæt er $Q_1 = \{23; 27; 29.5; 32; 39\}$

b) Det udvidede kvartilsæt for firma B er $Q_2 = \{22; 25; 26; 29; 30\}$

Et boksplot i Excel laves.



Fortolkning:

Firma B er væsentlig bedre til at angive mængden af rosiner i en pakke ift. firma A, som til gengæld kan sælge pakker med lidt flere rosiner i. Man ser firma A har en median større end firma B, generelt kan der sluttes, at firma A har lidt flere rosiner i en pakke.

Opgave 11:

a) Man kan sagtens løse integralet pr. håndkraft:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x\right)dx=\left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln(x)+\frac{3^x}{\ln(3)}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\ln(2)+\frac{3^2}{\ln(3)}-\left(\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{\ln(3)}\right)$$

$$=14.6015$$

I CAS kan man selvfølgelig også få bestemt integralet.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x\right)dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 14.601$$

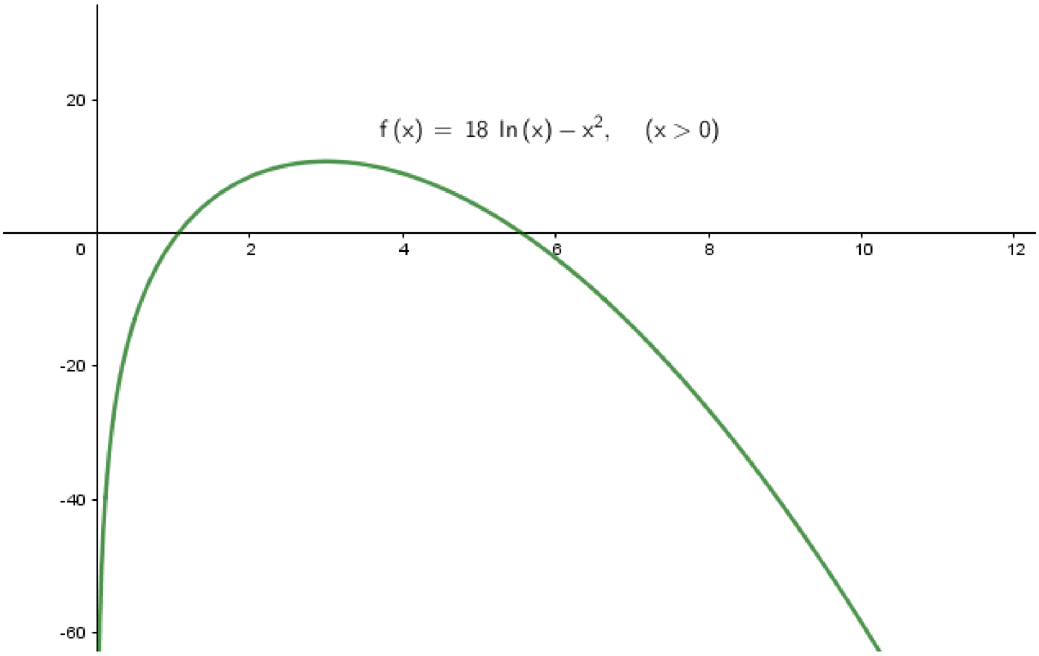
OBS: Maple kan ikke lide 1/2, hvis du bare trykker enter. Skriv 0.5.

$$\int_{0.5}^{2}\left(4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x\right)dx$$

$$14.60153010$$

Opgave 12:

a) Grafen for $f(x)$ skitseres i GeoGebra.



b) Den afledede bestemmes nemt.

$$f'(x) = \frac{18}{x} - 2x, \qquad x > 0$$

Så bestemmes $f(1)$ og $f'(1)$,

$$f(1) = 18\ln(1) - 1^2 = -1$$
$$f'(1) = \frac{18}{1} - 2 \cdot 1 = 16$$

Ligningen for tangenten til grafen i punktet $P(1;-1)$ er

$$\begin{aligned} y &= 16 \cdot (x-1) - 1 \\ &= 16x - 17 \end{aligned}$$

c) Monotoniforholdene bestemmes, så $f'(x) = 0$ løses.

$$\frac{18}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{18}{x} = 2x \Leftrightarrow 18 = 2x^2 \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = 3$$

Da kun den positive værdi tæller! Vælg 1 og 6 og undersøg fortegnsvariation.

$$f'(1) = 16$$
$$f'(6) = \frac{18}{6} - 2 \cdot 6 = -9$$

Så er monotoniskemaet:

x	0		3	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$
	id			

Dermed kan der sluttes, at

$f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty;3]$ og aftagende i intervallet $[3;\infty[$.

Matematik B, STX

24. maj 2011

Delprøve 1

Opgave 1:

a) Her er $f(2) = 3 \cdot 2 - 7 = -1$ og ligningen $f(x) = 17$ løses.

$$3x - 7 = 17 \Leftrightarrow$$
$$3x = 24 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{24}{3} = 8$$

Opgave 2:

a) Tallene a og b bestemmes.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[3-0]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Så er b

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{8}{2^0} = 8$$

Dermed er det ønskede fundet. NB: Man kunne undlade sidste step ved at se på grafen. Overvej hvorfor!

Opgave 3:

a) $|AD|$ har et punkt K, hvor linjestykket $|CK|$ står vinkelret på K, her er $|DK| = |DA| - 6 = 3$, og $|CK| = 4$, dermed kan Pythagoras anvendes til at finde $|CD|$.

$$|CD| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

Som er den ønskede længde.

Opgave 4:

a) Andengradsligningen løses. Det overlades til læseren at løse vha. diskriminanten.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

Så er løsningerne[1]

$$x = 1 \vee x = 2$$

Opgave 5:

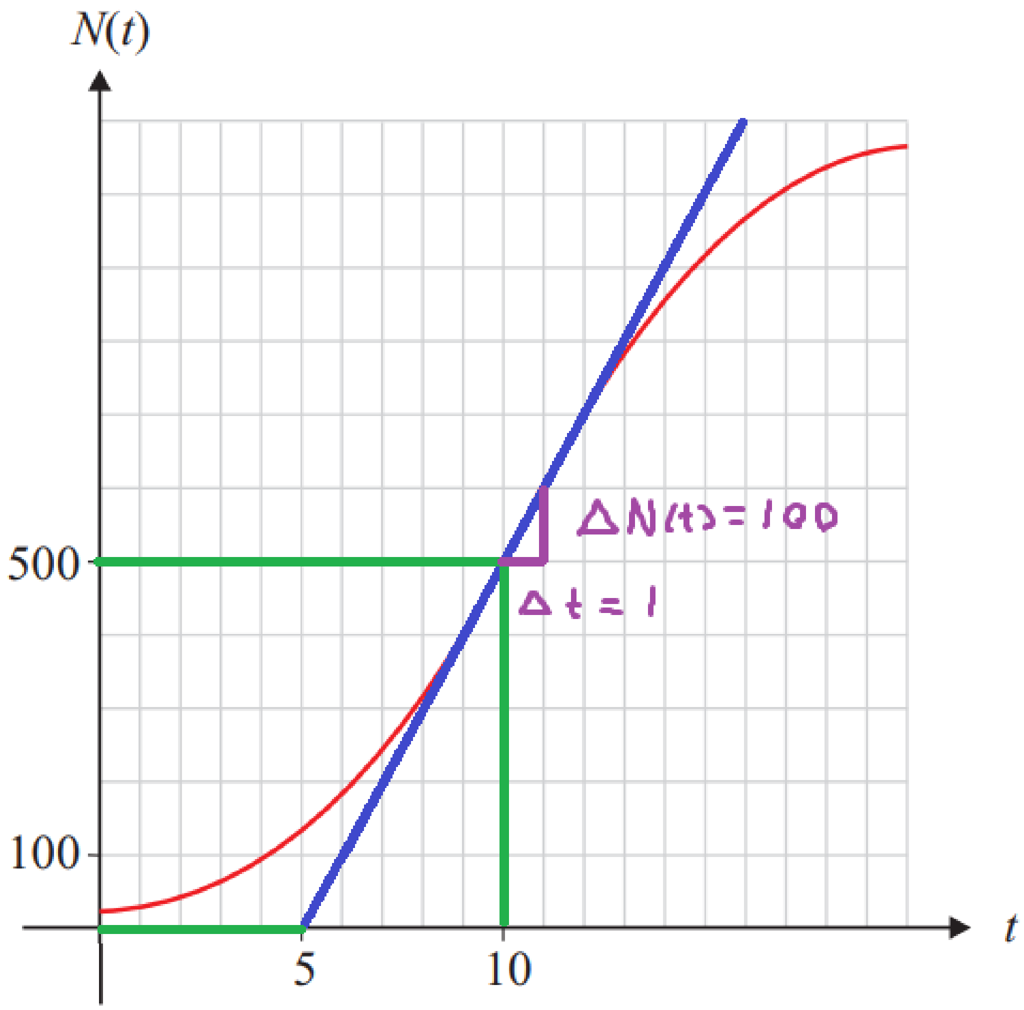
a) Den afledede funktion bestemmes.

$$f'(x) = 3\mathrm{e}^x + 35x^6$$

[1] Hvilke to tal har summen -3 og produktet 2? Svaret er -1 og -2, da $-1 - 2 = -3$ og $-1 \cdot (-2) = 1 \cdot 2 = 2$.

Opgave 6:

a) Grafen er:



Det betyder, at efter 10 døgn vokser antallet af individer med 100 pr. dag.

NB: Skitsen på papir giver formentlig et "bedre" resultat, så måske er det 100, måske 110 eller lign.

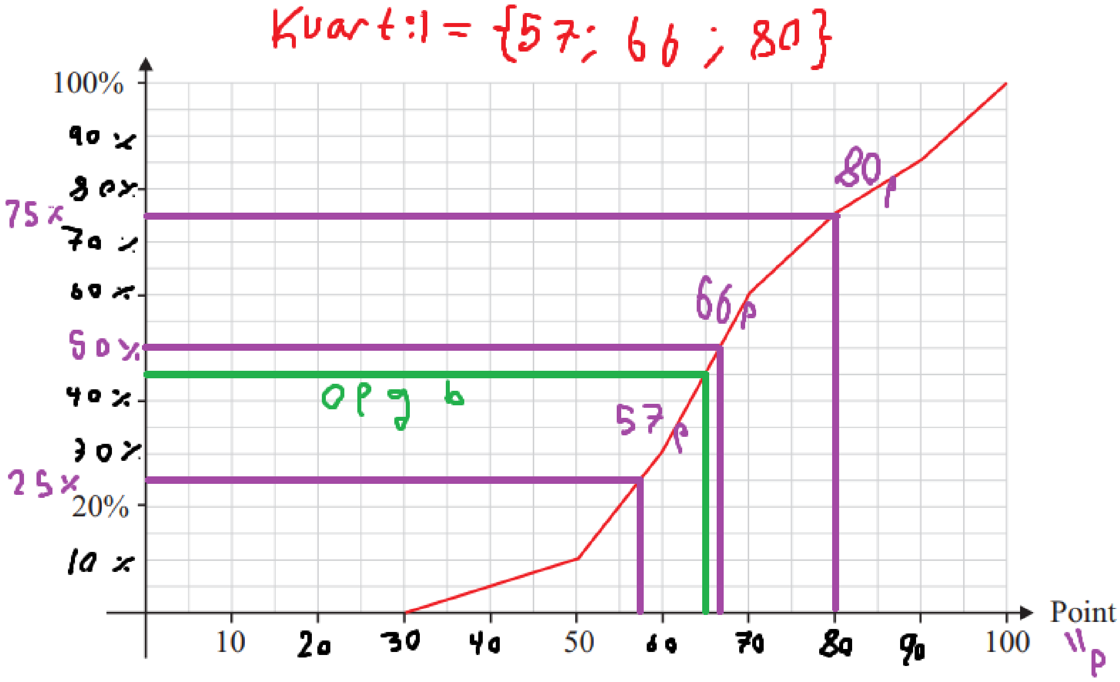
Matematik B, STX

24. maj 2011

Delprøve 2

Opgave 7:

a) Nedenstående figur viser angivningen af kvartilsættet.



b) Over $65p$ aflæses (vha. den grønne linje fra opgave a) til at være 45%. Dvs. 45% eller mindre fik en score på under $65p$, hvilket betyder, at 55% af eleverne fik en score på $65p$ eller mere.

Opgave 8:

a) Tabellens data indlæses i WordMat, og der anvendes efterfølgende potensregression.

75	125	200	250	300	350	400
5186	3848	2487	2229	2093	1989	1923

Potens regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0{,}9722733$

$$f(x) = 74418{,}47 \cdot x^{-0{,}6231993}$$

Dermed er tallene a og b bestemt. Man har:

$$a = -0.6232, \qquad b = 74418.47$$

b) Her løses ligningen $f(x) = 1700$, så

$$74418.47 \cdot x^{-0.6231993} = 1700$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 430.0892$$

Dvs. tykkelsen skal være 430mm hvis den årlige varmetab skal være på 1700kWh/år.

Opgave 9:

a) Der opstilles en lineær model.

$$f(x) = 850x + 16259$$

Hvor $f(x)$ beskriver antallet af elever der tog en studentereksamen til tidspunktet x, målt i år efter 2004.

b) I år 2008 var der

$$f(4) = 850 \cdot 4 + 16259 = 19659$$

Dvs. i år 2008 var der 19659 elever der tog en studentereksamen.

c) Man løser ligningen $f(x) = 25000$, så

$$850x + 16259 = 25000$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 10.28353$$

Ifølge modellen vil det være i løbet af år 2014, at der er 25000 unge der tager en studentereksamen.

Opgave 10:

a) Vinkel C er bestemt ved

$$\angle C = \arccos\left(\frac{|FC|}{|EC|}\right) = \arccos\left(\frac{12}{34}\right) = 69.332^o$$

b) Da trekanterne er ensvinklede, bestemmes forholdet mellem dem begge.

$$k = \frac{|EC|}{|DG|} = \frac{34}{26} = \frac{17}{13} \approx 1.308$$

Så er $|FG| = \frac{12}{k} = \frac{12}{\frac{17}{13}} = \frac{156}{17} = 9.176$

Længden $|EF|$ bestemmes vha. Pythagoras.

$$|EF| = \sqrt{34^2 - 12^2} = 31.812$$

Så er $|EG| = 31.812 - 9.176 = 22.636$

Opgave 11:

a) Ligningen $f(x) = 0$ løses.

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 2$$

Så der eksisterer formentlig 2 stk. dobbeltrødder eller en rod og en tredobbelt rod.

b) Den afledede funktion bestemmes. $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$

Så er

$$f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 11 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 36 = 16$$
$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 22 \cdot 1 - 12 = -24$$

Tangentligningen er

$$\begin{aligned} t &= -24(x-1) + 16 \\ &= -24x + 40 \end{aligned}$$

c) Den afledede funktion sættes lig 0, så

$$4x^3 + 6x^2 - 22x - 12 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -3 \quad \vee \quad x = -0.5 \quad \vee \quad x = 2$$

Den anden afledede bestemmes.

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 22$$

Værdierne ovenfor indsættes.

$$f''(-3) = 12 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) - 22 = 50$$
$$f''(-0.5) = 12 \cdot (-0.5)^2 + 12 \cdot (-0.5) - 22 = -25$$
$$f''(2) = 12 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 22 = 50$$

Når $f''(x) < 0$ er $f(x)$ maksimal i den afledededes nulpunkter, når $f''(x) > 0$ er $f(x)$ minimal i den afledededes nulpunkter. Det betyder, at $f(x)$ er maksimal i $x = -0.5$ og minimal i $x = -3$ og $x = 2$, så

- $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty; -3] \cup [-0.5; 2]$
- $f(x)$ er voksende i intervallet $[-3; -0.5] \cup [2; \infty[$

(OBS: Lav opgaven hvor du anvender din viden fra monotoniforhold, og lav et skema).

Opgave 12:

a) Facadens højde findes ved $f(0)$, så den er 45 meter høj.

Bredden findes ved at løse ligningen $f(x) = 0$, så

$$-\frac{1}{20}x^2 + 45 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{20}x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = \pm 30$$

Så den totale bredde er $|-30| + 30 = 30 + 30 = 60$, så 60 meter bred.

b) Arealet bestemmes vha. integralregning.

$$T = \int_{-30}^{30} \left(-\frac{1}{20}x^2 + 45\right) dx = \left[-\frac{1}{60}x^3 + 45x\right]_{-30}^{30}$$

$$= -\frac{1}{60} \cdot 30^3 + 45 \cdot 30 - \left(-\frac{1}{60} \cdot (-30)^3 + 45 \cdot (-30)\right)$$

$$= 1800$$

Så arealet af facaden er $1800m^2$.