مذكرة قدرات

(الرياضيات)

٢٠١٢/٢٠١١

إعداد وترتيب أ / أبو خالد

مدرس الرياضيات

جوال/٩٩٦٢٥١٩٩

ملحوظة:

- الرفع على الانترنت تم بعد استئذان" الأستاذ أبو خالد" جزاه الله عنا خيرا.
- تم الاعتماد على مذكرة جامعة الكويت المعتمدة.

موضوعات اختبار القدرات الأكاديمية
للقبول وتحديد المستوى في الرياضيات

1. الأعداد الحقيقية
2. الحدوديات
3. المتباينات
4. القيمة المطلقة
5. الدوال الحقيقية
6. تطبيقات رياضية (1)
7. تطبيقات رياضية (2)
8. استراتيجيات الحل والنمذجة

- **انظر تفاصيل موضوعات الاختبار مع بعض الأمثلة في الصفحات التالية**

أ/ أبو خالد

ت/ ٩٩٦٢٥١٩٩

١. الأعداد الحقيقية :

العدد على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أن أ ، ب ∈ ح ، ب ≠ صفر يسمى كسراً.

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ إذا وفقط إذا أ د = جـ ب

خواص الكسور

١) $\frac{أ \times ل}{ب \times ل} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ صفر

٢) $\left(\frac{أ}{ب}\right)\left(\frac{جـ}{د}\right) = \frac{أ جـ}{ب د}$

٣) $\left(\frac{أ}{ب}\right) \div \left(\frac{جـ}{د}\right) = \frac{أ د}{ب جـ}$

٤) $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ د + جـ ب}{ب د}$

٥) $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أ د - جـ ب}{د ب}$

مثال :

$$\frac{\frac{٣}{٤}+\frac{٢}{٥}}{\frac{٢}{٣}-\frac{٣}{٥}} = \frac{\frac{١٥+٨}{٢٠}}{\frac{١٠-٩}{١٥}} = \frac{\frac{٢٣}{٢٠}}{\frac{١}{١٥}} = \frac{٢٣}{٢٠} \times \frac{١٥}{١} = \frac{٢٣ \times ١٥}{٢٠} = \frac{٦٩}{٤}$$

الأسس الصحيحة :

إذا كان س ∈ ح ، ن ∈ ص+ (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة) فإن

$$س^{ن} = \underbrace{س \times \cdots \times س}_{\text{ن عامل}}$$

ويسمى العدد الحقيقي س بالأساس والعدد الصحيح الموجب ن بالأس.

$س^{٠} = ١$ و $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$ ، س ≠ صفر

خواص الأسس

إذا كان س ، ص ∈ ح / {صفر} ، م ، ن ، ر ∈ (الأعداد الصحيحة الموجبة) فإن

١) $س^{ن} \times س^{م} = س^{ن+م}$

٢) $\frac{س^{ن}}{س^{م}} = س^{ن-م}$

٣) $(س^{ن})^{د} = س^{ن د}$

٤) $(س ص)^{ن} = س^{ن} \times ص^{ن}$

٥) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن} = \frac{س^{ن}}{ص^{ن}}$

مثال $(٢س ص^{-٣})^{٢} (-٢س^{٢}ب^{٣})^{٢} = (٢س ص^{-٣} \times (-٢) س^{-١} ص^{٢})^{٢}$

$$= \left(-٤ \frac{س}{ص^{٣}} \times \frac{ص^{٢}}{س}\right)^{٢}$$

$= (-٤)^٢ = ١٦$

تعريف : إذا كان س $\in$ ح ، ن $\in$ ص+ / {١} فإن

$$س^{\frac{١}{ن}} = \begin{cases} ب & \text{إذا وفقط إذا س = } ب^ن \text{، ن عدد فردي} \\ |ب| & \text{إذا وفقط إذا س = } ب^ن \text{، ن عدد زوجي و س} \geq \text{صفر} \end{cases}$$

$$س^{\frac{م}{ن}} = \left(س^{\frac{١}{ن}}\right)^م = \left(س^م\right)^{\frac{١}{ن}}$$

مثال $١٦^{\frac{٣}{٢}} = \left(١٦^{\frac{١}{٢}}\right)^٣ = (٤)^٣ = ٦٤$

$$١٦^{\frac{٣}{٢}} = \left(١٦^٣\right)^{\frac{١}{٢}} = (٤٠٩٦)^{\frac{١}{٢}} = ٦٤$$

تعريف : إذا كان س $\in$ ح ، حيث $س^{\frac{١}{ن}} \in$ ح ، ن $\in$ ص+ فإن $(س)^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

خواص الجذور :

س ، ص $\in$ ح و م ، ن عددان صحيحان موجبان

فإن

١) $\left(\sqrt[ن]{س}\right)^ن = س$ ٢) $\sqrt[ن]{س\,ص} = \sqrt[ن]{س} \cdot \sqrt[ن]{ص}$

٣) $\sqrt[ن]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[ن]{س}}{\sqrt[ن]{ص}}$ ٤) $\sqrt[ن]{س^ن} = \begin{cases} |س| & \text{ن عدد زوجي} \\ س & \text{ن عدد فردي} \end{cases}$

٥) $\sqrt[م]{\sqrt[ن]{س}} = \sqrt[م ن]{س}$

أمثلة ١) بسط $\sqrt{١٢} + \sqrt{٧٥} = \sqrt{٤ \times ٣} + \sqrt{٢٥ \times ٣} = \sqrt{٤}\sqrt{٣} + \sqrt{٢٥}\sqrt{٣} = ٧\sqrt{٣}$

٢) $\sqrt{\frac{١٦٢}{٤٩}} = \frac{\sqrt{١٦٢}}{\sqrt{٤٩}} = \frac{\sqrt{٢ \times ٨١}}{٧} = \frac{٩\sqrt{٢}}{٧}$

٣) ضع في أبسط صورة $\frac{٢}{\sqrt{٣}+\sqrt{٥}}$

$$\frac{٢}{\sqrt{٣}+\sqrt{٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}+\sqrt{٥}} \cdot \frac{\sqrt{٣}-\sqrt{٥}}{\sqrt{٣}-\sqrt{٥}} = ٢\frac{\left(\sqrt{٣}-\sqrt{٥}\right)}{\left(\sqrt{٣}\right)^٢ - \left(\sqrt{٥}\right)^٢} = ٢\frac{\sqrt{٣}-\sqrt{٥}}{٣-٥}$$

$$= \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$$

٢. الحدوديات :

تعريف : الحدودية هي مقدار على الصورة

$ب_ن س^ن + ب_{ن-١} س^{ن-١} + \dots + ب_١ س + ب_٠$ ن عدد صحيح موجب

أ/ أبو خالد
ت/ ٩٩٦٢٥١٩٩

أمثلة : ١) $\sqrt{س}$ ليست حدودية حيث أن $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ والعدد $\frac{١}{٢}$ ليس صحيحا موجبا.

٢) $\frac{٣}{٢}س - ٥$ حدودية من الدرجة الأولى

قوانين التحليل :

$س^{٢} - ب^{٢} = (س - ب)(س + ب)$ فرق بين مربعين

$س^{٣} - ب^{٣} = (س - ب)(س^{٢} + ب س + ب^{٢})$ فرق بين مكعبين

$س^{٣} + ب^{٣} = (س + ب)(س^{٢} - ب س + ب^{٢})$ مجموع مكعبين

$(س \pm ب)^{٢} = س^{٢} \pm ٢ب س + ب^{٢}$

$(س \pm ب)^{٣} = س^{٣} \pm ٣ب س^{٢} + ٣ب^{٢}س \pm ب^{٣}$

المقادير النسبية :

تعريف : المقدار النسبي هو مقدار على الصورة $\frac{د(س)}{ص(س)}$ حيث كل من د(س) ، ص(س) حدودية

أمثلة $\frac{س}{س + ١}$ ، $\frac{س^{٢} - ٣}{س^{٣} + س + ١}$ ، $\frac{س^{٦}}{س^{٢} + ١}$

لتبسط المقدار النسبي نحلل البسط والمقام ومن ثم نقسم أو نختصر العوامل المتشابهة.

أمثلة :

١) $\frac{س^{٢} - ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢٥} = \frac{(س + ٥)(س + ٢)}{(س + ٥)(س - ٥)} = \frac{س + ٢}{س - ٥}$

٢) $\frac{س^{٢} - ٥س + ٤}{٢س + ٦} \div \frac{٢س^{٢} - س - ١}{س^{٢} + ٥س + ٦} = \frac{(س - ٤)(س - ١)}{٢(س + ٣)} \div \frac{(٢س + ١)(س - ١)}{(س + ٣)(س + ٢)}$

$\frac{(س - ٤)(س - ١)}{٢(س + ٣)} \times \frac{(س + ٣)(س + ٢)}{(٢س + ١)(س - ١)} = \frac{(س - ٤)(س + ٢)}{٢(٢س + ١)}$

حل المعادلات

أ) معادلات خطية أس + ب = صفر ، أ $\neq$ صفر

أمثلة :

١) ٥س + ٣ = صفر $\Leftarrow$ س = $\frac{-٣}{٥}$

٢) $\frac{س}{٣} + \frac{٣س}{٤} = ٢$ نضرب الطرفين × ١٢

٤س + ٩س = ٢٤

١٣س = ٢٤ ⇐ س = $\frac{٢٤}{١٣}$

٣) $\frac{١}{س - ٢} = \frac{٣}{س + ٢} - \frac{٦س}{س^{٢} - ٤}$ نضرب الطرفين بـ س^{٢} − ٤

س + ٢ = ٣(س−٢) − ٦س ، س ≠ ±٢

٤س = −٨ ⇐ س = −٢

بما أن س ≠ −٢ بالمعادلة الأصلية فإن المعادلة ليست لها حل.

ii) معادلات من الدرجة الثانية

أس٢ + ب س + جـ = صفر ، أ ≠ صفر

طرق لحل معادلات من الدرجة الثانية ١) التحليل ٢) إكمال المربع ٣) قانون المميز

ملاحظة : إذا كان أ.ب = صفر فإن أ = صفر أو ب = صفر

مثال : حل المعادلة باستخدام طريقة إكمال المربع

س٢ + ٢س = ٤

س٢ + ٢س + ١ = ٤ + ١ (إضافة مربع نصف معامل س للطرفين)

(س + ١)^{٢} = ٥

س + ١ = $\pm\sqrt{٥}$

س = −١ $\pm\sqrt{٥}$

قانون المميز : إذا كان أس٢ + ب س + جـ = صفر فإن س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

٣. المتباينات :

خواص المتباينات :

١) إذا كان س < ص و ص < ع فإن س < ع

٢) إذا كان س < ص فإن س + ع < ص + ع

٣) إذا كان س < ص فإن س − ع < ص − ع

٤) إذا كان س < ص و ع > صفر فإن س ع < ص ع

٥) إذا كان س < ص و ع < صفر فإن س ع > ص ع

٦) إذا كان س < ص و س ص > صفر فإن $\frac{١}{س} > \frac{١}{ص}$

٧) إذا كان صفر < س < ص و ن عدد صحيح موجب فإن س^{ن} < ص^{ن}

٨) إذا كان صفر < س < ص و ن عدد صحيح موجب فإن $\sqrt[ن]{س} < \sqrt[ن]{ص}$

٩) إذا كان س < ص و ع < د فإن س + ع < ص + د

العلاقات الأخرى ≥ ، > ، ≤ تحقق خواص مشابهة للخواص أعلاه.

متباينات خطية :

مثال : حل المتباينة   ٣س − ١١ < س + ٥

٣س − س < ٥ + ١١

٢س < ١٦

س < ٨

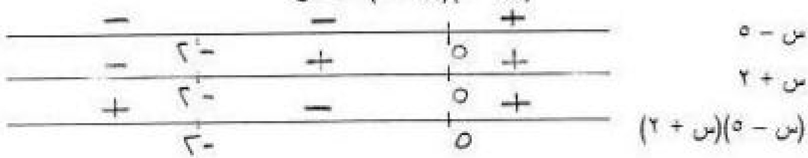
مجموعة الحل =] − ∞ ، ٨ [

متباينات من الدرجة الثانية :

مثال : حل المتباينة   س٢ > ٣س + ١٠

س٢ − ٣س − ١٠ > صفر

(س − ٥)(س + ٢) > صفر

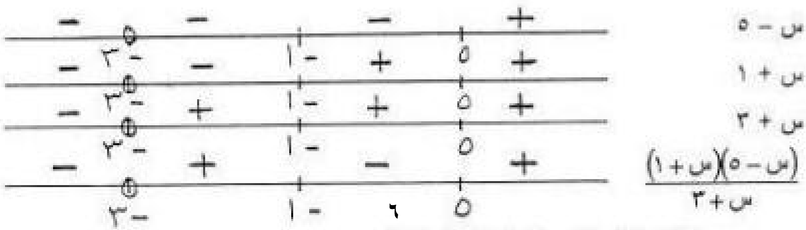


مجموعة الحل =] − ∞ ، −٢ [∪] ٥ ، ∞ [

متباينات نسبية :

حل المتباينة $\frac{\text{س}^2 - ٤\text{س} - ٥}{\text{س} + ٣}$ > صفر

$\frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١)}{\text{س} + ٣}$ > صفر



مجموعة الحل] −٣ ، −١ [∪] ٥ ، ∞ [

أ/ أبو خالد

ت/ ٩٩٦٢٥١٩٩

٤. القيمة المطلقة

تعريف : $|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س \geq \text{صفر} \\ -س & \text{إذا كان } س < \text{صفر} \end{cases}$

$س^{٢} = |س|$

خواص القيمة المطلقة : س ، ص عددان حقيقيان

١) $|س| \geq$ صفر ٢) $|-س| = |س|$ ٣) $|س\,ص| = |س|\,|ص|$

٤) $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$ ٥) $|س| = ص$ إذا وفقط إذا $س = ص$ أو $س = -ص$

٦) $|س| < ص$ إذا وفقط إذا $-ص < س < ص$ ($ص >$ صفر)

٧) $|س| > ص$ إذا وفقط إذا $س > ص$ أو $س < -ص$

٨) $|س| \geq س \geq -|س|$

معادلات تشمل القيمة المطلقة :

أمثلة ١) حل المعادلة $|س - ٣| = ٤$

$س - ٣ = ٤$ أو $س - ٣ = -٤$ (خاصية ٥)

$س = ٧$ أو $س = -١$

متباينات تشمل القيمة المطلقة :

مثال ١) حل المتباينة $\frac{١}{|٢س - ٣|} > ٥$ ، $س \neq \frac{٣}{٢}$

$|٢س - ٣| < \frac{١}{٥}$ (خاصية ٦ من المتباينات)

$-\frac{١}{٥} < ٢س - ٣ < \frac{١}{٥}$ (خاصية ٦ من خواص المطلق)

$\frac{٧}{٥} < س < \frac{٨}{٥}$

مجموعة الحل $\left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٣}{٢}\right) \cup \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{٨}{٥}\right)$

٥. الدوال الحقيقية

لتكن س ، ص مجموعتان غير خاليتين – الدالة د : س ← ص هي قانون تعيّن بموجبه لكل عنصر في س عنصر وحيد في ص. وتسمى المجموعة س مجال الدالة.

عمليات على الدوال :

لتكن كل من د و ق دالة مجالهما $م_{د}$ و $م_{ق}$ على التوالي.

إذاً $م_{د+ق} = م_{د-ق} = م_{د ق} = م_{د} \cap م_{ق}$

و $\;م_{\frac{د}{ق}} = \{\text{س}: \text{س} \in م_د \cap م_ق \text{ و } ق(\text{س}) \neq \text{صفر}\}$

تركيب دالتين

لتكن د و ق دالتان، تركيب د و ق هو الدالة د∘ق حيث $(د \circ ق)(\text{س}) = د(ق(\text{س}))$

مثال:

لتكن $د(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ و $ق(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}-١}$ ، أوجد د∘ق

الحل

$$(د \circ ق)(\text{س}) = د(ق(\text{س})) = د\left(\frac{٢}{\text{س}-١}\right) = \frac{\frac{٢}{\text{س}-١}}{\frac{٢}{\text{س}-١}+١}$$

$$= \frac{\left(\frac{٢}{\text{س}-١}\right)(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)\left(١+\frac{٢}{\text{س}-١}\right)} = \frac{٢}{(\text{س}-١)+٢} = \frac{٢}{\text{س}+١}$$

$$م_{د \circ ق} = \{\text{س}: \text{س} \neq \pm ١\}$$

٦. تطبيقات حياتية (١)

مساحات ، حجوم ومكاييل ، أوزان ، تحويل وحدات

١) مساحات :

قواعد المساحة :

أ) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ (القاعدة × الارتفاع)

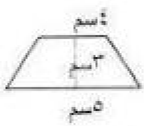
ب) مساحة المستطيل = الطول × العرض

ج) مساحة الدائرة = π نق^{٢}

باستخدام القواعد الثلاثة أعلاه بالإمكان معرفة مساحات لمناطق أكثر تعقيداً كما في الأمثلة التالية:

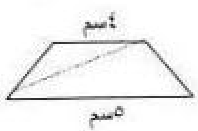
مثال (١) :

أوجد مساحة شبه المنحرف المبين في الشكل



الحل :

نقسم الشكل إلى مثلثين لهما نفس الارتفاع



الارتفاع ٣ سم ، قاعدة الأول ٤ سم ، وقاعدة الثاني ٥ سم . فتكون :

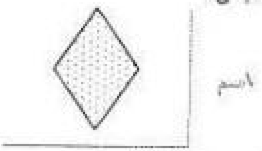
مساحة الأول = $\frac{٣ \times ٤}{٢}$ = ٦ سم^{٢}

مساحة الثاني = $\frac{٣ \times ٥}{٢}$ = ٧,٥ سم^{٢}

مساحة الشكل = ٧,٥ + ٦ = ١٣,٥ سم^{٢}

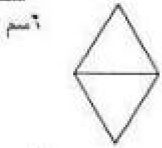
ملاحظة : إذا استخدم الطالب قاعدة المساحة لشبه المنحرف فلا بأس.

مثال (٢) :



أرجد مساحة المعين المبين في الشكل.

الحل :

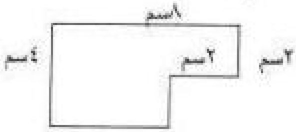


نقسم الشكل إلى مثلثين متطابقين

قاعدة كل منهما ٦ سم وارتفاعه ٤ سم

المساحة = ٢ × $\left(\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤\right)$ = ٢٤ سم^{٢}

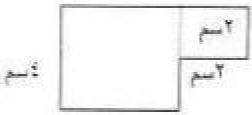
ملاحظة : بالامكان استخدام قاعدة مساحة المعين.



مثال (٣) :

أوجد مساحة المنطقة المبينة بالشكل.

الحل:

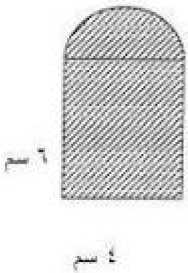


نقسم المنطقة إلى مستطيل ومربع

فتكون المساحة = (٢ × ٢) + (٦ × ٤)

= ٤ + ٢٤

= ٢٨ سم^{٢}



مثال (٤) :

أوجد مساحة المنطقة المبينة بالشكل.

الحل :

نقسم المنطقة إلى مستطيل ونصف دائرة

فتكون المساحة = (٤ × ٦) + $\left(\frac{١}{٢} \times \pi \times (٢)^{٢}\right)$

= (٢٤ + ٢π) سم^{٢}

٢) <u>حجوم ومكاييل :</u>

قواعد الحجم :

أ) حجم الموشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع.

وقد تكون القاعدة أي من الأشكال الواردة في باب المساحات أعلاه

ب) حجم الاسطوانة القائمة = π نق^{٢} × الارتفاع

ج) حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × الارتفاع

هنا لا يُطلب من التلميذ إيجاد حجوم ، ولكن يأتي حساب الحجوم ضمن مسائل حياتية.

مثال (١) :

طريق طولة ٣ كم وعرضه ١٤ متراً ، نريد فرشه بالأسفلت بسماكة ٣٠ سم ، كم شاحنة من الأسفلت نحتاج إذا كانت سعة الشاحنة ١٢ م^{٣} ؟

الحل :

حجم الأسفلت = الطول × العرض × الارتفاع

= ٣٠٠٠ × ١٤ × ٠,٣٠ = ١٢٦٠٠ م^{٣}

عدد الشاحنات = ١٢٦٠٠ ÷ ١٢ = ١٠٥٠

مثال (٢) :

لدينا ١٢٨ لتر من العصير نريد تعبئتها بزجاجات سعة كل منها ربع لتر. ما هو عدد الزجاجات المطلوبة ؟

الحل :

عدد الزجاجات المطلوة = ١٢٨ ÷ $\frac{١}{٤}$ = ١٢٨ × ٤ = ٥١٢ زجاجة.

مثال (٣) :

مصنع لتعقيم وتوزيع الحليب ، يعقم الحليب في براميل اسطوانية قطر قاعدة كل برميل متراً واحداً وارتفاعه متران. يوزع الحليب بعد التعقيم في علب سعة كل علبة ٣١٤ سم^{٣}. كم علبة حليب يعطي البرميل الواحد ؟ (استعمل π = ٣,١٤)

الحل :

حجم البرميل = π نق^{٢} × الارتفاع

= ٣,١٤ × (٥٠)^{٢} × ٢٠٠ = ١٥٧٠٠٠٠ سم^{٣}

عدد العلب = ١٥٧٠٠٠٠ ÷ ٣١٤ = ٥٠٠٠ علبة

٣) أوزان :

تعطى الأوزان ضمن مسائل حياتية

مثال (١) :

وزن سليم وسعيد معاً ١٢٠ كلغ. فما وزن كل منهما إذا كان سليم أثقل من سعيد بـــ ٢٤ كلغ؟

الحل :

وزن الاثنين بدون الزيادة = ١٢٠ – ٢٤ = ٩٦ كلغ

وزن سعد = ٩٦ ÷ ٢ = ٤٨ كلغ

وزن سليم = ٤٨ + ٢٤ = ٧٢ كلغ

مثال (٢) :

وزن قطة وكلب وحمل معاً ٢٨ كلغ . فما وزن كل منهم إذا كان وزن القطة نصف وزن الكلب ووزن الكلب نصف وزن الحمل ؟

الحل :

وزن الكلب ضعف وزن القطة ووزن الحمل أربعة أضعاف وزن القطة.

٢٨ كلغ هو ٧ أضعاف وزن القطة

وزن القطة = ٢٨ ÷ ٧ = ٤ كلغ

وزن الكلب = ٤ × ٢ = ٨ كلغ

وزن الحمل = ٤ × ٤ = ١٦ كلغ

٤) تحويل وحدات :

أ) يجب أن يكون التحويل ضمن النظام المتري. وإذا كان هناك تحويل بين أكثر من نظام (من الامبراطوري إلى المتري مثلاً) فتعطى المعلومات الضرورية لذلك.

ب) يكون التحويل مباشراً كما في الأمثلة التالية أو ضمن مسائل حياتية كما في المــثالين (١) و (٣) في بند الحجوم والمكاييل أعلاه.

مثال (١) :

إذا كان الرطل يساوي ٤٥٤ غرام

فإن :

أ) ٣٥٠ كلغ = ... رطلاً

ب) ١٠٥ غرام = ... رطلاً

ج) ١٣ رطل = ... كلغ

الحل :

أ) ٣٥٠ ÷ ٠,٤٥٤ = ٧٧٠,٩ رطلاً

ب) ١٠٥ ÷ ٤٥٤ = ٠,٢٣ رطلاً

ج) ١٣ ÷ ٠,٤٥٤ = ٥,٩ كلغ

مثال (٢) :

سيارة سرعتها ٦٠ كم / ساعة . فكم متراً تكون سرعتها في الدقيقة ؟

الحل :

$\frac{١٠٠٠ \times ٦٠}{٦٠}$ = ١٠٠٠ متر / دقيقة

مثال (٣) :

إملأ الفراغ فيما يلي :

(أ) ٣ م^٣ = ... سم^٣

(ب) ٢٠٠ لتر = ... م^٣ علماً بأن ١ لتر = ١٠٠٠ سم^٣

(ج) ٧ م^٢ = ... سم^٢

(د) ١٥٠٠٠٠سم^٢ = ...م^٢

الحل:

(أ) ٣ × ١٠^٦ = ٣٠٠٠٠٠٠ سم^٣

(ب) ٢٠٠ × ١٠٠٠ = ٢٠٠٠٠٠ م^٣

٢٠٠٠٠٠ ÷ ١٠^٦ = ٠,٢ م^٣

(ج) ٧ م^٢ = ٧ × ١٠^٤ = ٧٠٠٠٠ سم^٢

(د) ١٥٠٠٠٠سم^٢ ÷ ١٠^٤ = ١٥ م^٢

٧. تطبيقات حياتية (٢)

نسبة وتناسب ، نسب مئوية ، فوائد بنكية

<u>١- نسبة وتناسب :</u>

أ) النسبة هي مقارنة بين كميتين أو أكثر. مثلا : نسبة دخلي الشهري إلى دخل أخي هي ٣ : ٢ . وهي تعني أنه كلما دخل إلى جيب أخي ديناران يدخل إلى جيبي ثلاثة دنانير. وإذا دخل إلى جيب أخي ٢٠٠ دينار يدخل إلى جيبي ٣٠٠ دينار ، وهكذا.

قاعدة : يمكن ضرب كل أطراف النسبة بنفس العدد.

مثلا : النسبة ٣ : ٢ تساوي النسبة ٣٠٠ : ٢٠٠ .

وبذلك يمكن معاملة النسبة ٣ : ٢ كأنها الكسر $\frac{٣}{٢}$.

مثال (١) :

إذا كانت نسبة الفوز إلى الخسارة ١٥ : ١٦ وكان عدد مرات الخسارة ٦٤. فما هو عدد مرات الفوز ؟

الحل :

$\frac{ف}{خ} = \frac{١٥}{١٦}$

$\frac{ف}{٦٤} = \frac{١٥}{١٦}$ بالضرب التصالبي نحصل على

١٦ ف = ٦٤ × ١٥

ف = ٦٠

يكون عدد مرات الفوز = ٦٠ مرة

مثال (٢) :

إذا كانت نسبة الفوز إلى الخسارة ١٥ : ١٦ وكان عدد مرات الخسارة ٦٤ فكم مباراة لعب الفريق ؟

الحل :

كما في المثال (١) عدد مرات الفوز ٦٠

عدد المباريات التي لعبها الفريق = ٦٠ + ٦٤ = ١٢٤

مثال (٣) :

الأجر اليومي الإجمالي لثلاثة عمال هو ٧٢ ديناراً موزعة بينهم بنسبة ٣ : ٤ : ٥. فما هو الأجر اليومي لكل منهم ؟

الحل :

عدد الحصص هو = ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ حصة

الحصة الواحدة من الأجر = ٧٢ ÷ ١٢ = ٦ دينار

أجر الأول = ٦ × ٣ = ١٨ دينار

أجر الثاني = ٦ × ٤ = ٢٤ دينار

أجر الثالث = ٦ × ٥ = ٣٠ دينار

ب) إذا كان هناك كميتان متغيرتان بحيث تبقى النسبة بينهما ثابتة نقول أن الكميتين متناسبتين أو أن بينهما تناسباً ويقال أيضا أن بينهما تناسباً طردياً.

فمثلا إذا اشترينا عدداً من الأقلام المتشابهة ، فهناك تناسب بين ثمن هذه الأقلام من جهة وعددها من جهة أخرى لأن $\frac{\text{ثمن الأقلام}}{\text{عدد الأقلام}}$ = ثابت هو ثمن القلم الواحد.

مثال (١) :

إذا كان ثمن ١١ قلم ٣٣ دينار. فما هو ثمن ١٥ قلم ؟

ثمن ١٥ قلم = $\frac{١٥\times٣٣}{١١}$ = ٤٥ دينار

مثال (٢) :

إذا كان وزن ١٦ سم^{٣} من معدن ما يساوي ٢٤ غرام ، فما هـو وزن ٢٠ سم^{٣} من نفس المعدن ؟

الحل :

وزن ٢٠ سم^{٣} = $\frac{٢٠\times٢٤}{١٦}$ = ٣٠ غرام

ج) إذا كان هناك تناسب بين كمية ما وعكس أو مقلوب كمية أخرى نقول أن بين الكميتين تناسبا عكسيا. فمثلا هناك تناسب عكسي بين عدد العمال المكلفين بإنجاز عمل معين والفترة الزمنية اللازمة لإنجاز ذلك العمل. أي أنه كلما زاد عدد العمال كلما قل الوقت اللازم لإنجاز العمل.

مثال (١) :

يحتاج أربعة عمال إلى عشرة أيام لطلاء جدران منزل ما. فكم يوم يحتاج خمسة عمال لطلاء المنزل ؟

الحل :

لإنجاز العمل يحتاج العامل الواحد إلى ٤ × ١٠ = ٤٠ يوماً

لإنجاز العمل يحتاج خمسة عمال إلى ٤٠ ÷ ٥ = ٨ أيام

مثال (٢) :

تحتاج ١١ حنفية ماء مفتوحة معاً إلى ٣ ساعات لملئ خزان ما. فكم من الزمن نحتاج لملئ الخزان إذا فتحنا ٦ حنفيات فقط ؟

الحل :

الحنفية الواحدة تحتاج إلى ١١ × ٣ = ٣٣ ساعة

الزمن الذي يحتاجه ٦ حنفيات = ٣٣ ÷ ٦ = ٥ ساعات ونصف الساعة

<u>٢- نسب مئوية :</u>

- المقصود من الرمز ١٣% هو ١٣ من مئة ، وإذا استخدمناها ككسر تكون $\frac{١٣}{١٠٠}$ ، أما كعدد عشري فهي ٠,١٣.
- إذا أردنا استخراج ١٣% من ٥٠٠ دينار مثلاً نضرب ٥٠٠ × $\frac{١٣}{١٠٠}$ = ٦٥ ديناراً.

مثال (١) :

فصل دراسي فيه ٢٥ تلميذ ، إذا كان ٧٢% من التلاميذ أقوياء باللغة العربية. ما هو عدد الطلبة الضعفاء في هذه اللغة.

الحل :

عدد الطلبة الأقوياء بالعربية = $\frac{٧٢ \times ٢٥}{١٠٠}$ = ١٨ تلميذ

عدد الضعفاء = ٢٥ – ١٨ = ٧ تلاميذ

مثال (٢) :

وزن إبراهيم اليوم هو ٨% أكثر مما كان عليه السنة الماضية. إذا كان وزنه السنة الماضية ٥٥ كلغ ، فما وزنه اليوم ؟

الحل :

مقدار الزيادة في الوزن = ٥٥ × $\frac{٨}{١٠٠}$ = ٤,٤ كلغ

وزنه اليوم = ٥٥ + ٤,٤ = ٥٩,٤ كلغ

مثال (٣) :

عندما يتجمد الماء يزداد حجمه ٤% . ما هو حجم الماء الذي نحتاجه لصنع ٧٢٨ سم^3 من الثلج ؟

الحل :

حجم الثلج = ١٠٤% من حجم الماء

حجم الماء المطلوب = $\frac{١٠٠ \times ٧٢٨}{١٠٤}$ = ٧٠٠ سم^3

٣- <u>فوائد بنكية :</u>

إذا وضع أحدهم مبلغاً من المال في أحد البنوك نسمي هذا المبلغ رأس المال.

إذا أعطى البنك نسبة مئوية كفائدة على المبلغ نسمي هذه النسبة سعر الفائدة.

المبلغ الإجمالي الذي يجنيه المودع لقاء إيداع رأسماله لفترة زمنية معينة يسمى الفائدة.

قاعدة : العائد = رأس المال × سعر الفائدة × الزمن بالسنوات

مثال (١) :

أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ د.ك لمدة ٣ سنوات بفائدة سنوية مقدارها ١٢% . ما هو المبلغ الإجمالي الذي سيقبضه الرجل في نهاية المدة ؟

الحل :

العائد = $٥٠٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times ٣ = ١٨٠٠$ د.ك

المبلغ الذي سيقبضه الرجل = ٥٠٠٠ + ١٨٠٠ = ٦٨٠٠ د.ك

مثال (٢) :

أودع رجـــل مبـــلغ ٢٨٠٠ د.ك لمـــدة سنة فكان عائد المبلغ ٢٣٨ د.ك . فما كان سعر الفائدة ؟

الحل :

سعر الفائدة = $\frac{٢٣٨ \times ١٠٠}{٢٨٠٠} =$ ٨,٥%

مثال (٣) :

اســـتدان تاجـــر مبـــلغاً من المال بفائدة سنوية مقدارها ١٥% ، وذلك لمدة سنة. ما هو المبلغ الذي استدانه التاجر إذا كان عليه أن يعيد إلى البنك مبلغاً إجمالياً وقدره ٢٨٧٥٠ د.ك ؟

الحل :

المبلغ الإجمالي الذي سيعيده التاجر = ١١٥% من المبلغ الذي استدانه

المبلغ الذي استدانه = $\frac{٢٨٧٥٠ \times ١٠٠}{١١٥} =$ ٢٥٠٠٠ د.ك

8. استراتيجيات الحل والنمذجة:

تعطى هنا تمارين متنوعة لا يحتاج حلها إلى أية رياضيات متقدمة أو متخصصة. هذه التمارين يحتاج حلها إلى أكثر من خطوة ولا تستخدم سوى عمليات حسابية بسيطة وتفكير سليم.

مثال (١) :

أوجد قطر الدائرة بدلالة مساحتها.

الحل :

مساحة الدائرة = π نق^{2}

نق^{2} = $\frac{\text{المساحة}}{\pi}$

نق = $\sqrt{\frac{\text{المساحة}}{\pi}}$

قطر الدائرة = ٢ $\sqrt{\frac{\text{المساحة}}{\pi}}$

مثال (٢) :

عمر سليم س سنوات . فما عمر أخيه المولود قبله بـ ق سنوات ؟

الحل :

عمر أخيه = س + ق

مثال (٣) :

مستطيل طوله ط يزيد عن عرضه بـ ٧ سم. أوجد محيط المستطيل ومساحته.

الحل :

عرض المستطيل = ط – ٧

محيطه = ٢(ط + ط – ٧) = ٤ط – ١٤

مساحته = ط (ط – ٧)

مثال (٤) :

خزان مياه فارغ تستطيع حنفية في أعلاه أن تملأه خلال ساعتين وأخرى في أسفله تحتاج إلى إفراغه لثلاث ساعات. فكم من الوقت يستغرق ملء الخزان إذا فتحنا الحنفيتين معاً؟

الحل :

خلال ساعة واحدة : الأولى تملأ نصف الخزان والثانية تفرغ ثلثه.

صافي الباقي في الخزان خلال ساعة واحدة = $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$ الخزان

إذا امتلأ $\frac{١}{٦}$ الخزان في ساعة واحدة ، نحتاج إلى ٦ ساعات لملئ الخزان بأكمله.

مثال (٥) :

اشترى تاجر ٣٦٠ كلغ من البطاطا بسعر ١٢٠ فلس للكيلو الواحد ، لكنه وجد أن ٢٠ % منها تالف لا يستطيع بيعه. فبكم يبيع هذا التاجر كيلو البطاطا إذا كان يريد ربحاً مقداره ١٥% ؟

الحل :

ثمن الشراء = ٣٦٠ × ١٢٠ = ٤٣٢٠٠ فلساً

الربح المتبقي = ٤٣٢٠٠٠ × $\frac{١٥}{١٠٠}$ = ٦٤٨٠ فلساً

ثمن البيع = ٤٣٢٠٠ + ٦٤٨٠ = ٤٩٦٨٠ فلساً

التالف من البطاطا = $\frac{٢٠ \times ٣٦٠}{١٠٠}$ = ٧٢ كلغ

الصالح من البطاطا = ٣٦٠ – ٧٢ = ٢٨٨ كلغ

ثمن مبيع كلغ البطاطا = ٤٩٦٨٠ ÷ ٢٨٨ = ١٧٢,٥ فلساً

مثال (6)

محيط مربع يساوى ضعف محيط المثلث متطابق الاضلاع . اذا كان طول احد أضلاع المربع 75 سم ، فما هو طول احد أضلاع المثلث ؟

الحل:

محيط المربع = 4×75 = 300 سم

ولكن محيط المربع = $2 \times$ محيط المثلث

او محيط المثلث = $\frac{1}{2} \times$ محيط المربع

= $\frac{1}{2} \times 300 = 150$ سم

طول ضلع المثلث = $150 \div 3 = 50$ سم