التكامل

محمد
2016

الفصل الرابع / السادس العلمي

يمكنكم متابعة المزيد من الدروس من خلال زيارتنا :

الموقع www.droos.org

الفيس بوك FB : Droos / دروس

اليوتيوب Youtube : droos / دروس

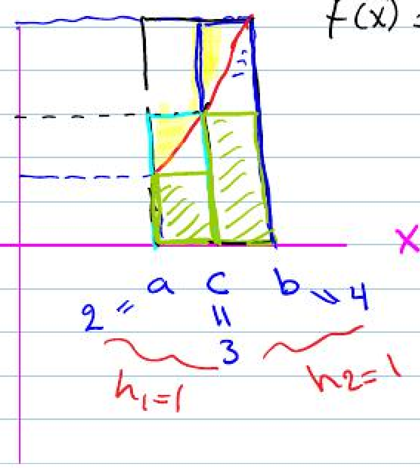
مع " دروس " خلينا نتعلم سوى

المناطق المحددة بمنحنيات

① خلال تجزئة واحدة

$M = f(b) = 64$

$f(x) = x^3$



$[2,4]$

$f(c) = 27$

$\sigma = (2,4)$

$m = f(a) = 8$

$A_1 = m * h = 8 * 2 = 16$
$A_2 = M * h = 64 * 2 = 128$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{16 + 128}{2} = \boxed{72}$$

② خلال تجزئتين :

$[2,4]$

$\sigma = (2,3,4)$

$\sigma = (2,3)$ خلال تجزئة

$A_1 = 8 * 1 = 8$
$A_2 = 27 * 1 = 27$

$\sigma = (3,4)$ التجزئة

$A_1 = 27 * 1 = 27$
$A_2 = 64 * 1 = 64$

$$A = \frac{8 + 27}{2} + \frac{27 + 64}{2} = 17.5 + 45.5$$
$$= \boxed{64}$$

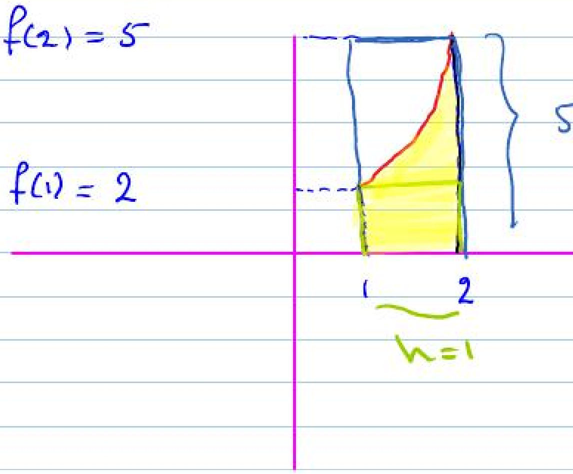
مثال // $A = \{(x,y) : 1 \leqslant x \leqslant 2 \, , \; y = x^2 + 1\}$ ، أوجد قيمة تقريبية

لمساحة المنطقة A .

الحل //

$M = f(2) = 5$

$m = f(1) = 2$



$A_1 = m * h$
$= 2 * 1 = 2$

$A_2 = M * h =$
$= 5 * 1 = 5$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{5+2}{2}$$
$$= \boxed{3\tfrac{1}{2}}$$

مثال،، أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الآتية:

$$A = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 5 , y = x^2 + 1\}$$

وذلك باستخدام التجزئة.

الحل،،

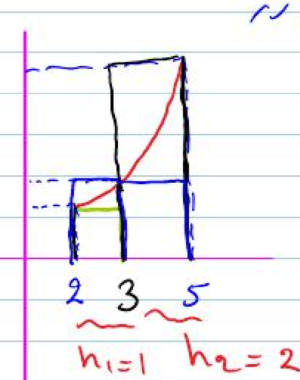
ⓐ $G_1 = (2, 3, 5)$

$[2,3]$ & $[3,5]$

$M = f(5) = 26$

$M \& m = f(3) = 10$

$m = f(2) = 5$

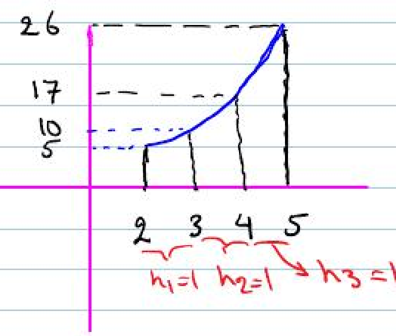


الفترة $[a,b]$	h	$m = f(a)$	$M = f(b)$	$h*m$	$h*M$
$[2,3]$	1	5	10	5	10
$[3,5]$	2	10	26	20	52
				$\sum h*m = 25$	$\sum h*M = 62$

$$\therefore A = \frac{\sum h*m + \sum h*M}{2} = \frac{25+62}{2} = \boxed{43.5 \text{ unit}^2}$$

ⓑ $G_2 = (2, 3, 4, 5)$

التجزئات: $[2,3], [3,4]$ & $[4,5]$



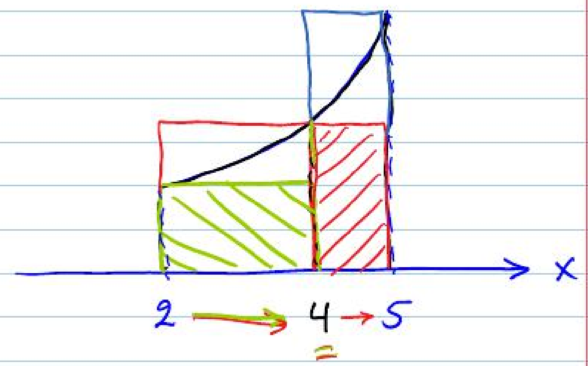
التجزئة $[a,b]$	h	$f(a)$ m	$f(b)$ M	$m*h$	$M*h$
$[2,3]$	1	5	10	5	10
$[3,4]$	1	10	17	10	17
$[4,5]$	1	17	26	17	26
				$\sum m*h = 32$	$\sum M*h = 53$

$$A = \frac{\sum m * h + \sum M * h}{2} = \frac{32 + 53}{2} = \boxed{42.5 \text{ unit}^2}$$

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

$L(\sigma, f)$ مجموع مساحات المستطيلات الصغيرة

$U(\sigma, f)$ مجموع مساحات المستطيلات الكبيرة



$[a,b]$	h العرض	m الطول	M	$m*h$ المساحة	$M*h$
				$\sum m*h$	$\sum M*h$

$L(\sigma, f)$

$U(\sigma, f)$

$$\cancel{A = \frac{\sum m*h + \sum M*h}{2}}$$

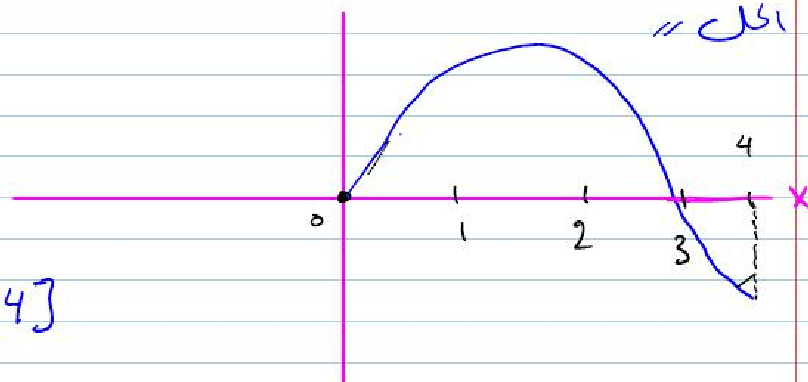
$$A = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2}$$

مثال // إذا كانت $(f(x) = 3x - x^2)$ ، $(f: [0,4] \rightarrow R)$

أوجد كل من $L(\sigma, f)$ ، $U(\sigma, f)$ مستخدماً أربعة تجزيئات منتظمة

الحل //

$$h = \frac{b-a}{n=4} = \frac{4-0}{4} = 1$$

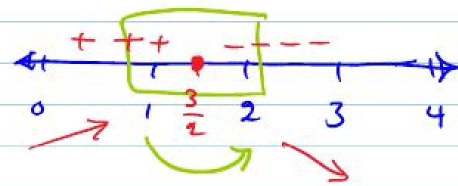


$$\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$$

$[0,1], [1,2], [2,3]$ & $[3,4]$

$$f'(x) = 3 - 2x$$

when $f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$



$[a,b]$	h	m	M	$m*h$	$M*h$
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
				$\Sigma m*h = -2$	$\Sigma M*h = 6\frac{1}{4}$

$f(1) = 2$

$f(2) = 2$

m

M

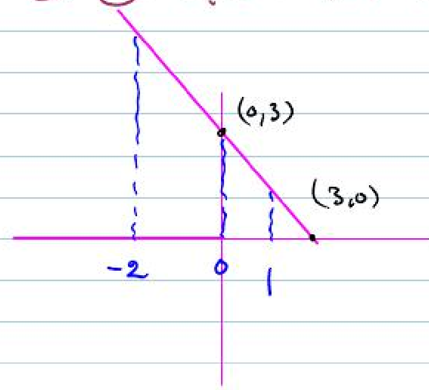
$f(\frac{3}{2}) = \frac{18}{4}\cancel{\frac{9}{2}} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$$\Sigma m*h = L(\sigma, f) = \boxed{-2}$$

$$\Sigma M*h = U(\sigma, f) = \boxed{6\frac{1}{4}}$$

تمارين (4-1)

س1 // أوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ لكل مما يأتي :-



① $f: [-2,1] \longrightarrow R \;,\; f(x) = 3 - x$

ⓐ $\sigma = (-2, 0, 1)$

$f'(x) = -1 \Rightarrow f'(x) \neq 0$

لا توجد اعداد حرجة

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[-2,0]	2	3	5	6	10
[0,1]	1	2	3	2	3
				Σm*h = 8	ΣM*h = 13

$\therefore\; L(\sigma,f) = 8$

$U(\sigma,f) = 13$

ⓑ تقسيم الفترة $[-2,1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

$$h = \frac{1-(-2)}{3} = 1$$

$\sigma = (-2, -1, 0, 1)$

$[-2,-1], [-1,0] \;\&\; [0,1]$

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$f(-2) = 5$

$[-2,-1]$	1	4	5	4	5
$[-1,0]$	1	3	4	3	4
$[0,1]$	1	2	3	2	3
				$\Sigma m*h=$ 9	$\Sigma M*h=$ 12

$f(-2) = 5$
$f(-1) = 4$

$f(0) = 3$
$f(1) = 2$

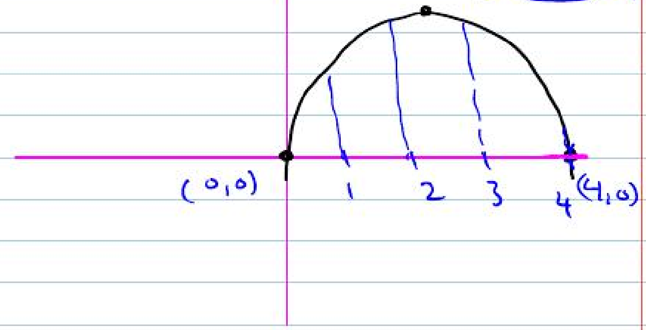
$\therefore L(\sigma, f) = 9$

$U(\sigma, f) = 12$

② $f : [0,4] \longrightarrow R \quad , \quad f(x) = 4x - x^2$

إذا كان $\sigma = (0,1,2,3,4)$

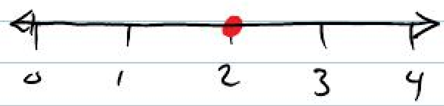
الحل



$f'(x) = 4 - 2x$

$0 = 4 - 2x \Rightarrow \boxed{x = 2}$

عدد حرج



$[a,b]$	h	m	M	$m*h$	$M*h$
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
				$\Sigma m*h =$ 6	$\Sigma M*h =$ 14

$f(x) = 4x - x^2$

$\therefore \; L(\sigma, f) = 6$

$U(\sigma, f) = 14$

أوجد قيم المجاميع العليا والمجاميع السفلى لكل مما يأتي :-

③ $f : [1,4] \longrightarrow R \;,\; f(x) = 3x^2 + 2x$

ⓐ $\sigma = (1, 2, 4)$

الحل :-

$f'(x) = 6x + 2$

when $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin [1,4]$

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,4]	2	16	56	32	112
				Σm*h = 37	ΣM*h = 128

$\therefore L(\sigma, f) = 37$

$U(\sigma, f) = 128$

ⓑ باستخدام ثلاث تجزيئات متساوية

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$

$\therefore \sigma = (1, 2, 3, 4)$

[1,2] , [2,3] & [3,4]

$f(x) = 3x^2 + 2x$

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,3]	1	16	33	16	33
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[2,3]	1	16	33	16	33
[3,4]	1	33	56	33	56
				$\sum m * h =$ 54	$\sum M * h =$ 105

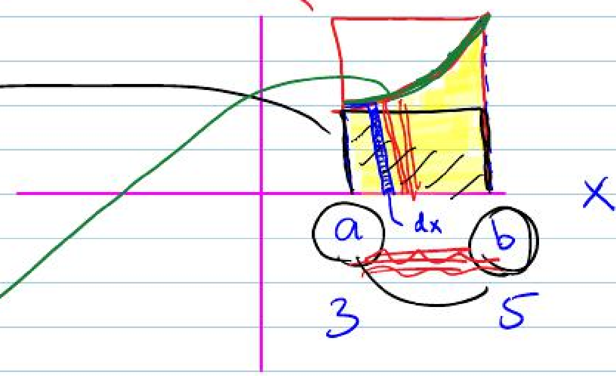
$\therefore L(\sigma, f) = 54$

$U(\sigma, f) = 105$

تعريف التكامل

$U(\sigma, f)$

$L(\sigma, f)$



$$L(\sigma, f) \leq K \leq U(\sigma, f)$$

التكامل

$$\boxed{\int_a^b \underline{f(x)}\, dx} = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

مثال // لتكن ($f:[1,3]\to R$ حيث $f(x)=x^2$)
أوجد قيمة تقريبية للتكامل ($\int_1^3 x^2\,dx$) إذا جزئت الفترة $[1,3]$ إلى جزئين

الحل //

$\because f'(x) = 2x$

when $f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,3]$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=1$$

$[a,b]$	h	m	M	$h*m$	$h*M$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9
				$\Sigma m*h=$ 5	$\Sigma M*h=$ 13

$L(\sigma,f)=5$

$U(\sigma,f)=13$

$$\therefore \int_1^3 x^2\,dx=\frac{5+13}{2}=\boxed{9}$$

مثال ١١

تمارين (2-4)

س1// أوجد قيمة تقريبية للتكامل ($\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$) باستخدام التجزئة
$\sigma = (1, 2, 3)$

الحل //

$\because f(x) = \frac{3}{x}$

$f'(x) = -\frac{3}{x^2} \neq 0$

when $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 3]$

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[1,2]	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
[2,3]	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				Σm*h= 2.5	ΣM*h= 4.5

$L(\sigma, f) = 2.5$

$U(\sigma, f) = 4.5$

$\therefore \int_1^3 \frac{3}{x}\,dx \simeq \frac{2.5 + 4.5}{2} \simeq 3.5$

س2 // لتكن $f: [1,4] \to R$, $f(x) = 3x - 3$

أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,4)$ ثم

تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني f .

الحل //

$\because f'(x) = 3 \neq 0$ $\therefore$ لا يوجد نقاط حرجة

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[1,2]	1	0	3	0	3
[2,3]	1	3	6	3	6
[3,4]	1	6	9	6	9
				Σm*h = 9	ΣM*h = 18

$f(1) = 0$
$f(2) = 3$
$f(3) = 6$
$f(4) = 9$

$L(\sigma, f) = 9$

$U(\sigma, f) = 18$

$$\therefore \int_1^4 (3x-3)\,dx = \frac{9+18}{2} = \boxed{13.5}$$

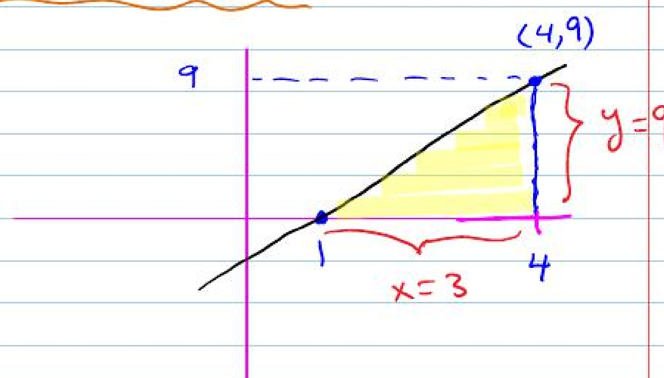
$\because f(x) = 3x - 3$

@ $y = 0$:-

$3x - 3 = 0$

$\therefore x = 1$

$f(4) = 3(4) - 3 = 9$



$A = \frac{1}{2}(x)(y)$

$A = \frac{1}{2}(x)(y)$

$= \frac{1}{2}(3)(9) = \boxed{13.5}$ unit^2

س3// أوجد قيمة تقريبية التكامل $\int_2^4 (3x^2-3)dx$ باستخدام التجزئة

$\sigma = (2,3,4)$

الحل //

$\because f(x) = 3x^2 - 3$

$\therefore f'(x) = 6x$

when $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [2,4]$

$[a,b]$	h	m	M	$m*h$	$M*h$
$[2,3]$	1	9	24	9	24
$[3,4]$	1	24	45	24	45
				$\sum m*h = 33$	$\sum M*h = 69$

$f(2) = 9$
$f(3) = 24$
$f(4) = 45$

$L(\sigma, f) = 33$

$U(\sigma, f) = 69$

$$\therefore \int_2^4 (3x^2-3)\,dx \simeq \frac{33+69}{2} \simeq 51$$

س4 // أوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ حيث $f(x) = -4$

الحل //

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[-3,2]	5	-4	-4	-20	-20

$\sum m*h$	$\sum M*h$
-20	-20

$\therefore L(\sigma, f) = -20$

$U(\sigma, f) = -20$

$$\therefore \int_{-3}^{2} -4\,dx = \frac{-20 + (-20)}{2} = \boxed{-20}$$

شاهد الفيديو لحل السؤال من خلال زيارة الموقع www.droos.org

س5 // أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 x^3\,dx$ باستخدام أربعة تجزيئات منتظمة

لكل n

$\therefore f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

when $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,5]$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

$\therefore [1,2], [2,3], [3,4] \,\&\, [4,5]$

[a,b]	h	m	M	m*h	M*h
[1,2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	27	8	27
[3,4]	1	27	64	27	64
[4,5]	1	64	125	64	125
				Σm*h	ΣM*h
				100	224

$f(1) = 1$
$f(2) = 8$
$f(3) = 27$
$f(4) = 64$
$f(5) = 125$

$\therefore L(\sigma, f) = 100$

$U(\sigma, f) = 224$

$$\therefore \int_1^5 x^3\,dx \simeq \frac{100 + 224}{2} \simeq \boxed{162}$$

النظرية الأساسية للتكامل - الدالة المقابلة

$$\int_a^b f(x)\,dx \to \frac{A_1 + A_2}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \to \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

طريقة إيجاد التكامل السابقة كلها كانت بصورة تقريبية

يجب أن تكون:

① قابلة للاشتقاق

② مستمرة على الفترة $[a, b]$

$F(x)$ الدالة المقابلة

الشروط التي يجب أن تحققها $F(x)$:

①

②

③ $F'(x) = f(x)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

قانون التكامل

مثال // جد تكامل $\int_1^2 2x\,dx$

$$\int_1^2 2x\,dx = F(2) - F(1) = 2^2 - 1^2 = \boxed{3}$$

$F(x) = x^2$

مثال / إثبت فيما إذا كانت $F:[1,3]\to R$ ، $F(x)=x^3+2$

هي دالة مقابلة $f(x)=3x^2$

الحل //

① قابلية الاشتقاق :- $F(x)$ قابلة للاشتقاق

② الاستمرارية : $F(x)$ مستمرة خلال $[1,3]$

③ $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=3x=f(x)$$

∴ $F(x)$ هي دالة مقابلة لـ $f(x)$ في الفترة $[1,3]$

مثال // إثبت أن الدالة : $F:R\longrightarrow R$, $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

هي دالة مقابلة للدالة $f:R\longrightarrow R$ $f(x)=\cos 2x$

ثم أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$

الحل //

① قابلية الاشتقاق ، الدالة F قابلة للاشتقاق

② الاستمرارية :- الدالة F مستمرة خلال R

③

$$F'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}(\cos 2x)(\cancel{2})=\cos 2x=f(x)$$

∴ $F'(x)=f(x)$

∴ الدالة F هي دالة مقابلة للدالة f خلال R

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{1}-\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2(0)}_{0}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin 2(0)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 \qquad = \frac{1}{2}(1) - 0$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n \cdot f'(x) \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\csc^2(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\csc ax \cot ax$	$-\frac{1}{a}\csc ax$

$\int 2 \longrightarrow 2x$

$\int x^3 \longrightarrow \frac{x^4}{4}$

$\int 5x^3 \longrightarrow 5\frac{x^4}{4}$

$\int (x^2+3)^3 \cdot (2x) \longrightarrow \frac{(x^2+3)^4}{4}$

$\sin x = -\cos x$

$\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$

مثال // أوجد كلاً مما يأتي :-

① $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2(x)\,dx = \tan(x)\Big|_{0}^{\pi/4}$

$= \tan(\frac{\pi}{4}) - \tan(0) = 1 - 0 = \boxed{1}$

② $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2(x)\,dx = -\cot x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= -\cot(\frac{\pi}{2}) + \cot(\frac{\pi}{4}) = 0 + 1 = \boxed{1}$

③ $\int_{0}^{\pi/3} \sec(x)\cdot\tan(x)\,dx = \sec x\Big|_{0}^{\pi/3}$

$= \sec(\frac{\pi}{3}) - \sec(0) = 2 - 1 = \boxed{1}$

④ $\int_{1}^{3} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{1}^{3}$

$= (\frac{3^4}{4}) - (\frac{1^4}{4}) = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = \boxed{20}$

خواص التكامل المحدد

① $f(x) \geqslant 0$ $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

$f(x) = x+1$, $[0,2]$

$\therefore \int_0^2 (x+1)\,dx \geqslant 0$

if $f(x) \leqslant 0$ $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$$

* $f(x) = x-1$, $[-2,0]$

$$\int_{-2}^0 (x-1)\,dx \leqslant 0$$

② $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_2^4 3(x^2+1)\,dx = 3\cdot\int_2^4 (x^2+1)\,dx$$

③ $\int_a^b f(x) \pm g(x) = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)$

$$\int_3^9 x^2 + x^3 = \int_3^9 x^2 + \int_3^9 x^3$$

مستمرة خلال

b

مستمرة خلال

(4) $\int_a^b f(x) \quad , \quad c \in [a,b]$

$$\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

مثال// لتكن $f(x) = |x|$ ، أوجد $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$

الحل// $\because$ الدالة f مستمرة خلال $[-3,4]$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\because \; 0 \in [-3,4]$$

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4}$$

$$= \left(0 - \frac{-9}{2}\right) + \left(\frac{16}{2} - 0\right)$$

$$\frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \boxed{\frac{25}{2}}$$

مثال // إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x \geq 1 \\ 3 , & x < 1 \end{cases}$ ، أوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$

الحل //

① $f(1) = 2(1)+1 = 3$ معرفة

② $f(x) \left[\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} 2x+1 = 3 \\ \lim_{x \to 1^-} 3 = 3 \end{array} \right.$

$\therefore L_+ = L_-$

③ $\lim f(x) = f(1)$

$3 = 3$

$\therefore$ الدالة (f) مستمرة خلال $[0,5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= 3x\Big|_0^1 + (x^2+x)\Big|_1^5$$

$$= (3-0) + [30-2] = \boxed{31}$$

5

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_3^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_3^3$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_3^2 3x^2\,dx = -\int_2^3 3x^2\,dx$$

$$x^3\Big|_3^2 = -\,x^3\Big|_2^3$$

$$8-27 = -\left[27-8\right]$$

$$-19 = -(19)$$

$$-19 = -19$$

تمارين (4-3)

س١) // احسب كلاً من التكاملات الاتية :-

ⓐ $\int_{-2}^{2} (3x-2)\, dx$

$$3\frac{x^2}{2} - 2x \Big|_{-2}^{2} = \left(3\frac{(2)^2}{2} - 2(2)\right) - \left(3\frac{(-2)^2}{2} - 2(-2)\right)$$

$$= (6-4) - (6+4) = \boxed{-8}$$

ⓑ $\int_{1}^{2} (x^{-2} + 2x + 1)\, dx$

$$\left(\frac{x^{-1}}{-1} + 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{1}^{2} = -x^{-1} + x^2 + x \Big|_{1}^{2}$$

$$= \left(-(2)^{-1} + 2^2 + 2\right) - \left(-(1)^{-1} + 1^2 + 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 6\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 5 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

ⓒ $\int_{1}^{3} (x^4 + 4x)\, dx$

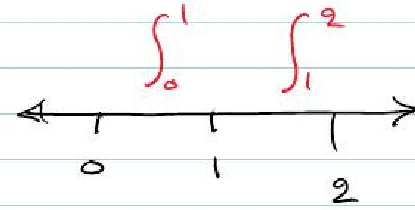
$$\frac{x^5}{5} + 2x^2 \Big|_{1}^{3} = \left(\frac{3^5}{5} + 18\right) - \left(\frac{1}{5} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{243}{5} + \frac{90}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{10}{5}\right)$$

$$\frac{333}{5} - \frac{11}{5} = \boxed{\frac{322}{5}}$$

(d) $\int_0^2 |x-1|\, dx$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \forall\ x \geq 1 \\ -(x-1), & \forall\ x < 1 \end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (-x+1)\, dx + \int_1^2 (x-1)\, dx$$

$$= \left(\frac{-x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left[\left(\overset{\frac{1}{2}}{\cancel{-\frac{1}{2}+1}}\right) - 0\right] + \left[\left(\overset{0}{\cancel{2-2}}\right) - \left(\overset{-\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{1}{2}-1}}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

(e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x + \cos x)\, dx$

$$\frac{x^2}{2} + \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = (0 + \sin 0) - \left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + \sin -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{\pi^2}{8} + (-1)\right)$$

$$= \boxed{1 - \frac{\pi^2}{8}}$$

(f) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

$$= \int_3^2 \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}\,dx = \int_3^2 (x^2+x+1)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x \Big|_3^2 = \left(\frac{8}{3}+2+2\right)-\left(9+\frac{9}{2}+3\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3}+\frac{12}{3}\right)-\left(\frac{18}{2}+\frac{9}{2}+\frac{6}{2}\right)$$

$$= \frac{20}{3}-\frac{33}{2} = \frac{40-99}{6}$$

$$= \boxed{-\frac{59}{6}}$$

(g) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$

$$= \int_1^3 (2x^3-4x^2+5)(x^{-2}) = \int_1^3 2x-4+5x^{-2}$$

$$= \frac{2x^2}{2}-4x+5\frac{(x^{-1})}{-1}\Big|_1^3 = x^2-4x-5x^{-1}\Big|_1^3$$

$$= \left(9-4(3)-5(3^{-1})\right)-\left(1-4-5(1^{-1})\right)$$

$$= \left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(-3-5) \qquad = \left(\frac{27}{3}-\frac{36}{3}-\frac{5}{3}\right)-(-8)$$

$$= \frac{-14}{3} + \frac{24}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

س2 // أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F(x) = \sin x + x \qquad F: [0, \frac{\pi}{6}] \longrightarrow R$

$f(x) = 1 + \cos x \qquad f: [0, \frac{\pi}{6}] \longrightarrow R$

ثم إحسب $\int_0^{\pi/6} f(x)\, dx$

الحل //

① الدالة $F(x)$ مستمرة خلال $[0, \frac{\pi}{6}]$

② // // قابلة للاشتقاق خلال $(0, \frac{\pi}{6})$

③ $F'(x) = f(x)$

$F(x) = \sin x + x$

$F'(x) = \cos x + 1 = f(x)$

∴ الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\pi/6} (\cos x + 1)\, dx = \sin x + x \Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\cancel{\sin 0 + 0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{3 + \pi}{6}}$$

س3 // أوجد كلاً من التكاملات الآتية :-

ⓐ $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2\,dx$

Sol:-

$$\int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)$$

$$= \int_1^4 x^3 + \cancel{2x^2} + x - \cancel{2x^2} - 4x - 2$$

$$-3x$$

$$= \int_1^4 x^3 - 3x - 2 \quad = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x \Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{256}{4} - \frac{48}{2} - 8\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right)$$

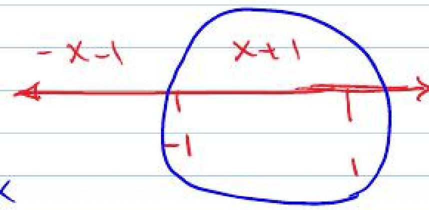
$$= (64 - 24 - 8) - \left(\frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{8}{4}\right)$$

$$= 32 + \frac{13}{4} = \frac{128}{4} + \frac{13}{4} = \boxed{\frac{141}{4}}$$

ⓑ $\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$

الجزء ٥ عينه

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \forall x \geq -1 \\ -(x+1), & \forall x < -1 \end{cases}$$



$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx = \cancel{\int_{-1}^{-1} -(x+1)\,dx}^{\,0} + \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$= \boxed{2}$

(c) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\,dx$

Sol:- $\int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = \int_2^3 \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\,(x^2+1)}{\cancel{x-1}}$

$= \int_2^3 (x+1)(x^2+1) = \int_2^3 x^3+x+x^2+1$

$= \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x \Big|_2^3 = \left(\frac{81}{4}+\cancelto{9}{\frac{27}{3}}+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\cancelto{4}{\frac{16}{4}}+\frac{8}{3}+\cancelto{2}{\frac{4}{2}}+2\right)$

$= \left(\frac{81}{4}+\frac{48}{4}+\frac{18}{4}\right)-\left(\frac{8}{3}+\frac{24}{3}\right) = \frac{147}{4}-\frac{32}{3}$

$= \frac{441-128}{12} = \boxed{\frac{313}{12}}$

(d) $\int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx$

Sol: $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)$

$= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{4x^2}{2}+4\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$

$= \frac{2x^{5/2}}{5}+2x^2+\frac{8x^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1$

$= \left(\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3}\right)-(0+0+0) = 2+\frac{6+40}{15}$

$$= \frac{30}{15} + \frac{46}{15} = \boxed{\frac{76}{15}}$$

س4 // إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x, & \forall x \geq 3 \\ 6, & \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)\,dx$

الحل //

① $f(3) = 2(3) = 6$ ∵ الدالة (f) معرفة

② $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} 2x = 6 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} 6 = 6 = L_2 \end{cases}$

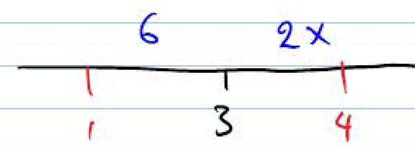
$L_1 = L_2$

③ $f(3) = \lim\limits_{x \to 3}$

$6 = 6$

∴ الدالة (f) مستمرة على الفترة $[1,4]$

$$\therefore \int_1^4 f(x) = \int_1^3 6\,dx + \int_3^4 2x\,dx$$



$$= 6x\Big|_1^3 + x^2\Big|_3^4$$

$$= (18-6) + (16-9) = \boxed{19}$$

س٧// إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \forall x \geq 0 \\ 2x, & \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$

الحل//

① $f(0) = 3(0)^2 = 0$ معرفة

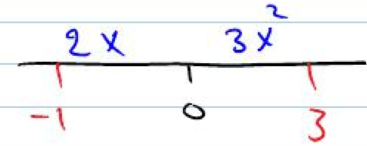
② $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} 3x^2 = 0 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 2x = 0 = L_2 \end{cases}$

$\therefore L_1 = L_2$

③ $f(0) = \lim\limits_{x \to 0}$

$0 = 0$

∴ الدالة (f) مستمرة خلال الفترة $[-1, 3]$



$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x) = \int_{-1}^{0} 2x\, dx + \int_{0}^{3} 3x^2\, dx$$

$$= x^2 \Big|_{-1}^{0} + x^3 \Big|_{0}^{3}$$

$$= (0-1) + (27-0) = \boxed{26}$$

التكامل الغير محدد

$$f(x) \longrightarrow \boxed{F(x)}$$

شروط الدالة المقابلة

① مستمرة على $[a,b]$
② قابلة للاشتقاق (a,b)
③ $F'(x) = f(x)$

نفس المتغير ولا علاقة أن يكون (x^3) مثلا

Examples

$$f(x) = 2x \xrightarrow{[1,3]} F(x) = x^2$$

$$F_1(x) = x^2 + 3$$

$$F_2(x) = x^2 - 100$$

$$F_3(x) = x^2 + 7000$$

عدد ثابت
(c)

$$\boxed{F(x) = x^2 + C} \qquad C \in R$$

$$f(x) \xrightarrow{\text{الدالة المقابلة}} F(x) + c$$

$x^2 + x$
$\sin x$

الفرق بين التكامل المحدد والغير محدد :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = O$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

مثال //

$$\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = \boxed{(3)^2 - (1)^2 = \boxed{8}}$$

ناتج عدد ثابت

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

خطوة اضافية عما هو في التكامل الغير محدد

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

خطوة اضافية عما هو في التكامل المحدد

الناتج دائماً متغير

مثال// أوجد $\int f(x)\, dx$ إذا علمت أن :-

ⓐ $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$\int f(x)\, dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + C$$

$$= x^3 + x^2 + x + C$$

ⓑ $f(x) = \cos x + x^{-2}$

$$\int f(x)\, dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= \sin x - x^{-1} + C$$

ⓒ $f(x) = x + \sec x \tan x$

$$\int f(x)\, dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \sec x + C$$

ⓓ $f(x) = \sin(2x+4)$ $* 1 \longrightarrow \frac{8}{8} = \frac{6}{6} = \frac{2}{2}$

$$f(x) = \frac{2}{2} \sin(2x+4)$$

مشتقة داخل القوس

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot \sin(2x+4)$$

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot -\cos(2x+4) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+4) + c$$

مثال // جد التكاملات لكل مما يأتي :-

ⓐ $\int (x^2+3)^2 (2x)\, dx$

$\because f(x) = x^2+3 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\therefore \int (x^2+3)^2 (2x)\, dx = \frac{(x^2+3)^3}{3} + c = \frac{1}{3}(x^2+3)^3 + c$

ⓑ $\int (3x^2+8x+5)^6 \cdot (3x+4)\, dx \quad * \; 1 = \frac{8}{8} = \frac{2}{2}$

$= \frac{2}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 \cdot (3x+4)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 \cdot \underline{(6x+8)}\, dx$

$= \frac{1}{2}\, \frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c \quad = \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c$

ⓒ $\int \sin^4 x \cos x\, dx$

$\int (\sin x)^4 \cdot \cos x\, dx = \frac{(\sin x)^5}{5} + c$

$= \frac{1}{5}(\sin x)^5 + c$

ⓓ $\int \tan^6 x \cdot \sec^2 x\, dx$

$= \int (\tan x)^6 \cdot \sec^2 x\, dx$

$$= \frac{(\tan x)^7}{7} + C = \frac{1}{7}(\tan x)^7 + C$$

مثال// جد تكاملات كل مما يأتي :-

① $\int 9 \sin 3x \, dx$

$3 \int \sin 3x \cdot 3 \, dx = -3 \cos 3x + c$

② $\int x^2 \cdot \sin x^3 \, dx$

$\frac{3}{3} \int x^2 \cdot \sin x^3 \, dx$

$\frac{1}{3} \int 3x^2 \cdot \sin x^3 \, dx = -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$

③ $\int \sqrt{1-\sin 2x} \, dx$ $\qquad \sin^2 x + \cos^2 = 1$

$\int \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin x \cdot \cos x} \, dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} \, dx$

$\int \sqrt{(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)} \, dx$

$\int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \, dx$

$\pm \int (\sin x - \cos x) \, dx = \pm (-\cos x - \sin x) + c$

$= \boxed{\mp (\cos x + \sin x) + c}$

$$= \boxed{\mp \left(\cos x + \sin x \right) + c}$$

$$④ \int \sin^4 x \, dx$$

للحفظ

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{aligned}}$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x + \underline{\underline{\cos^2 2x}}) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x + \left[\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \int 2\cos 2x \, dx + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underline{x} - \sin 2x + \underline{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{8}\int \cos 4x \cdot 4 \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + C$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$\int \sin^5 x \, dx$$

للحفظ

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$= \int \sin x (\sin^2 x)^2 \, dx$$

$$= \int \sin x (1-\cos^2 x)^2$$

$$= \int \sin x (1-2\cos^2 x + \cos^4 x) \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - 2\int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx + \int \sin x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$= -\cos x - 2 \cdot \frac{-1}{-1} \int \sin x \cdot (\cos x)^2 \, dx + \frac{-1}{-1} \int \sin x \cdot (\cos x)^4 \, dx$$

$$= -\cos x + 2\,\frac{(\cos x)^3}{3} - \frac{(\cos x)^5}{5} + C$$

$$= \boxed{-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C}$$

خلاصة :-

④ زوجي

$$\sin^4 = (\sin^2 x)^2 = \sin^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

⑤ فردي

$$\sin^5 \longrightarrow \sin\,(\sin^2 x)^2 \qquad \sin^2 + \cos^2 = 1$$

⑤ $\int (\sin x - \cos x)^7 \cdot (\cos x + \sin x)\, dx$

$= \dfrac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + C$

⑥ $\int \dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x}\, dx$

للحفظ

$\boxed{\sec^2 - \tan^2 = 1}$

$\boxed{\sec^2 = \tan^2 + 1}$

$= \int (1 + \tan^2 x) \cdot (\tan x)^{-3}\, dx$

$= \int (\sec^2 x) \cdot (\tan x)^{-3}\, dx$

$= \dfrac{(\tan x)^{-2}}{-2} + C = \boxed{-\dfrac{1}{2\tan^2 x} + C}$

⑦ $\int \cos^3 x\, dx$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$= \int \cos x \,(\cos^2 x)\, dx$

$= \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)\, dx$

$= \int \cos x\, dx - \int \cos x \cdot \sin^2 x\, dx$

$= \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$

⑧ $\int \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

$= \int (\tan x) \cdot \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

$= \int (\tan x) \cdot (\sec^2 x)\, dx = \dfrac{(\tan x)^2}{2} + C$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

(9) $\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$

للحفظ

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \int (2\sin 3x \cdot \cos 3x)(\cos 3x)^2 \, dx$$

$$= \int 2\sin 3x \cdot (\cos 3x)^3 \, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{-3}{-3} \int \sin 3x \cdot (\cos 3x)^3 \, dx$$

$$= \frac{2}{-3} \cdot \frac{(\cos 3x)^4}{4} + C \qquad = -\frac{1}{6}\cos^4 3x + C$$

$$⑩ \int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$$

للحفظ

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 4x &= \cos^2 2x - \sin^2 2x \\ \sin 4x &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)}(\cos 2x + \sin 2x)}{\cancel{\cos 2x - \sin 2x}}\, dx$$

$$= \frac{2}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{2}{2} \int \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

www.droos.org شاهد الفيديو لكل السؤال من خلال زيارة الموقع

س٧ / جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

1. $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\, dx$

$= \int \left[(2x^2-3)^2-9\right] \cdot x^{-2}\, dx = \int \left[(4x^4-12x^2+\cancel{9})-\cancel{9}\right] \cdot x^{-2}\, dx$

$= \int 4x^2-12\, dx = \frac{4}{3}x^3-12x+c$

2. $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{(3-\sqrt{5}\cdot\sqrt{x})^7}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot -\frac{2}{\sqrt{5}} \int \frac{(3-\sqrt{5}\cdot\sqrt{x})^7}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \cdot \int (3-\sqrt{5x})^7 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{2}\, dx$

$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \int (3-\sqrt{5x})^7 \cdot \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}\, dx$

مشتقة

$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8} + c = \frac{-1}{4\sqrt{35}} (3-\sqrt{5x})^8 + c$

س٣ // جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

3. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx$

$= \int \frac{\cos x\,(\cos^2 x)}{1-\sin x}\,dx \quad = \int \frac{\cos x\,(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}\,dx$

$= \int \frac{\cos x\,\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}}\,dx$

$= \int \cos x\,dx + \int \sin x \cdot \underline{\cos x}\,dx$

مشتقة

$= \boxed{\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c}$

4. $\int \csc^2 x \cos x\,dx$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx \quad = \int (\sin x)^{-2} \cdot \underline{\cos x}\,dx$

مشتقة

$= \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c \quad = -\frac{1}{\sin x} + c$

$= \boxed{-\csc + c}$

س ١١ جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

(5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\, dx$

$$= \int x\,(3x^2+5)^{-4}\, dx = \frac{1}{6}\int 6x \cdot (3x^2+5)^{-4}\, dx$$

مشتقة

$$= \frac{1}{6}\,\frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c$$

$$= \boxed{\frac{-1}{18\,(3x^2+5)^3} + c}$$

(6) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\; dx$

$$= \int (x^2+10x+25)^{\frac{1}{3}}\, dx =$$

$$= \int \left((x+5)^2\right)^{\frac{1}{3}}\, dx = \int (x+5)^{2/3}\, dx$$

$$\frac{(x+5)^{5/3}}{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \boxed{\frac{3}{5}\,(x+5)^{5/3} + c}$$

س ١١ جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

(7) $\int \sin^3 x \, dx$

للحفظ

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$= \int \sin x (\sin^2 x) \, dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x$$

$$= -\cos x - \frac{1}{-1} \int \cos^2 x \cdot -\sin x$$

$$= \boxed{-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C}$$

(8) $\int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$

$$= \int \cos \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx$$

$$= \frac{-2}{-2} \int \cos \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx$$

$$= -2 \int \cos \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{1-x}} \, dx$$

مشتقة

$$= \boxed{-2 \sin \sqrt{1-x} + C}$$

س / جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

(9) $\int (3x^2+1)^2 \, dx$

$= \int 9x^4 + 6x^2 + 1 \quad dx$

$= \frac{9}{5} x^5 + 2x^3 + x + c$

(10) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x} - x}}{\sqrt[4]{x^3}} \, dx$

$= \int \frac{(x^{\frac{1}{2}} - x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} \, dx \quad = \int (x^{\frac{1}{2}} - x)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{4}} \, dx$

$= \int \left[x^{\frac{1}{2}} (1 - x^{\frac{1}{2}}) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{4}} \, dx$

$= \int x^{\frac{1}{4}} (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{+\frac{3}{4}} \, dx$

$= \int (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= \frac{-2}{-2} \int (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= -2 \int (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \, dx$

مشتقة

$= -2 \frac{(1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad = \boxed{\frac{-4}{3} (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} + c}$

١٧/ جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

(11) $\int (1+\cos 3x)^2 \, dx$

لاحظ

$$\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1+\cos 2ax)$$

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1-\cos 2ax)$$

$$= \int 1 + 2\cos 3x + \boxed{\cos^2 3x} \, dx$$

$$= \int dx + \int 2\cos 3x \, dx + \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2}\cos 6x \, dx$$

$$= \int dx + \frac{2}{3}\int 3\cos 3x \, dx + \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{12}\int 6 \cdot \cos 6x \, dx$$

$$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c}$$

(12) $\int \sec^2 4x \, dx$

$$= \frac{1}{4}\int 4 \cdot \sec^2 4x \, dx = \boxed{\frac{1}{4}\tan 4x + c}$$

(13) $\int \csc^2 2x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2\csc^2 2x \, dx = \boxed{\frac{-1}{2}\cot 2x + c}$$

س٢/ جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

(14) $\int \tan^2 8x \, dx$

للحفظ

$\boxed{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$

$= \int (\sec^2 8x - 1) \, dx$

$= \int \sec^2 8x \, dx - \int dx$

$= \frac{1}{8} \int 8 \sec^2 8x \, dx - \int dx \quad = \boxed{\frac{1}{8} \tan 8x - x + c}$

(15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x} \, dx$

للحفظ

$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$= \int \frac{(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 2x} \, dx$

$= \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 2x \, dx$

$= -\frac{1}{2} \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{-2\csc^2 2x}_{\text{مشتقة}} \, dx$

$= -\frac{1}{2} \frac{(\cot 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad = \boxed{-\frac{1}{3} (\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c}$

س/ جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة :-

$$\int \cos^2 2x \, dx$$

للحفظ

$$\boxed{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta}$$

$$\boxed{\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}$$

$$\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int 4\cos 4x \, dx = \boxed{\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c}$$

(17) $$\int \sin^2 8x \, dx$$

للحفظ

$$\boxed{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta}$$

$$\boxed{\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}$$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 16x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 16x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{32}\int 16\cos 16x \, dx = \boxed{\frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 16x + c}$$

(18) $$\int \cos^4 3x \, dx$$

$$= \int (\cos^2 3x)^2 \, dx \qquad \cos^2 3x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x)$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4}(1 + 2\cos 6x + \underline{\cos^2 6x}) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos 6x + \left(\frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1) + 2\cos 6x + \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos 12x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x \quad dx$$

$$= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6x \, dx + \frac{1}{8}\int \cos 12x \, dx$$

$$= \boxed{\frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C}$$

اللوغارتم الطبيعي

ans. exp. base

$$\log_{\boxed{10}} \boxed{100} = \boxed{2} \longleftrightarrow 10^2 = 100$$

الدالة اللوغارتمية — الدالة الأسية

$\ln$

$$\boxed{\log_e} b = x \longleftrightarrow e^x = b$$

اللوغارتم الطبيعي — الدالة الأسية

$$\boxed{\ln b = x} \longleftrightarrow \boxed{e^x = b}$$

$e = 2.7182818...$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

n	$f(n)$
0	$f(0)$ = undifined
1	$f(1) = 2^1 = 2$
2	$f(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$
3	$f(3) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2.441...$
⋮	⋮

$\boxed{2.7182818...}$

e

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$y = e = 2.71828...$$

خواص اللوغاريتم الطبيعي

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln(a*b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\boxed{c \ln b = \ln b^{c}}$

$\ln x = \boxed{\text{مقلوب الدالة}} * \boxed{\text{مشتقة الدالة}}$

$= \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{dx}{x}$

مشتقة

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

الدالة

$\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x\,dx = \frac{2x}{x^2+3} dx$

مشتقة

$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+6} dx = \ln(x^3+x^2+6) + C$

الدالة

مثال // جد (y') لكل مما يأتي :-

① $y = \ln\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

② $y = \ln\sqrt{x^2+1}$

$$y = \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{x^2+1}$$

$$= \boxed{\frac{x}{x^2+1}}$$

③ $y = \ln\sin^2 x$

$$y = 2\ln\sin x \Rightarrow y' = 2\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 2\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 2\cot x$$

$$y = \ln\sin^2 x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x$$

$$= \frac{2\cancel{\sin x}\cos x}{\sin^{\cancel{2}} x} = 2\frac{\cos x}{\sin x} = 2\cot$$

مثال // جد التكاملات لكل من الدوال الآتية :-

① $\int \cot x \, dx$

$$\int \frac{\overbrace{\boxed{\cos x}}^{\text{مشتقة}}}{\underbrace{\boxed{\sin x}}_{\text{الدالة}}} dx = \ln|\sin x| + c$$

② $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx$

$$\frac{3}{3} \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\overbrace{\boxed{3x^2 - 3}}^{\text{المشتقة}}}{\underbrace{\boxed{x^3 - 3x + 2}}_{\text{الدالة}}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x^3 - 3x + 2| + c$$

③ $\int \sec x \, dx$

$$\int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$\int \frac{\overbrace{\boxed{\sec^2 x}}^{\text{مشتقة}} + \overbrace{\boxed{\tan x \cdot \sec x}}^{\text{مشتقة}}}{\underbrace{\boxed{\sec x}}_{\text{دالة}} + \underbrace{\boxed{\tan x}}_{\text{دالة}}} dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

الدالة الأسية

① $e^{0} = 1$

② $e^{\ln} = 1$

③ $e^{(a+b)} = e^{a} \cdot e^{b}$

④ $e^{(\frac{a}{b})} = e^{a} - e^{b}$

⑤ $e^{a^{b}} = b\, e^{a}$

الخواص

المشتقة

قانون المشتقة

$e^{x} = \boxed{\text{نفسها}} * \boxed{\text{مشتقة الاس}} * \boxed{\text{Ln الاساس}}$

$e^{x} \cdot dx * \cancel{\ln e}^{\,1} = e^{x}\, dx$

المشتقة

$e^{\tan 2x} = e^{\tan 2x} \cdot \sec^{2} 2x * 2\, dx = \underbrace{2\sec^{2} 2x}_{\text{مشتقة}} \cdot \underbrace{e^{\tan 2x}}_{\text{دالة}}\, dx$

شاك على التكامل

$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^{2} x} = \int \underbrace{\sec^{2} x}_{\text{مشتقة}} \cdot \boxed{\underbrace{e^{\tan x}}_{\text{دالة}}} = e^{\tan x} + C$

اذا كان الاساس اي عدد موجب (a) غير الـ (e)

قانون المشتقة

$a^{x} = \boxed{\text{نفسها}} * \boxed{\text{مشتقة الاس}} * \boxed{\text{Ln الاساس}}$

$$\frac{d}{dx}5^{x} = 5^{x} * dx * \ln 5 = (\ln 5)(5^{x})$$

$$2^{-2x} = 2^{-2x} * -2\,dx * \ln 2 = \underbrace{(-2\ln 2)}_{\text{مشتقة}}\,\underbrace{2^{-2x}}_{\text{دالة}}\,dx$$

التكامل

$$\int 4^{-3x^2}\cdot x = \frac{-6}{-6}\cdot\frac{\ln 4}{\ln 4}\int 4^{-3x^2}\cdot x$$

$$= \frac{1}{-6\ln 4}\int \underbrace{4^{-3x^2}}_{\text{دالة}}\cdot\underbrace{-6x\cdot\ln 4}_{\text{مشتقة}}$$

$$= \frac{1}{-6\ln 4}\cdot 4^{-3x^2} + C$$

شان على التكامل

تمارين 4-5

س، جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :-

ⓐ $y = \ln 3x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cancel{3}x} \cdot \cancel{3} = \frac{1}{x}$

ⓑ $y = \ln(x^2)$

$y = 2\ln x \longrightarrow y' = 2\frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{2}{x}$

or// $y = \ln(x^2) \longrightarrow y' = \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x} = \frac{2}{x}$

ⓒ $y = \ln(\frac{x}{2}) \longrightarrow y' = \frac{\cancel{2}}{x} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{x}$

ⓓ $y = (\ln x)^2 \longrightarrow y' = 2(\ln x)^1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x)$

ⓔ $y = \ln(\frac{1}{x})^3$

$y = 3\ln(\frac{1}{x}) \longrightarrow y' = 3\cancel{x} \cdot \frac{-1}{x^{\cancel{2}}} = \frac{-3}{x}$

ⓕ $y = \ln(2-\cos x) \longrightarrow y' = \frac{1}{2-\cos x} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

ⓖ $y = e^{-5x^2+3x+5} \longrightarrow y' = e^{-5x^2+3x+5} \cdot (-10x+3)$

$y' = (-10x+3)\, e^{-5x^2+3x+5}$

ⓗ $y = 9^{\sqrt{x}} \longrightarrow y' = 9^{\sqrt{x}} \cdot (\frac{1}{2\sqrt{x}}) \cdot \ln 9$

$y' = \frac{\ln 9}{\quad} (9^{\sqrt{x}})$

$$y' = \frac{\ln 9}{2\sqrt{x}} \left(9^{\sqrt{x}} \right)$$

(I) $y = 7^{-\frac{x}{4}} \longrightarrow y' = 7^{\left(-\frac{x}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \ln 7 = \frac{-\ln 7}{4} \cdot 7^{-\frac{x}{4}}$

(J) $y = x^2 \cdot e^x \longrightarrow y' = x^2 \cdot (e^x \cdot 1) + 2x\,(e^x)$

$$= e^x (x^2 + 2x) = x e^x (x+2)$$

س ١١ جد التكاملات الاتية :-

ⓐ $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|\Big]_0^3$

$= \ln|3+1| - \ln|0+1| = \ln 4 - \cancel{\ln 1} = \ln 4$

$= \ln 2^2 = \boxed{2\ln 2}$

ⓑ $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \ln|x^2+9|\Big]_0^4$

$= \ln|16+9| - \ln|0+9| = \ln 25 - \ln 9$

$= \ln 5^2 - \ln 3^2 = 2[\ln 5 - \ln 3]$

$= \boxed{2\ln\frac{5}{3}}$

ⓒ $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx = \frac{2}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} 2e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\Big]_{\ln 3}^{\ln 5}$

$= \frac{1}{2}\left[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}\right] = \frac{1}{2}\left[\cancel{e}^{\cancel{\ln} 5^2} - \cancel{e}^{\cancel{\ln} 3^2}\right]$

$= \frac{1}{2}[5^2 - 3^2] = \boxed{8}$

ⓓ $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx = -\int_0^{\ln 2} -e^{-x}\,dx$

$= -e^{-x}\Big]_0^{\ln 2} = -\left[e^{-\ln 2} - e^{0}\right]$

$$= - e^{-x} \Big]_0^{\ln 2} = -\left[e^{-\ln 2} - e^{0}\right]$$

$$= -\left[\cancel{e}^{\cancel{\ln} 2^{-1}} - e^{0}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 (1+e^x)^2 \, e^x \, dx = \frac{(1+e^x)^3}{3}\Big]_0^1$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e^1)^3 - (1+\cancel{e^0}^{\,1})^3\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[(1+e)^3 - 8\right]$$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\, dx = \ln\left|x^3+4x+1\right| \Big]_0^1$

$$= \ln\left((1)^3+4(1)+1\right) - \ln\left((0)^3+4(0)+1\right)$$

$$= \ln 6 - \cancel{\ln 1}^{\,0} = \boxed{\ln 6}$$

(g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$= \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\Big]_1^4$$

مشتقة

$$= e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e = \boxed{e}$$

(h) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\, dx = \ln\left|2+\tan x\right| \Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \ln\left(2+\tan\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(2-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$= \ln(2+1) - \ln(2-1)$

$= \ln 3 - \cancel{\ln 1}^{0} = \boxed{\ln 3}$

(i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

$\displaystyle = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (\sin x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle = 2\sqrt{\sin x}\,\Bigg]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right)$

$\displaystyle = 2\left(\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \boxed{2 - \sqrt{2}}$

(j) $\int \cot^3 5x \; dx$

لحفظ

$$\boxed{\cot^2 = \csc^2 - 1}$$

$$= \int \cot 5x \left(\cot 5x\right)^2 dx$$

$$= \int \cot 5x \left(\csc^2 5x - 1\right) dx$$

$$= \int \left(\cot 5x \cdot \csc^2 5x\right) dx - \cot 5x \; dx$$

$$= \int \left(\cot 5x\right)^1 \cdot \left(\csc^2 5x\right) dx - \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x} dx$$

$$= \frac{1}{-5} \int \left(\cot 5x\right) \cdot \left(-5 \csc^2 5x\right) dx - \frac{1}{5} \int \frac{5 \cos 5x}{\sin 5x} dx$$

$$= \frac{1}{-5} \frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} \ln\left|\sin 5x\right| + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{-10} \cot^2 5x - \frac{1}{5} \ln\left|\sin 5x\right| + C}$$

(k) $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$

$= -\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \, dx$

$= -\left[e^{\cos x} \right]_0^{\pi/2} = -\left[\cancel{e^{0}}^{\,1} - e^{1} \right] = \boxed{e - 1}$

(i) $\int_1^2 x \cdot e^{-\ln x} \, dx$

$= \int_1^2 x \cdot \cancel{e}^{\ln x^{-1}} \, dx = \int_1^2 x \cdot x^{-1} \, dx = \int_1^2 \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \, dx$

$= \int_1^2 dx = x \Big]_1^2 = 2 - 1 = \boxed{1}$

س١٢// أثبت ما يأتي :-

ⓐ $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$

$$LHS = \int_1^8 (\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\int_1^8 (\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$= \cancel{3} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{\cancel{3}/2}\Big]_1^8 = 2(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^8$$

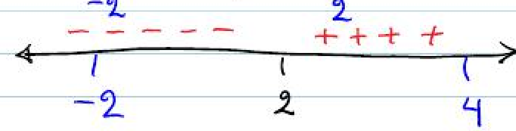
$$2\left[(\sqrt[3]{8}-1)^{\frac{3}{2}} - \cancelto{0}{(\sqrt[3]{1}-1)^{\frac{3}{2}}}\right] = 2(2-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \boxed{2} = RHS$$

ⓑ $\displaystyle\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$

let: $3x-6=0 \Rightarrow x=2 \in [-2,4]$

$\displaystyle\int_{-2}^{2} -(3x-6) \qquad \int_{2}^{4} 3x-6$



$$LHS: \int_{-2}^{2} -3x+6\,dx + \int_{2}^{4} 3x-6\,dx$$

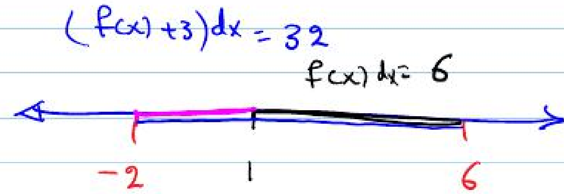
$$= \frac{-3x^2}{2}+6x\Big]_{-2}^{2} + \frac{3x^2}{2}-6x\Big]_{2}^{4}$$

$$= \left[(-6+12)-(-6-12)\right] + \left[\cancelto{0}{(24-24)}-(6-12)\right]$$

$$= (6+18)+6 = \boxed{30} \; RHS$$

س،، $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فإذا كان $\left(\int_1^6 f(x)\,dx = 6\right)$ وكان

$\left(\int_{-2}^6 [f(x)+3]\,dx = 32\right)$ نجد $\left(\int_{-2}^1 f(x)\,dx\right)$



$$\underbrace{\int_{-2}^6 f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{-2}^6 3\,dx}_{} = 32$$

$$\int_{-2}^1 f(x)\,dx + \int_1^6 f(x)\,dx + 3x\Big]_{-2}^6 = 32$$

$$\int_{-2}^1 f(x)\,dx + 6 + \left(3(6) - 3(-2)\right) = 32$$

$$\int_{-2}^1 f(x)\,dx + 6 + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^1 f(x)\,dx = \boxed{2}$$

س // جد قيمة $(a \in R)$ إذا علمت أن $\left(\int_1^a (x+\frac{1}{2})\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx \right)$

$$\left.\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_1^a = 2 \left. \tan x \right]_0^{\pi/4}$$

$$\left[\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \right] = 2\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right)$$

$$\frac{a^2 + a}{2} - 1 = 2(1 - 0)$$

$$\frac{a^2 + a}{2} = 3 \Rightarrow a^2 + a = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$

$$(a+3)(a-2) = 0$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$\boxed{a = -3}$$

س٣// لتكن $\left(f(x) = x^2 + 2x + K \right)$ حيث $K \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5)

جد $\left(\int_1^3 f(x)\,dx \right)$

$\because \quad f'(x) = 2x + 2$

$\therefore \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$\because \quad f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + K = -5$

$= 1 - 2 + K = -5 \Rightarrow \boxed{K = -4}$

$\therefore \quad f(x) = x^2 + 2x - 4$

$\therefore \quad \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x \right]_1^3$

$\left(\cancel{\frac{27}{3}}^{9} + 9 - 4(3) \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4 \right) = 6 - \left(\frac{1}{3} - 3 \right)$

$= 6 - \frac{1}{3} + 3$

$9 - \frac{1}{3} = \frac{27 - 1}{3} = \boxed{\frac{26}{3}}$

س ١١ إذا كان للمنحني $\left(f(x) = (x-3)^3 + 1 \right)$ نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار $\left(\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx \right)$

$\because f'(x) = 3(x-3)^2$

$f''(x) = 6(x-3)$

$\because f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3} = a$

$\because f(x) = (x-3)^3 + 1$

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = \boxed{1} = b$

$\therefore \int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$

$= \int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$

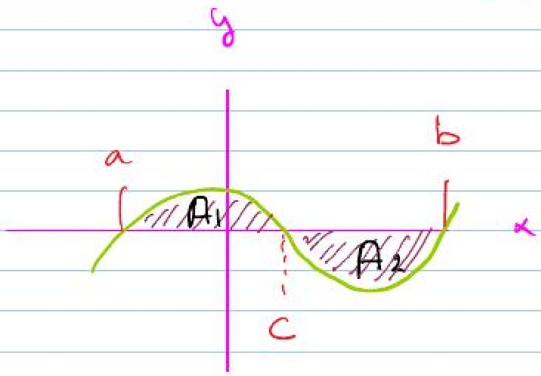
$= \frac{\cancel{3}(x-3)^3}{\cancel{3}} \Big]_0^1 - \frac{\cancel{6}^{3}(x-3)^2}{\cancel{2}_{1}} \Big]_0^3$

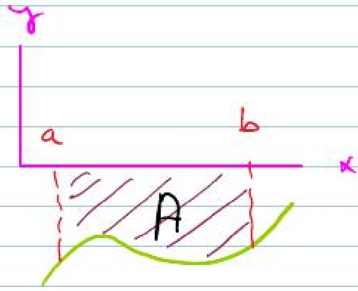
$(x-3)^3 \Big|_0^1 - 3(x-3)^2 \Big|_0^3$

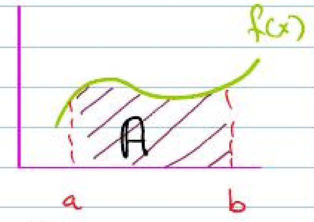
$(-8 - (-27)) - 3(0 - (-3)^2)$

$= -8 + 27 + 27 = \boxed{46}$

المساحة بين المنحني ومحور السينات







$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{A = |A_1| + |A_2|}$$

مثال// جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة ($f(x) = x^3 - 4x$) ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

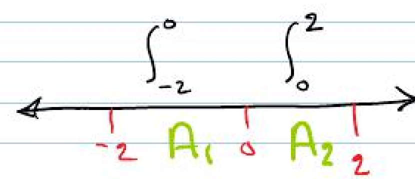
① ايجاد نقاط التجزئة :

let: $f(x) = x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \in [-2,2]$

$x = 0 \in [-2,2]$



$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big]_{-2}^{0}$$

$$= (0 - (4 - 8)) = \boxed{4}$$

$$A_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big]_0^2$$

$$= (4-8) - (0) = \boxed{-4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$= |4| + |-4| = 8 \text{ unit}^2$$

مثال// جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة ($y = x^2$) ومحور السينات والمستقيمات ($x=1$ & $x=3$)

حدود التكامل

$$A = \int_1^3 x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big]_1^3 \Rightarrow \frac{1}{3}(27-1) = \boxed{\frac{26}{3} \text{ unit}^2}$$

مثال // جد المساحة المحددة بمنحني الدالة ($f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$) ومحور السينات .

let $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

$$x = 0$$

$[0,1] , [1,2]$:الفترات ∴

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big]_0^1 \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big]_1^2 \Rightarrow \left[(4 \cancel{- 8 + 4}^{\,0}) - \left(\frac{1}{4} \cancel{-1} \cancel{+1}\right)\right] = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \boxed{\frac{1}{2} \text{ unit}^2}$$

مثال // جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $\left(f(x) = x^2 - 1 \right)$ ومحور السينات

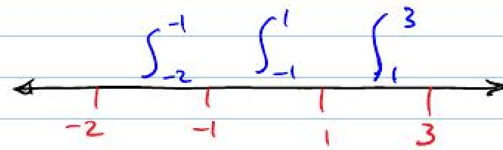
وعلى الفترة $[-2,3]$

let $f(x) = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 1 \in [-2,3]$$

$\therefore$ الفترات : $[-2,-1], [-1,1], [1,3]$



$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x \Big]_{-2}^{-1} \Rightarrow \left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-8}{3} + 2\right) =$$

$$= \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} + 1 - 2 = \frac{7}{3} - 1 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x \Big]_{-1}^{1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 - 1$$

$$= \frac{2}{3} - 2 = \boxed{\frac{-4}{3}}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x \Big]_{1}^{3} \Rightarrow (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 7 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{21}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

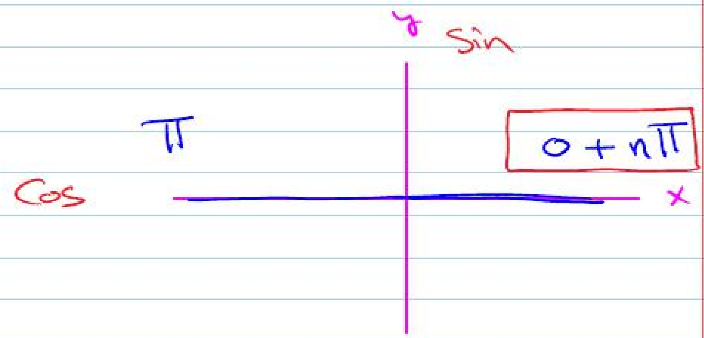
$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$= \left|\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{-4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{28}{3} = \boxed{9\frac{1}{3} \text{ unit}^2}$$

مثال // جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $(y = \sin x)$ ومحور السينات

وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$

let $y = 0 \Rightarrow \sin x = 0$



$\sin(0 + n\pi) = 0$

$x = 0 + n\pi$

2   1   0   -1   -2

$@ n = -2 \rightarrow x = -2\pi \notin [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

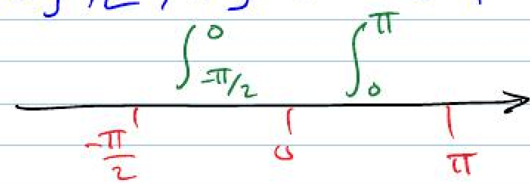
$@ n = -1 \rightarrow x = -\pi \notin [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

$@ n = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ ✓

$@ n = 1 \rightarrow x = \pi \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ ✗

$@ n = 2 \rightarrow x = 2\pi \notin [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\therefore$ الفترات : $[-\frac{\pi}{2}, 0], [0, \pi]$



$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx$$

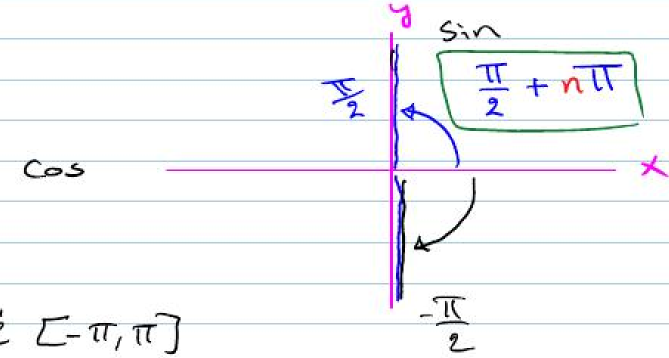
$$= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -(1) + (0) = -1$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = -(-1) + (1) = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |-1| + |2| = \boxed{3 \text{ unit}^2}$$

مثال // جد المساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $(y = \cos x)$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$



let $y = 0 \longrightarrow \cos x = 0$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$n = -2, -1, 0, 1, 2$

@ $n = -2 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

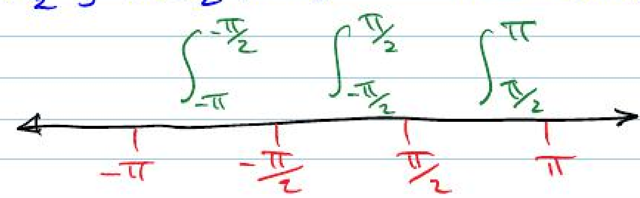
@ $n = -1 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ ✓

@ $n = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ ✓

@ $n = 1 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

@ $n = 2 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5}{2}\pi \notin [-\pi, \pi]$

$\therefore$ الفترات : $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \, dx$$

$$= \sin x \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} \Rightarrow (-1 - 0) = -1$$

$$A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$= \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \Rightarrow (1 - (-1)) = 2$$

$$A_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$$

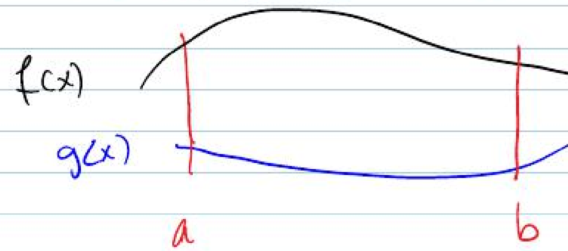
$$= \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \Rightarrow (0 - (1)) = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = \boxed{4 \text{ unit}^2}$$

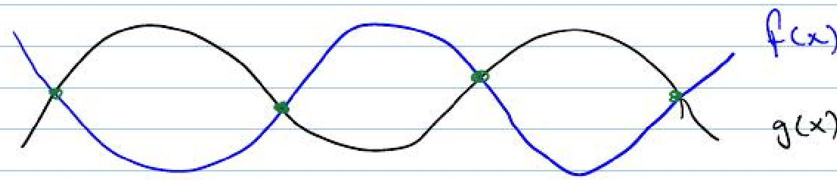
المساحة بين منحنيين

① عدم وجود تقاطع بين الدالتين :

$$\boxed{A = \left| \int_a^b f(x) - g(x) \right|}$$



② في حالة وجود تقاطع بين الدالتين



① إيجاد نقاط التقاطع بين الدالتين $\quad f(x) = g(x)$

② تجزئ التكامل

③ المساحة الكلية $\quad A = |A_1| + |A_2| \ldots$

مثال // جد المساحة للمنطقة المحددة بالمنحنى $(y = \sqrt{x})$ والمستقيم $(y = x)$

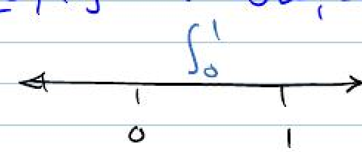
let: $\quad x = \sqrt{x} \longrightarrow x^2 - x = 0$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 0$$

∴ الفترة : $[0,1]$



$$A = \int_0^1 (x - \sqrt{x})\, dx$$

$$= \int_0^1 x - (x)^{\frac{1}{2}} \quad dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big]_0^1 = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \Big]_0^1$$

$$\left(\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}\right) \quad . \quad 3-4 \quad -1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-4}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$\therefore A = \left|\frac{-1}{6}\right| = \boxed{\frac{1}{6} \text{ unit}^2}$$

مثال // جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني ($y = x^3$) والمستقيم ($y = x$)

let: $x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

$$\underbrace{x(x^2-1)}=0$$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$x = 0$

∴ الفترات : $[-1,0]\ ,\ [0,1]$

$\int_{-1}^{0}$ $\int_{0}^{1}$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} \Rightarrow \left(0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{1} \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0\right) = \frac{-1}{4}$$

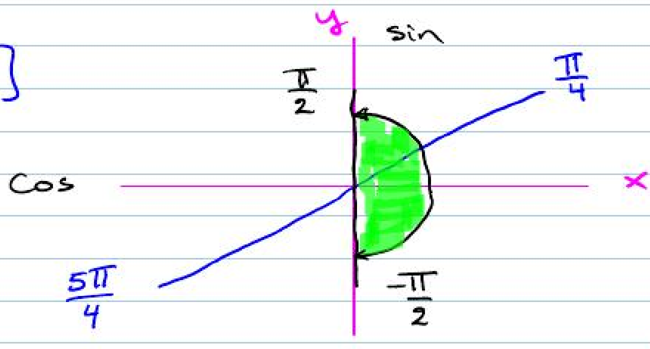
$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \boxed{\frac{1}{2}\ \text{unit}^2}$$

مثال // جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $\left(f(x) = \cos x \right)$ و $\left(g(x) = \sin x \right)$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

let $\sin x = \cos x$

either $\boxed{x = \frac{\pi}{4}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

or $x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$



$\therefore$ الفترات : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore A_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \sin x - (-\cos x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/4}$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/4} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (-1 + 0)$$

$$= \sqrt{2} + 1$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \Rightarrow \left((1+0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

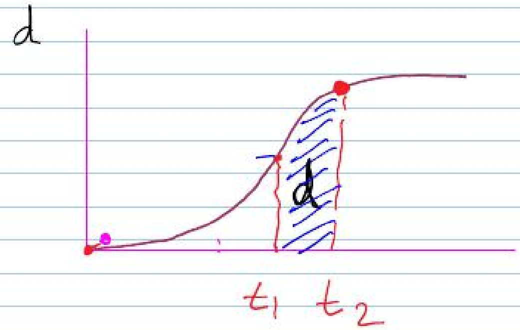
$$= 1 - \sqrt{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}|$$

$$= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = \boxed{2\sqrt{2} \ \text{unit}^2}$$

المسافة

السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$



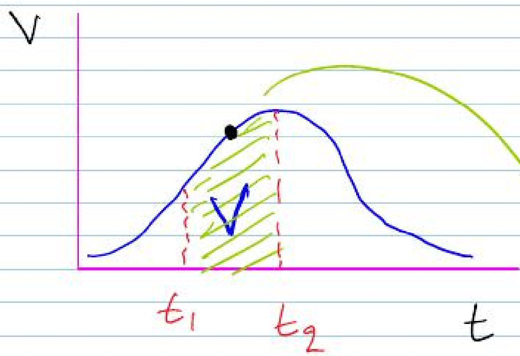
$$\boxed{V = \frac{\Delta d}{\Delta t}} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \text{slop}$$

$$= \boxed{5}$$

المشتقة المسافة

$$V = \frac{dd}{dt} \Rightarrow V = \dot{d}(t)$$

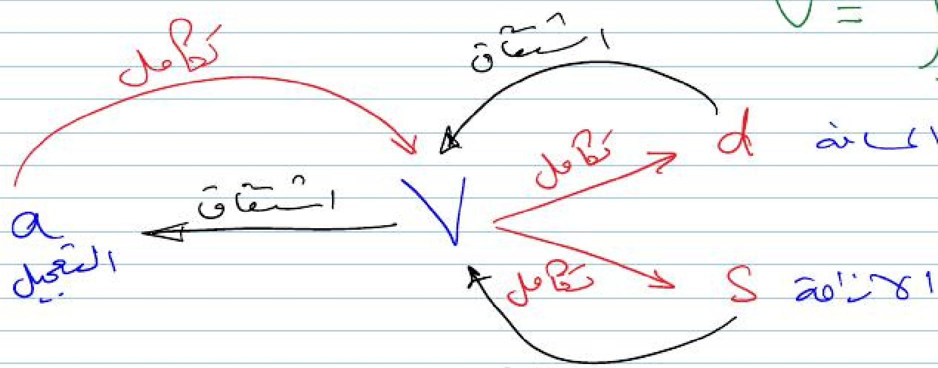
$$\boxed{d = \int_{t_1}^{t_2} V \, dt}$$



$$\boxed{a = \cancel{\frac{\Delta V}{\Delta t}}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \dot{V}(t)$$

$$V = \int_{t_1}^{t_2} a \, dt$$



بعض المصطلحات :

t : الزمن

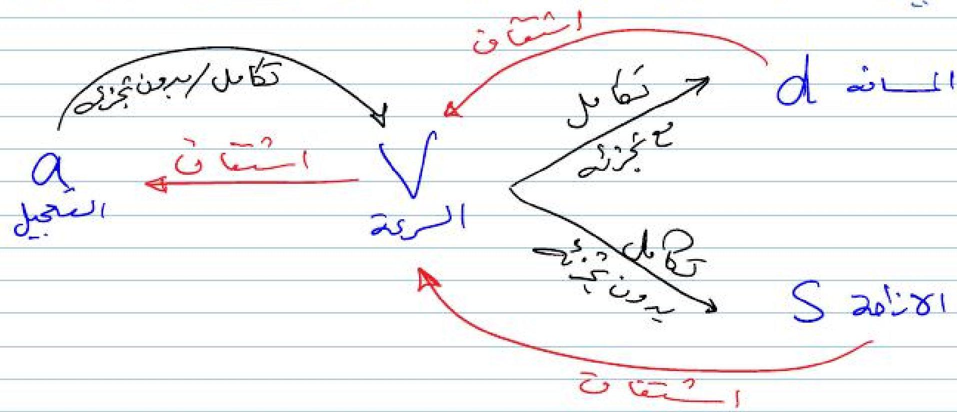
$d(t)$: المسافة خلال زمن معين (كمية غير متجهة) ← نجزئ التكامل

$S(t)$: الازاحة " " " " (كمية متجهة) ← لا نجزئ التكامل

$V(t)$: السرعة " " " " " " ← " " "

$a(t)$: التعجيل " " " " " " ← " " "

لا نصفر الدالة ونستخرج قيم (t)



مثال // جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4$ m/s

جد : (a) المسافة المقطوعة خلال الفترة $[1,3]$.

(b) الازاحة " " " " .

(c) المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة .

(d) بعد الجسم بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة .

(a)

$$d = \int_1^3 V(t) = \int_1^3 (2t-4)\, dt$$

$$@\ V(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,3]$$

$\int_1^2 \quad \int_2^3$ (على خط الأعداد: 1 ، 2 ، 3)

$$d_1 = \int_1^2 (2t-4)\, dt = t^2 - 4t \Big]_1^2$$

$$= (4-8) - (1-4) = -1$$

$$d_2 = \int_2^3 (2t-4)\, dt = t^2 - 4t \Big]_2^3$$

$$= (9-12) - (4-8) = 1$$

$= (9-12) - (4-8) = 1$

$\therefore d = |d_1| + |d_2| = |-1| + |1| = \boxed{2\ m}$

(b) $S = \int_1^3 V(t) = \int_1^3 (2t-4)\,dt$

$= t^2 - 4t \Big]_1^3 = (9-12) - (1-4) = \boxed{0}$

(c)

* خلال الثانية الخامسة هذا يعني أن الفترة $[4,5]$

$d = \int_4^5 V(t) = \int_4^5 (2t-4)\,dt$

$= t^2 - 4t \Big]_4^5 = (25-20) - (16-16)$

$= \boxed{5\ m}$

(d)

* بعد الجسم = الازاحة
* بعد مضي (4) ثواني هذا يعني أن الفترة $[0,4]$

$S = \int_0^4 V(t) = \int_0^4 (2t-4)\,dt$

$= t^2 - 4t \Big]_0^4 = (16-16) - (0-0)$

$= \boxed{0}$

مثال// جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\ m/s^2$ فإذا كانت سرعته قد أصبحت $(82)\ m/s$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد:

ⓐ المسافة خلال الثانية الثالثة.

ⓑ بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (3) ثواني.

ⓐ $\because V = \int a(t) \Rightarrow V = \int 18 = 18t + c$

$\because V = 18t + c \Rightarrow 82 = 18(4) + c \quad \therefore \boxed{c = 10}$

$\therefore V = 18t + 10$

$\therefore d = \int_2^3 v(t) = \int_2^3 18t + 10 = 9t^2 + 10t \Big|_2^3$

$(81 + 30) - (36 + 20) = \boxed{55\ m}$

ⓑ

* بعد الجسم = الازاحة

* بعد مرور (3) ثواني يعني أن الفترة $[0,3]$

$S = \int_0^3 v(t) = \int_0^3 18t + 10 = 9t^2 + 10t \Big|_0^3$

$= (81 + 30) - (0 + 0) = \boxed{111\ m}$

تمارين (6-4)

س٣// جد المساحة المحددة بالمنحني $(y = x^4 - x)$ ومحور السينات والمستقيمين $(x=1 \ \& \ x=-1)$

خطوات الحل:

1. $f(x) = 0$
2. x
3. المستقيمات = الفترة $[\ ]$
4. نختبر قيم x مع الفترة

5. $x \in [\ ]$
6. نجزئ التكامل

5. $x \notin [\ ]$
6. $A = \int f(x)$

7. $A = |A_1| + |A_2| + \cdots$

$\because$ المستقيمان يشكلان الفترة $= [1, -1]$

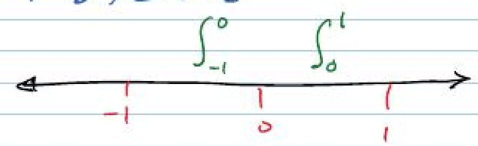
$$@\ y = 0 \Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 0 \in [1, -1]$$

$$\therefore \sigma : [-1, 0], [0, 1]$$



$$\therefore A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} = (0 - 0) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2+5}{10} = \boxed{\frac{7}{10}}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2-5}{10} = \boxed{\frac{-3}{10}}$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{7}{10}\right| + \left|\frac{-3}{10}\right| = \boxed{1} \text{ unit}^2$$

س١ // جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحور السينات

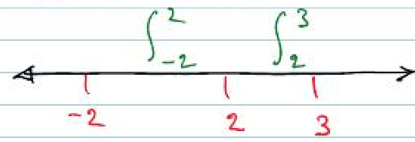
@ $f(x)=0 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0$

$$\underbrace{(x^2-4)}\underbrace{(x^2+1)}=0$$

$x^2=-1$ مرفوض

$x^2=4 \Rightarrow x=-2 \in [-2,3]$

$x=2 \in [-2,3]$



∴ ف: $[-2,2]$, $[2,3]$

∴ $A_1=\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)\,dx$

$$= \frac{x^5}{5}-x^3-4x\Big]_{-2}^{2} \Rightarrow \left(\frac{32}{5}-8-8\right)-\left(\frac{-32}{5}+8+8\right)$$

$$= \frac{32}{5}+\frac{32}{5}-16-16=\frac{64}{5}-32$$

$$= \frac{64}{5}-\frac{160}{5}=\frac{-96}{5}$$

$A_2=\int_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)\,dx$

$$= \frac{x^5}{5}-x^3-4x\Big]_{2}^{3} \Rightarrow \left(\frac{243}{5}-27-12\right)-\left(\frac{32}{5}-8-8\right)$$

$$= \frac{243}{5}-\frac{32}{5}-39+16$$

$$= \frac{211}{5}-23=\frac{211-115}{5}=\frac{96}{5}$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{-96}{5}\right|+\left|\frac{96}{5}\right|=\boxed{\frac{192}{5}\ unit^2}$$

س ١١/ جد المساحة المحددة بالمنحني ($f(x) = x^4 - x^2$) ومحور السينات

الحل/

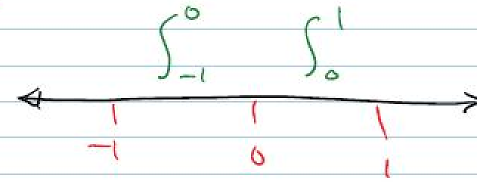
$$@\ f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$

$$\underbrace{x^2}\,\underbrace{(x^2-1)} = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 0$$

$$\therefore \sigma : [-1, 0], [0, 1]$$



$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{0} \Rightarrow (0-0) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right) =$$

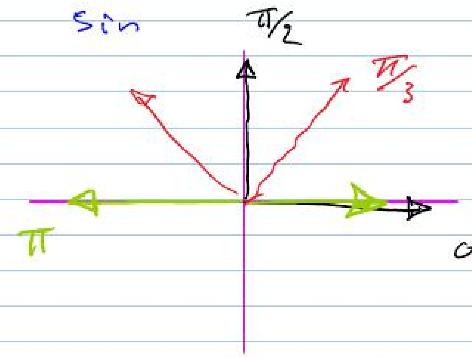
$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15} = \boxed{\frac{-2}{15}}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \Big]_{0}^{1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) - (0-0) = \frac{3-5}{15} = \boxed{\frac{-2}{15}}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \boxed{\frac{4}{15}\ \text{unit}^2}$$

س11 // جد المساحة المحددة بالمنحنى $y = \sin 3x$ ومحور السينات على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

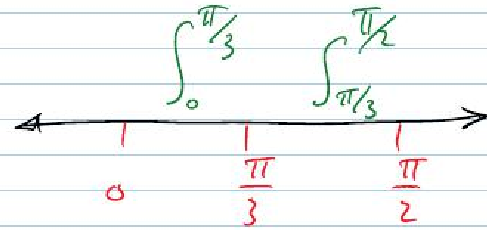


@ $y = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0$

when $3x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \pi/2\right]$

$\therefore$ ف: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$\therefore A_1 = \int_0^{\pi/3} \sin 3x \, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{-1}{3}\left(\cos \pi - \cos 0\right) = \frac{-1}{3}(-1-1)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin 3x \, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \cos 3x \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{-1}{3}\left(\cos \frac{3\pi}{2} - \cos \pi\right)$$

$$= \frac{-1}{3}(0+1) = \frac{-1}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \boxed{1 \text{ unit}^2}$$

www.droos.org شاهد الفيديو لحل السؤال من خلال زيارة الموقع

س// جد المساحة المحددة بالمنحني $(y = 2\cos^2 x - 1)$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$@\ y = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \therefore \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

للحفظ

$\boxed{2\cos^2 x - 1 = \cos 2x}$

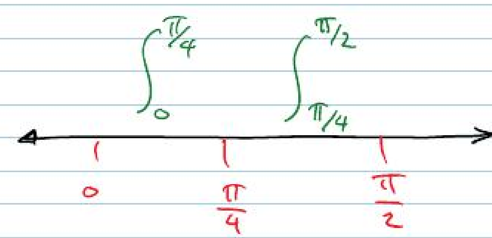
طريقة اخرى

$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

$@\ y = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\longrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$\therefore$ ف : $[0, \frac{\pi}{4}], [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$



$\therefore A_1 = \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot 2 \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$

$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \cdot 2 \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2}$

$\therefore A = |A_1| + |A_2| = |\frac{1}{2}| + |-\frac{1}{2}| = \boxed{1 \text{ unit}^2}$

www.droos.org

شاهد فيديو حل السؤال من خلال زيارة الموقع

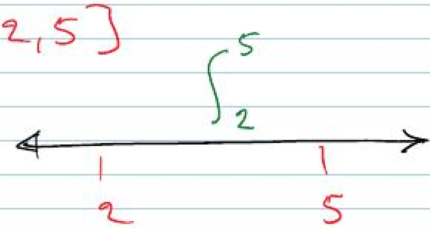
١٤٣ // جد المساحة المحددة بالدالتين $\left(y=\sqrt{x-1}\right)$ & $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$ وعلى الفترة $[2,5]$

let $\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{x^2}{4}=x-1 \Rightarrow x^2=4x-4$

$\therefore x^2-4x+4=0$

$(x-2)(x-2)=0$

$\longrightarrow x=2 \in [2,5]$



$\therefore \sigma: [2,5]$

$$\therefore A=\left|\int_2^5 \frac{x}{2}-(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx\right|$$

$$=\left|\frac{x^2}{4}-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_2^5\right|$$

$$=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{2}{3}\left(4\right)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\right)\right|=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{17}{3}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{75-68}{12}\right|=\boxed{\frac{7}{12}\ unit^2}$$

س١١// جد المساحة المحددة بالدالتين $(y = x^2)$ & $(y = x^4 - 12)$

let $x^2 = x^4 - 12$

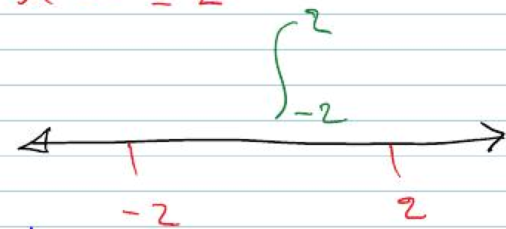
$\therefore \quad x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

$\longrightarrow x^2 = -3 \notin R$ يهمل

$\longrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore \sigma : [-2, 2]$



$$\therefore A = \left| \int_{-2}^{2} x^2 - (x^4 - 12) \, dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 12x \Big]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} - \frac{32}{5} + 24\right) - \left(\frac{-8}{3} + \frac{32}{5} - 24\right) \right|$$

$$= \left| \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + 24 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + 24 \right|$$

$$= \left| \frac{16}{3} - \frac{64}{5} + 48 \right|$$

$$= \left| \frac{80 - 192}{15} + 48 \right| = \left| \frac{-112}{15} + 48 \right|$$

$$= \left| \frac{\quad}{15} + 48 \right| = \left| \frac{\quad}{15} + 48 \right|$$

$$= \left| \frac{-112 + 720}{15} \right|$$

$$= \boxed{\frac{608}{15} \text{ unit}^2}$$

www.droos.org شاهد الفيديو لحل السؤال من خلال زيارة الموقع

س١١// جد المساحة المحددة بالدالتين $(f(x) = \sin x)$ & $(g(x) = \sin x \cos x)$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

let $g(x) = f(x)$

$$\sin x \cdot \cos x = \sin x$$

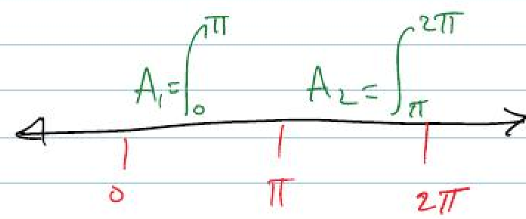
$$\therefore \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(\cos x - 1) = 0$$

$\cos x = 1 \rightarrow x = 0$, $x = 2\pi$

$\sin x = 0 \rightarrow x = 0$, $\boxed{x = \pi} \in [0, 2\pi]$, $x = 2\pi$

$\therefore$ ف: $[0, \pi], [\pi, 2\pi]$



$$\therefore A_1 = \int_0^{\pi} (\sin x \cdot \cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x(\cos x - 1)\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} -\sin x(\cos x - 1)\, dx$$

$$= -\left.\frac{(\cos x - 1)^2}{2}\right]_0^{\pi} \Rightarrow \frac{-1}{2}\left((\cos \pi - 1)^2 - (\cos 0 - 1)^2\right)$$

$$= \frac{-1}{2}(4) = -2$$

$$A_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} -\sin x(\cos x - 1)\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}(\cos x - 1)^2 \Big]_{\pi}^{2\pi} \Rightarrow \frac{-1}{2}\left((\cos 2\pi - 1)^2 - (\cos \pi - 1)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - 4) = 2$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = |-2| + |2| = \boxed{4 \text{ unit}^2}$$

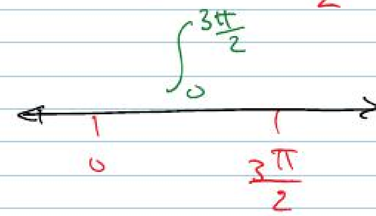
س1// جد المساحة المحددة بالدالتين $(y = 2\sin x + 1)$ و $(y = \sin x)$ حيث $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

let $2\sin x + 1 = \sin x$

$\therefore \cancel{2}\sin x + 1 - \sin x = 0$

$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \sigma : [0, \frac{3\pi}{2}]$



$\therefore A = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (2\sin x + 1 - \sin x)\, dx$

$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)\, dx$

$= -\cos x + x \Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \left(\cancel{-\cos\frac{3\pi}{2}}^{0} + \frac{3\pi}{2}\right) - \left(\cancel{-\cos 0}^{-1} + 0\right)$

$= \boxed{\frac{3\pi}{2} + 1 \quad \text{unit}^2}$

www.droos.org شاهد الفيديو لكل السؤال من خلال زيارة الموقع

س // جد المساحة المحددة بالدالة ($y = x^3 + 4x^2 + 3x$) ومحور السينات.

let $y = 0 \Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$$\underbrace{x}\underbrace{(x^2 + 4x + 3)} = 0$$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

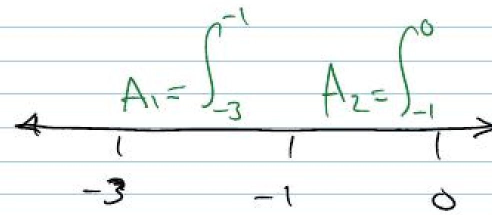
$$\underbrace{(x+3)}\underbrace{(x+1)} = 0$$

$x = -1$

$x = -3$

$x = 0$

$$\sigma = [-3, -1], [-1, 0]$$



$$\therefore A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_{-3}^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{4 \times \cancel{27}^{\,9}}{\cancel{3}_{\,1}} + \frac{3 \times 9}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{12} - \frac{16}{12} + \frac{18}{12}\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{12}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{144}{4} + \frac{54}{4}\right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{20 + 108}{48} = \frac{\cancel{128}^{\,8}}{\cancel{48}_{\,3}}$$

$$= \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0} \Rightarrow (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{5}{12}}$$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2|$$

$$= \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \boxed{\frac{37}{12}} \text{ unit}^2$$

www.droos.org شاهد الفيديو لكل السؤال من خلال زيارة الموقع

س // جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)$ m/sec إحسب:

ⓐ المسافة المقطوعة في الفترة [2,4]

ⓑ الازاحة في الفترة [0,5]

الازاحة (S) و المسافة (d)

تجزئة

السرعة (V)

اشتقاق

تكامل

التعجيل (a)

ⓐ $d = \int_2^4 v(t)$

let $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0 \quad \div 3$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)(t-1) = 0$

$\longrightarrow t = 1 \notin [2,4]$

$\therefore$ لا نحتاج الى تجزئة التكامل

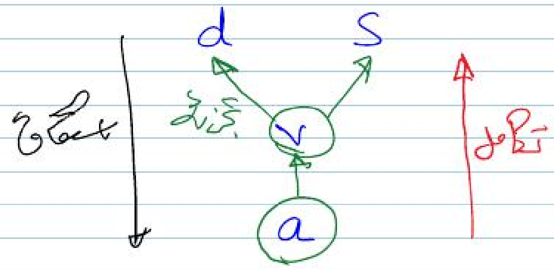
$\therefore d = \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\,dt \Rightarrow t^3 - 3t^2 + 3t \Big|_2^4$

$(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6) = 28 - 2 = \boxed{26\ m}$

ⓑ $S = \int_0^5 v(t) = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\,dt = t^3 - 3t^2 + 3t \Big|_0^5$

$(125 - 75 + 15) - (0) = \boxed{65\ m}$

س١/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/sec^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $(90)\ m/sec$ جد :-



ⓐ السرعة عندما $t = 2$
ⓑ المسافة خلال الفترة $[1,2]$
ⓒ الازاحة بعد (10 sec) من بدء الحركة ١

ⓐ

$$v = \int a(t)$$

$$v = \int 4t + 12 = 2t^2 + 12t + C$$

$$\therefore V(t) = 2t^2 + 12t + C$$

$$\because V(4) = 90 \Rightarrow 2(4)^2 + 12(4) + C = 90 \quad \therefore C = 10$$

$$\therefore \boxed{V(t) = 2t^2 + 12t + 10}$$

$$V(2) = 2(2)^2 + 12(2) + 10 = 42 \quad m/sec$$

ⓑ

$$\text{let } v(t) = 0 \Rightarrow 2t^2 + 12t + 10 = 0 \quad \div 2$$

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

$$(t + 5)(t + 1) = 0$$

$t = -1$ مر.
$t = -5$ مر.

$$\therefore d = \int_1^2 v(t) = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)\, dt$$

$$\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t \Big|_1^2 \Rightarrow \left(\frac{16}{3} + 24 + 20\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right)$$

$$= \frac{14}{3} + 28 = \frac{14}{3} + \frac{84}{3} = \boxed{\frac{98}{3} \ m}$$

ⓒ

$$S = \int_0^{10} v(t) = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)\, dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t \Big|_0^{10} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}1000 + 600 + 100\right) - (0)$$

$$\frac{2000}{3} + \frac{2100}{3} = \boxed{\frac{4100}{3} \ m}$$

س / تتحرك نقطة من السكون وبعد (t ثانية) من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ m/sec أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة إلى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عندها.

اشتقاق ↓ d , s → v → a ↑ تكامل

ⓐ $S = \int v(t)\, dt = \int 100t - 6t^2 = 50t^2 - 2t^3 + C$

$\therefore S = 50t^2 - 2t^3 + C$

عند السكون فإن $s = 0$ & $t = 0$

$0 = 50(0)^2 - 2(0)^3 + C \Rightarrow C = 0$

$\therefore \boxed{S(t) = 50t^2 - 2t^3}$

∵ عند عودة النقطة إلى موضعها الأصلي فإن $s = 0$ & $t = ?$

$50t^2 - 2t^3 = 0$

$2t^2(25 - t) = 0$

$\rightarrow \boxed{t = 25 \text{ sec}}$

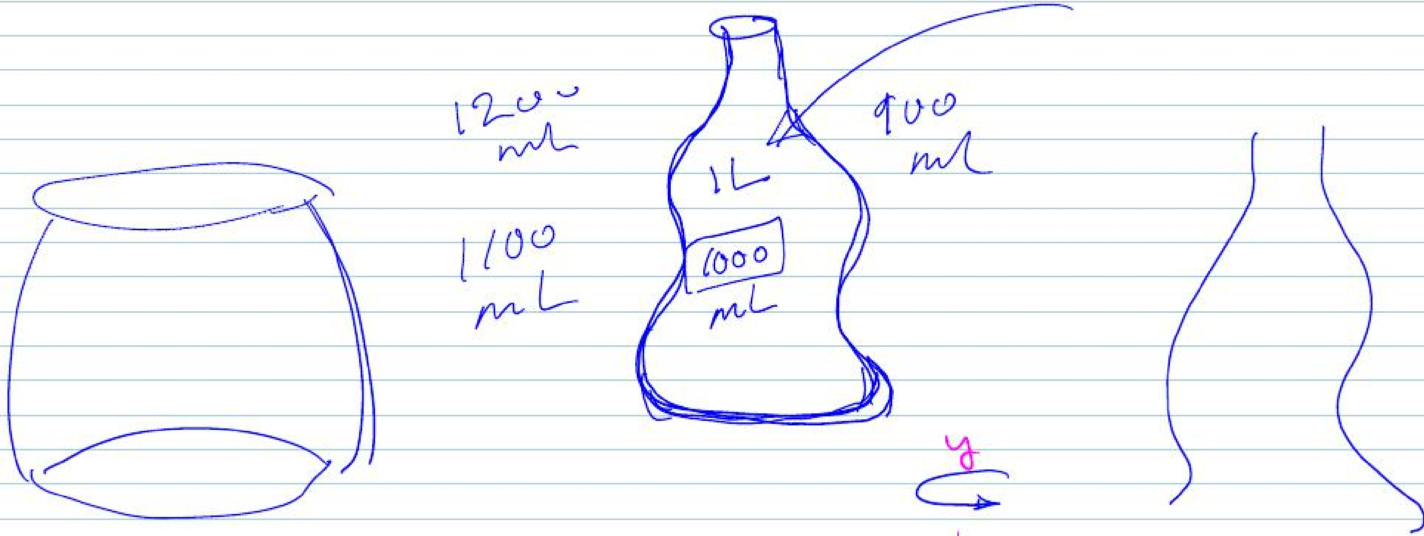
$\rightarrow t = 0$ يهمل

ⓑ $a(t) = v'$

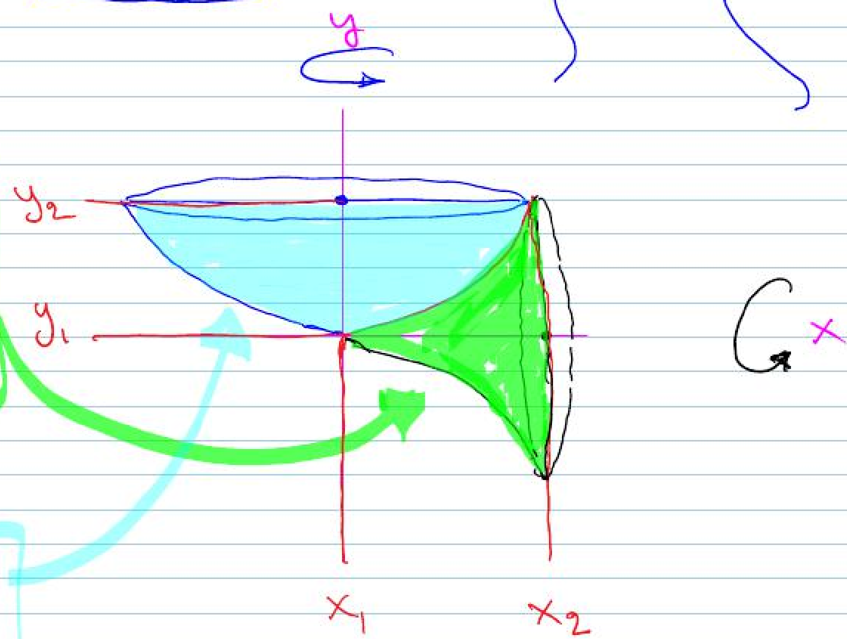
$= 100 - 6t$

$a(25) = 100 - 6(25) = 100 - 300 = \boxed{-200 \ m/sec^2}$

الحجوم الدورانية



$$V=\pi\int_{a\,(x_1)}^{b\,(x_2)} y^2\,dx$$



$$V=\pi\int_{a\,(y_1)}^{b\,(y_2)} x^2\,dy$$

مثال// المنطقة المحددة بين المنحني $(0\le x\le 4)$ $(y=\sqrt{x})$ ومحور السينات.
دارت حول محور السينات، جد حجمها.

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

$\because \; y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$

$\therefore \; V = \pi \int_0^4 x \, d \Rightarrow V = \pi \frac{1}{2} x^2 \Big]_0^4$

$\therefore \; V = \frac{1}{2}\pi \left(16 - 0\right) = \boxed{8\pi \text{ unit}^3}$

مثال // المنطقة المحددة بالمنحني $(1 \leq y \leq 4)$ $\left(x = \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$\because \; x = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y}$

$\therefore \; V = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} \, dy \Rightarrow V = \pi \; \ln y \Big]_1^4$

$\therefore \; V = \pi \left(\ln 4 - \cancel{\ln 1}^{\,0}\right) = \pi \ln 4 = \pi \ln 2^2 = \boxed{2\pi \ln 2 \text{ unit}^3}$

www.droos.org شاهد الفيديو لحل السؤال من خلال زيارة الموقع

مثال // أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$
والمستقيمين $x=0$ ، $x=2$ حول المحور السيني .

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 8x \, d \Rightarrow V = \pi 4x^2 \Big]_0^2$$

$$V = \pi 4 (4-0) = \boxed{16\pi \text{ unit}^3}$$

مثال // أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$
والمستقيم $x=5$ ، $x=0$ حول المحور السيني

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

$$\because y = 2x^2 \Rightarrow y^2 = 4x^4$$

$$\therefore V = \pi \int_0^5 4x^4 \, dx \Rightarrow V = \pi \frac{4}{5} x^5 \Big|_0^5$$

$$\therefore V = \frac{4\pi}{\cancel{5}_{1}} (\cancel{3125}^{625} - 0) = \boxed{2500\pi \text{ unit}^3}$$

مثال // أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين
$y=16$ ، $y=0$ حول محور الصادي .

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$$x^2 = \frac{y}{4}$$

$$\therefore V = \pi \int_0^{16} \left(\frac{y}{4}\right) dy \Rightarrow V = \frac{\pi}{8} y^2 \Big|_0^{16}$$

$$\therefore V = \pi \int_0 \left(\frac{y}{4}\right) dy \Rightarrow V = \frac{\pi}{8}\, y \Big|_0$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{\cancel{8}_{\,1}} \left(\cancel{256}^{\,32} - 0\right) = \boxed{32\pi \text{ unit}^3}$$

مثال // أوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ دورة كاملة حول محور الصادي .

$$V = \pi \int_{a\,(y_1)}^{b\,(y_2)} x^2 \, dy$$

$$\because y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{1}{y^2}}$$

@ $x = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

@ $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{1/2} = \boxed{2}$

$$\therefore V = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy \Rightarrow V = \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy$$

$$= \pi \frac{y^{-1}}{-1} \Big|_1^2 \Rightarrow \pi \frac{-1}{y} \Big|_1^2 = \pi\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = \boxed{\frac{\pi}{2} \text{ unit}^3}$$

شاهد الفيديو لحل السؤال من خلال زيارة الموقع www.droos.org

س// أوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ ($y=x^2$) والمستقيمين $x=2$, $x=1$ حول المحور السيني.

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_1^2 x^4 \, dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2 \Rightarrow \frac{\pi}{5}(32-1) = \frac{31\pi}{5} \text{ unit}^3$$

س// أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة بين منحني الدالة ($y=x^2+1$) والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي.

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$$\because y = x^2+1 \Rightarrow \boxed{x^2 = y-1}$$

$$@\ x=0 \Rightarrow y=(0)^2+1 = 1 \qquad \therefore y=1 \ \& \ y=4$$

$$\therefore V = \pi \int_1^4 (y-1)\, dy = \pi \left. \frac{(y-1)^2}{2} \right|_1^4$$

$$\therefore \frac{\pi}{2}(9-0) = \frac{9\pi}{2} \text{ unit}^3$$

س// أوجد الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني ($y^2+x=1$) والمستقيم $x=0$ حول المحور الصادي.

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$V = \pi \int_a x \, dy$

$\because \; y^2 + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = (1-y^2)^2}$

@ $x=0$: $y^2 + (0) = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^{1} (1-y^2)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2y^2 + y^4) \, dy$$

$$= \pi \left[\left(y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 \right) \right] \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \right]$$

$$= \pi \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \pi \left(\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15} \right)$$

$$= \frac{16\pi}{15} \text{ unit}^3$$

س٢٤ // احسب الحجم المتولد من دوران المساحة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 2$ ، $x = 0$ حول المحور السيني.

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{\pi}{4} \left(x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{\pi}{4}(16 - 0) = 4\pi \text{ unit}^3$$

شلون الحل يصير إذا صارت المستقيمات $x = 2$ ، $x = -2$