LECŢIA 4

Interpolarea funcţiilor folosind funcţiile spline

1. $\boxed{\text{Definiţia funcţiilor spline}}$

Fie $I = [a, b]$ un interval al axei reale şi Δ o diviziune a acestui interval

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

$\boxed{\textbf{Definiţie.}}$ Numim funcţie spline de ordinul m, $m \in \mathbb{N}$ relativă la diviziunea Δ o funcţie $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că restricţia ei la oricare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n}$ este un polinom de grad cel mult m.

Observaţie. După definiţia de mai sus orice polinom de grad cel mult m este un spline de ordinul m.

Exemplu. Splinul de ordinul întâi relativ la diviziunea Δ este orice funcţie continuă care are graficul o linie poligonală având vârfurile în punctele de abscisă x_i, $i = \overline{0, n}$. Noţiunea de funcţie spline a fost introdusă în matematică de J.J. Schoenberg, matematician născut în România la Galaţi.

Marele matematician român Tiberiu Popoviciu, fondatorul şcolii de analiză numerică clujene a utilizat funcţiile spline înaintea lui I.J. Schoenberg sub denumirea de funcţii segmentar polinomiale.

2. Interpolarea prin funcţii spline de ordinul întâi

Fără a restrânge din generalitate vom considera în cele ce urmează

$$I = [0, 1].$$

a) **Punerea problemei**

Fie $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ şi f o funcţie definită pe $[0, 1]$ pentru care se cunosc valorile în punctele x_i, $f(x_i)$. Se cere să se găsească o funcţie spline de ordinul întâi care interpolează funcţia f în punctele x_i. Vom nota această funcţie prin $s_{\Delta_n}(f)$.

Este uşor de arătat (cum?) că există o funcţie unică $s_\Delta(f)$ care interpolează funcţia f în punctele x_i adică

$$s_{\Delta_n}(f)(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}. \tag{1}$$

3. $\boxed{\textbf{Expresia lui } s_{\Delta_n}(f)}$

Folosind ideea de la expresia polinomului de interpolare al lui Lagrange vom căuta $s_\Delta(f)$ sub forma:

$$\boxed{s_{\Delta_n}(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)} \tag{2}$$

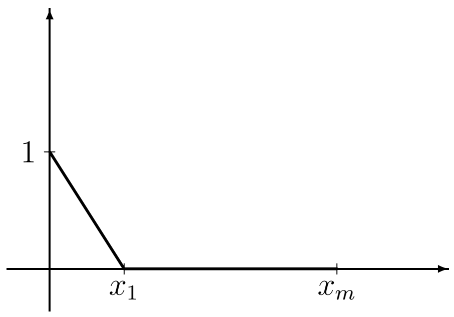
unde l_i sunt funcţii spline de ordinul întâi care verifică condiţiile

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k} \tag{3}$$

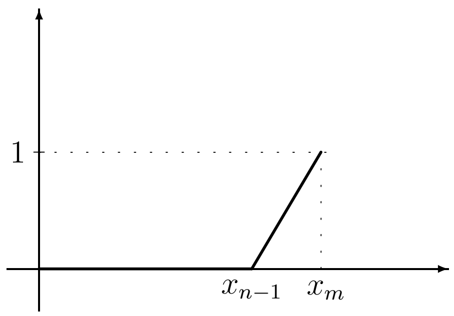
Este clar că, dacă l_i verifică condiţiile (3) atunci $s_\Delta(f)$ dat de (2) interpolează funcţia f în punctele x_i, $i = \overline{0, n}$.

Să observăm că

$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1}, & x \in [0, x_1] \\ 0, & x \in (x_1, x_n] \end{cases}$$

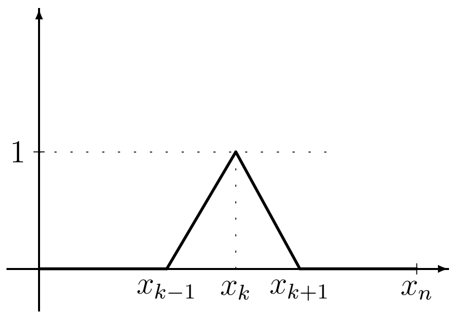


$$l_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{n-1}] \\ \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in (x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$



iar pentru $1 \leq k \leq n-1$ avem

$$l_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{k-1}) \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0, & x \in (x_{k+1}, x_n] \end{cases}$$



4. Restul în formula de interpolare prin funcţii spline de ordinul întâi

Să notăm prin $R_n(f)$ funcţionala liniară rest definită prin:

$$R_n(f) = f - s_{\Delta_n}(f).$$

Ne interesează o evaluare pentru $R_n(f)(x)$, $x \in [0,1]$. Dacă $x \in \{x_i\}_{i=\overline{0,n}}$ atunci $R_n(f)(x_i) = 0$.

Fie $x \in [0,1] \setminus \{x_i\}_{i=\overline{0,n}}$. În aceste condiţii există $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ astfel încât să avem:

$$x \in (x_i, x_{i+1}).$$

Cum pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s_{\Delta_n}(f)$ este un polinom de gradul întâi care interpolează funcţia f în punctele x_i, rezultă că $s_{\Delta_n}(f)$ coincide pe acest interval cu $L_1(f; x_i, x_{i+1})$. Din această observaţie avem:

$$R_n(f)(x) = f(x) - L_1(f; x_i, x_{i+1})(x). \tag{4}$$

Ţinând seama de forma restului în interpolarea Lagrange, obţinem:

$$R_n(f)(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})[x_i, x_{i+1}, x; f]. \tag{5}$$

Din (5) rezultă

$$|R_n(f)(x)| \leq \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} |[x_i, x_{i+1}, x; f]|. \tag{6}$$

Din (6) rezultă rezultatul cuprins în următoarea teoremă.

Teoremă. *Fie* $f \in C^2[0,1]$ *şi* $\|\Delta_n\|$ *norma diviziunii* Δ_n. *Atunci*

$$\|f - s_{\Delta_n}(f)\| \leq \frac{\|\Delta_n\|^2}{8} \|f''\|. \tag{7}$$

Relaţia (7) se obţine din (6) folosind formula de medie pentru diferenţe divizate.

Corolar. *Fie* $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de diviziuni al intervalului* $[0,1]$. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ *atunci, pentru orice* $f \in C^2[0,1]$ *avem:*

$$\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = f, \tag{8}$$

convergenţa având loc uniform.

Demonstraţia acestei afirmaţii rezultă direct din (8).

Observaţie. Egalitatea (8) are loc, de fapt, pentru orice funcţie continuă f.

5. Proprietăţi extremale ale funcţiilor spline de ordinul întâi

Fie $\mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ mulţimea tuturor funcţiilor g, continue pe $[0,1]$, a căror restricţii la intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ sunt funcţiile cu derivate continue pe aceste intervale şi care interpolează funcţia f în punctele x_i, $i = \overline{0, n}$. Cu alte cuvinte

$$\mathcal{V}_{\Delta_n}(f) \tag{9}$$

$$= \{g \in C[0,1] \mid g' \in C[x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1},\ g(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}\}.$$

Vom considera de asemenea mulţimea

$$\mathcal{V}^0_{\Delta_n} \tag{10}$$

$$= \{h \in C[0,1] \mid h' \in C[x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1},\ h(x_i) = 0,\ i = \overline{0, n}\}.$$

Fie

$$m = \inf_{v \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)} \int_0^1 v'^2(x)dx. \tag{11}$$

Proprietatea extremală a funcţiilor spline de ordinul întâi este exprimată în următoarea:

Teoremă. *Există o unică funcţie $v_1 \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ cu proprietatea că*

$$m = \int_0^1 v_1'^2(x)dx \tag{12}$$

şi

$$v_1(x) = s_{\Delta_n}(f)(x). \tag{13}$$

Demonstraţia acestei teoreme presupune următorii paşi:

1) Caracterizăm funcţiile v_1 care verifică egalitatea (12).

2) Arătăm unicitatea funcţiei v_1.

3) Arătăm că $s_{\Delta_n}(f)$ verifică condiţiile de la punctul 1).

Lema 1. *Dacă există o funcţie $v_1 \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ care verifică egalitatea (12) atunci, pentru orice $h \in \mathcal{V}^0_{\Delta_n}$ avem:*

$$\int_0^1 v_1'(x)h'(x)dx = 0 \tag{14}$$

şi reciproc: dacă v_1 este o funcţie care verifică (14) pentru orice $h \in \mathcal{V}^0_{\Delta_n}$ atunci v_1 satisface condiţia (12).

Demonstraţie. Fie $v_1 \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ o funcţie care satisface egalitatea (12) şi $h \in \mathcal{V}^0_{\Delta_n}$.

Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem $v_1 + \lambda h \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$. Deoarece v_1 satisface condiţia (12) obţinem inegalitatea:

$$\int_0^1 (v_1'(x) + \lambda h'(x))^2 dx \geq \int_0^1 v_1'^2(x) dx, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Inegalitatea (15) aratăcă funcţia

$$F(\lambda) = \int_0^1 (v_1'(x) + \lambda h'(x))^2 dx$$

are un minim pentru $\lambda = 0$. Din teorema lui Fermat obţinem

$$F'(0) = 0.$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu (14).

Să presupunem că v_1 satisface (14) pentru orice $h \in \mathcal{V}^0_{\Delta_n}$. Vom demonstra următoarea egalitate:

$$\boxed{\int_0^1 [v_1'(x) - v'(x)]^2 dx = \int_0^1 v'^2(x) dx - \int_0^1 v_1'^2(x) dx} \tag{16}$$

În adevăr avem succesiv:

$$\int_0^1 [v_1'(x) - v'(x)]^2 dx = \int_0^1 (v'(x) - v_1'(x))(v'(x) - v_1'(x)) dx \tag{17}$$

$$= \int_0^1 v'(x)(v'(x) - v_1'(x)) dx - \int_0^1 v_1'(x)(v'(x) - v_1'(x)) dx.$$

Deoarece $v, v_1 \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ rezultă că funcţia

$$h = v - v_1 \in \mathcal{V}^0_{\Delta_n} \tag{18}$$

Din (14) şi (18) rezultă că

$$\int_0^1 v_1'(x)(v'(x) - v_1'(x)) dx = 0 \tag{19}$$

Din (17) şi (19) obţinem:

$$\int_0^1 [v_1' - v'(x)]^2 dx = \int_0^1 v'^2(x)dx - \int_0^1 v'(x)v_1'(x)dx \tag{20}$$

Dar

$$\int_0^1 v'(x)v_1'(x)dx = \int_0^1 [(v'(x) - v_1'(x)) + v_1'(x)]v_1'(x)dx \tag{21}$$

$$= \int_0^1 (v' - v_1'(x))v_1'(x)dx + \int_0^1 v_1'^2(x)dx.$$

Făcând din nou apel la (19), din (21) obţinem

$$\int_0^1 v'(x)v_1'(x)dx = \int_0^1 v_1'^2(x)dx. \tag{22}$$

Din relaţiile (22) şi (20) rezultă egalitatea (16).

Deoarece

$$\int_0^1 [v_1'(x) - v'(x)]^2 dx \geq 0,$$

din (16) obţinem

$$\int_0^1 v'^2(x)dx \geq \int_0^1 v_1'^2(x)dx.$$

Ultima egalitate fiind adevărată pentru orice funcţie $v \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ rezultă că v_1 realizează egalitatea (12) şi lema este complet demonstrată.

Lema 2. *Există cel mult un element $v_2 \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ pentru care egalitatea (12) este adevărată.*

Demonstraţie. Fie $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_{\Delta_n}(f)$ cu proprietatea că

$$m = \int_0^1 v_1^2(x)dx = \int_0^1 v_2'^2(x)dx.$$

În aceste condiţii din (16) obţinem:

$$\int_0^1 [v_1'(x) - v_2'(x)]^2 dx = 0$$

sau

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[v_1'(x)-v_2'(x)]^2dx=0. \tag{23}$$

Din (23) rezultă că pentru orice $i=\overline{0,n-1}$ avem:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}[v_1'(x)-v_2'(x)]^2dx \tag{24}$$

Funcţia $v_1'-v_2'$ fiind o funcţie continuă pe $[x_i,x_{i+1}]$ există numerele c_i, $i=\overline{0,n-1}$ astfel ca:

$$v_1(x)-v_2(x)=c_i,\ \forall\ x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=\overline{0,n-1}. \tag{25}$$

Dacă în (25) luăm $x=x_i$ rezultă

$$c_i=0,\quad i=\overline{0,n-1},$$

adică $v_1=v_2$.

Pentru a încheia demonstraţia teoremei vom arăta că $s_{\Delta_n}(f)$ verifică egalitatea (14) pentru orice $h\in\mathcal{V}^0_{\Delta_n}$.

Avem

$$\int_0^1 s'_{\Delta_n}(f)(x)h'(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}s'_{\Delta_n}(x)h'(x)dx. \tag{26}$$

Cum

$$s_{\Delta_n}(f)(x)=L_1(f;x_i,x_{i+1})(x),\ \forall\ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

obţinem

$$s'_{\Delta_n}(f)(x)=[x_i,x_{i+1};f],\ \forall\ x\in[x_i,x_{i+1}]. \tag{27}$$

Din (27) şi (26) rezultă:

$$\int_0^1 s'_{\Delta_n}(f)(x)h'(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}[x_i,x_{i+1};f](h(x_{i+1})-h(x_i)).$$

Corolar.

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{V}_{\Delta_n}(f)} \int_0^1 v'^2(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)([x_i,x_{i+1};f])^2.}$$

Demonstraţie. Din teoremă avem:

$$\inf_{v\in\mathcal{V}_{\Delta_n}(f)} \int_0^1 v'^2(x)dx = \int_0^1 s'^2_{\Delta_n}(f)dx.$$

Pe de altă parte avem:

$$\begin{aligned}\int_0^1 s'^2_{\Delta_n}(f)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} s'^2_{\Delta_n}(f)dx\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)([x_i,x_{i+1};f])^2.\end{aligned}$$

Cu aceasta afirmaţia este probată.

6. Interpolare Hermite prin funcţii spline cubice

Punerea problemei

Fie $f \in C^1[0,1]$. Să presupunem că, cunoaştem valorile funcţiei f şi a funcţiei f' în punctele diviziunii

$$\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1.$$

Vrem să găsim o funcţie spline cubică (spline de ordinul al treilea) de netezime maximă care să interpoleze funcţia f şi derivata f' în punctele diviziunii Δ_n.

Să notăm prin $S_{\Delta_n}(f)$ un astfel de spline cubic. $S_{\Delta_n}(f)$ pe fiecare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ este un polinom de grad cel mult trei. Deducem de aici că numărul coeficienţilor din $S_{\Delta_n}(f)$ este $4n$. Dacă impunem condiţia de continuitate a funcţiei $S_{\Delta_n}(f)$ obţinem $n-1$ condiţii iar din condiţiile de interpolare obţinem încă $2n+2$ condiţii. Mai avem la dispoziţie încă $n-1$ condiţii. Aceste $n-1$ condiţii pot fi impuse ca $S_{\Delta_n}(f)$ să fie de clasă $C^1[0,1]$.

7. Existenţa şi construcţia splinului cubic de interpolare

Teoremă. *Există un unic spline cubic de interpolare Hermite*

$$S_{\Delta_n}(f) \in C^1[0,1].$$

Demonstraţie. Vom căuta splinul cubic de interpolare Hermite sub forma:

$$\boxed{S_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x) + \sum_{i=0}^{n} h_i(x)f'(x_i)} \tag{28}$$

unde l_i şi h_i sunt splinuri cubice de clasă $C^1[0,1]$ care verifică ecuaţiile

$$\begin{cases} l_i(x_k) = \delta_{i,k} \\ l_i'(x_k) = 0, \quad i,k = \overline{0,n} \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} h_i(x_k) = 0 \\ h_i'(x_k) = \delta_{i,k} \end{cases} \tag{30}$$

Să determinăm l_0. Condiţiile impuse asupra lui l_0 sunt

$$\begin{cases} l_0(0) = 1 \\ l_0(x_k) = 0, \quad k = \overline{1,n} \\ l_0'(x_k) = 0, \quad l = \overline{0,n} \end{cases} \tag{31}$$

Din (31) rezultă că l_0 este funcţia nulă pe intervalul $[x_1, x_n]$. Ordonând l_0 după puterile lui $x - x_1$ obţinem

$$l_0(x) = \alpha(x - x_1)^3 + \beta(x - x_1)^2 \tag{32}$$

Din condiţiile

$$\begin{cases} l_0(0) = 1 \\ l_0'(0) = 0 \end{cases}$$

obţinem

$$\begin{cases} -\alpha x_1 + \beta = \dfrac{1}{x_1^2} \\ 3\alpha x_1 - 2\beta = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Din (32) şi (33) obţinem

$$\boxed{l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x_1^3}(x - x_1)^3 + \dfrac{3}{x_1^2}(x - x_1)^2, & x \in [0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_n] \end{cases}}$$

Să determinăm l_n. Condiţiile impuse asupra lui l_n sunt

$$\begin{cases} l_n(1) = 1 \\ l_n(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, n-1} \\ l_n'(x_k) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Din (34) rezultă că $l_n(x) = 0$, pentru $x \in [0, x_{n-1}]$. Pe intervalul $[x_{n-1}, 1]$ îl căutăm pe l_n sub forma

$$l_n(x) = a(x - x_{n-1})^3 + b(x - x_{n-1})^2$$

Din condiţiile (34) obţinem

$$\boxed{l_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{n-1}] \\ \dfrac{-2(x - x_{n-1})^3}{(1 - x_{n-1})^3} + \dfrac{3(x - x_{n-1})^2}{(1 - x_{n-1})^2}, & x \in [x_{n-1}, 1] \end{cases}}$$

Fie $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$. Splinul l_k este funcţia nulă pe mulţimea $[0, x_{k-1}] \cup [x_{k+1}, x_n]$. Fie l_k, pe intervalul $[x_{k-1}, x_k]$ de forma:

$$l_k(x) = a_1(x - x_{k-1})^3 + b_1(x - x_{k-1})^2.$$

Din condiţiile

$$\begin{cases} l_k(x_k) = 1 \\ l'_k(x_k) = 0 \end{cases}$$

obţinem

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{2}{(x_k - x_{k-1})^3} \\ b_1 = \dfrac{3}{(x_k - x_{k-1})^2} \end{cases}$$

Pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$ să-l căutăm pe l_k de forma

$$l_k(x) = a_2(x - x_{k+1})^3 + b_2(x - x_{k+1})^2.$$

Din condiţiile

$$\begin{cases} l_k(x_k) = 1 \\ l'_k(x_k) = 0 \end{cases}$$

obţinem

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{2}{(x_k - x_{k+1})^3} \\ b_2 = \dfrac{3}{(x_k - x_{k+1})^2} \end{cases}$$

Am obţinut pentru l_k, $1 \leq k \leq n-1$ expresia:

$$\boxed{l_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{k-1}] \cup [x_{k-1}, x_n] \\ -\dfrac{2(x - x_{k-1})^3}{(x_k - x_{k-1})^3} + \dfrac{3(x - x_{k-1})^2}{(x_k - x_{k-1})^2}, & x \in [x_{k-1}, x_k) \\ -\dfrac{2(x - x_{k+1})^3}{(x_k - x_{k+1})^3} + \dfrac{3(x - x_{k+1})^2}{(x_k - x_{k+1})^2}, & x \in x_k, x_{k+1}) \end{cases}}$$

Folosind aceeaşi metodă (temă) obţinem:

$$\boxed{h_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-x_1)^2}{x_1^2}, & x \in [0, x_1] \\ 0, & x \in (x_1, x_n] \end{cases}}$$

$$\boxed{h_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{n-1}] \\ \dfrac{(x-1)(x-x_{n-1})^2}{(1-x_{n-1})^2}, & x \in (x_{n-1}, 1] \end{cases}}$$

Pentru $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$ avem

$$\boxed{h_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{k-1}] \cup [x_{k+1}, x_n] \\ \dfrac{(x-x_{k-1})^2(x-x_k)}{(x_k-x_{k-1})^2}, & x \in (x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{(x-x_{k+1})^2(x-x_k)}{(x_k-x_{k+1})^2}, & x \in (x_k, x_{k+1}] \end{cases}}$$

8. Proprietatea extremală a funcţiilor spline cubice de interpolare Hermite

Fie

$$W_{\Delta_n}(f) = \{g \in C^1[0,1] \mid g \in C^2[x_i, x_{i+1}],\ g(x_i) = f(x_i),$$

$$g'(x_i) = f'(x_i),\ i = \overline{0,n}\}$$

şi

$$W^0_{\Delta_n} = \{g \in C^1[0,1] \mid g \in C^2[x_i, x_{i+1}],\ g(x_i) = g'(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}\}.$$

Proprietatea extremală verificată de funcţiile spline cubice de interpolare Hermite este cuprinsă în următoarea

Teoremă. *Are loc egalitatea:*

$$\int_0^1 (S''_{\Delta_n}(f)(x))^2 dx = \inf_{v\in W_{\Delta_n}(f)} \int_0^1 v''^2(x)dx \tag{35}$$

şi $S_{\Delta_n}(f)$ este unicul element care verifică egalitatea (35).

Demonstraţie. Demonstraţia acestei teoreme urmează aceiaşi paşi cu cea de la funcţia spline de ordinul întâi.

Lema 1. *Dacă $v_1 \in W_{\Delta_n}(f)$ şi verifică egalitatea:*

$$\inf_{v\in W_{\Delta_n}(f)} \int_0^1 v''^2(x)dx = \int_0^1 v_1''^2(x)dx \tag{36}$$

atunci pentru orice $h \in W^0_{\Delta_n}$ avem:

$$\boxed{\int_0^1 h''(x)v_1''(x)dx = 0} \tag{37}$$

şi reciproc, dacă v_1 verifică egalitatea (37) pentru orice $h \in W_{\Delta_n}$ atunci v_1 verifică egalitatea (36).

Demonstraţie. Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, orice $h \in W^0_{\Delta_n}$ avem $v_1 + \lambda h \in W_{\Delta_n}(f)$. De aici obţinem:

$$\int_0^1 (v_1''(x) + \lambda h''(x))^2 dx \geq \int_0^1 v_1''(x)^2 dx.$$

Ultima egalitate arată că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definită prin

$$F(x) = \int_0^1 (v_1''(x) + \lambda h''(x))^2 dx$$

are un minim pentru $\lambda = 0$. Rezultă că $F'(0) = 0$ sau

$$\int_0^1 v_1''(x)h''(x)dx = 0.$$

Să presupunem că (37) are loc. Avem succesiv

$$\int_0^1 [v'' - v_1'][v'' - v_1'']dx \tag{38}$$

$$= \int_0^1 v''^2(x)dx - \int_0^1 v''(x)v_1''(x)dx - \int_0^1 v_1''[v'' - v_1'']dx$$
$$= \int_0^1 v''^2(x)dx - \int_0^1 v''(x)v_1''(x)dx.$$

Pe de altă parte avem

$$\int_0^1 v''(x)v_1''(x)dx = \int_0^1 v_1''(x)[v''(x) - v_1''(x)]dx + \int_0^1 v_1''^2(x)dx \tag{39}$$
$$= \int_0^1 v_1''^2(x)dx.$$

Din (39) şi (38) obţinem egalitatea:

$$\boxed{\int_0^1 [v''(x) - v_1''(x)]^2 dx = \int_0^1 v''^2(x)dx - \int_0^1 v_1''^2(x)dx} \tag{40}$$

Din (40) obţinem că (37) implică (36). Cu aceasta lema este demonstrată.

Lema 2. *Există cel mult o funcţie pentru care egalitatea (36) este adevărată.*

Demonstraţie. Fie $v_1, v_2 \in W_{\Delta_n}(f)$ astfel încât să avem:

$$\inf_{v \in W_{\Delta_n}(f)} \int_0^1 v''^2(x)dx = \int_0^1 v_1''^2(x)dx = \int_0^1 v_2''^2(x)dx \tag{41}$$

Dacă în (40) luăm $v = v_2$, din (41) obţinem

$$\int_0^1 [v_2''(x) - v_1''(x)]^2 dx = 0$$

sau

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [v_2''(x) - v_1''(x)]^2 dx = 0. \tag{42}$$

Din (42) obţinem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [v_2''(x) - v_1''(x)]^2 dx = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Funcţia $v_2'' - v_1''$ fiind continuă pe fiecare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$, din ultima egalitate obţinem

$$v_2(x) - v_1(x) = \alpha_i x + \beta_i,\ \forall\ x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{43}$$

Din egalităţile $v_2(x_i) - v_1(x_i) = v_2'(x_i) - v_1'(x_i) = 0$ şi din (43) obţinem

$$\begin{cases} \alpha_i x_i + \beta_i = 0 \\ \alpha_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ \alpha_i = \beta_i = 0, \quad i = \overline{0, n-1} \tag{44}$$

Din (44) şi (43) obţinem

$$v_2 = v_1.$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

Să arătăm acum că, $S_{\Delta_n}(f)$ verifică (37) pentru orice $h \in W^0_{\Delta_n}$.

Fie $h \in W^0_{\Delta_n}$. Avem succesiv

$$\int_0^1 S''_{\Delta_n}(f)(x)h''(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S''_{\Delta_n}(f)h''(x)dx \tag{45}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} S''_{\Delta_n}(f)h'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''_{\Delta_n}(f)h'(x)dx$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''_{\Delta_n}(f)(x)h'(x)dx.$$

Restricţia funcţiei $S_{\Delta_n}(f)$ la intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ fiind un polinom de grad cel mult 3, avem $S'''_{\Delta_n}(f)(x) = c_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Cu această observaţie egalitatea (45) se scrie:

$$\int_0^1 S''_{\Delta_n}(f)(x)h''(x)dx = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i(h(x_{i+1}) - h(x_i)) = 0.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

9. Funcţii spline cubice naturale

Fie $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie spline cubică de clasă $C^2[a,b]$ şi fie

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$. Dacă f este o funcţie a cărei valori se cunosc în punctele x_i, $i = \overline{0,n}$ se cere să se găsească o funcţie spline cubică $s \in C^2[a,b]$ care interpolează funcţia f în punctele x_i.

Numărul de condiţii care rezultă din faptul că $s \in C^2[a,b]$ este $3n - 3$ iar numărul condiţiilor rezultate din interpolarea funcţiei este $n+1$. Numărul total al coeficienţilor polinoamelor de gradul al treilea, care intră în componenţa lui s este $4n$. Numărul total de condiţii fiind $4n-2$, se constată că mai avem nevoie de două condiţii suplimentare impuse asupra funcţiei s. Dacă aceste condiţii sunt:

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0, \tag{46}$$

funcţia spline cubică care interpolează funcţia f în punctele x_i, $i = \overline{0,n}$, se numeşte funcţie **spline cubică naturală**.

Are loc următoarea

Teoremă. *Există o singură funcţie spline cubică naturală care interpolează funcţia f în punctele x_i, $i = \overline{0,n}$.*

Demonstraţie. Vom da o demonstraţie constructivă a acestei teoreme.

Să notăm prin

$$M_j = s''(x_j).$$

Pentru $x \in [x_j, x_{j+1}]$ putem scrie

$$s''(x) = \frac{(x_{j+1} - x)M_j + (x - x_j)M_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} \tag{47}$$

Din (47) şi din condiţiile de interpolare obţinem

$$(48) \qquad s(x) = \frac{(x_{j+1}-x)^3 M_j + (x-x_j)^3 M_{j+1}}{6(x_{j+1}-x_j)}$$

$$+\frac{(x_{j+1}-x)f(x_j)+(x-x_j)f(x_{j+1})}{x_{j+1}-x_j}$$

$$-\frac{1}{6}(x_{j+1}-x_j)[(x_{j+1}-x)M_j+(x-x_j)M_{j+1}], \quad j=\overline{0,n-1}.$$

Formulele (48) asigură continuitatea lui s şi a funcţiei s'' dacă s' este continuă. Din condiţia de continuitate a derivatei funcţiei s' obţinem sistemul

$$(49) \qquad \frac{x_{j+1}-x_j}{6}M_j + \frac{x_{j+2}-x_j}{3}M_{j+1} + \frac{x_j-x_{j+1}}{6}M_{j+2}$$

$$= \frac{f(x_{j+2})-f(x_{j+1})}{x_{j+2}-x_{j+1}} - \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}, \quad j=1,2,\ldots,n-2.$$

Dacă la ecuaţiile (49) mai adăugăm condiţiile $M_0 = M_n = 0$ obţinem un sistem de ecuaţii liniare care are soluţie unică.

Probleme propuse

1. Fie $s_\Delta(f)$ splinul de ordinul întâi care interpolează funcţia f în punctele diviziunii $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Să se arate că:

$$s_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{2}[x_{k-1},x_k,x_{k+1};|t-x|]_t f(x_k)$$

unde $[x_{k-1},x_k,x_{k+1};|t-x|]_t$ reprezintă faptul că diferenţa divizată acţionează asupra variabilei t.

2. Dacă $e_1(x) = x$, pentru orice $x \in [a,b]$, să se calculeze $S_\Delta(e_1)$.

3. Fie $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$.

Să se arate că dacă $f \in C^1[0,1]$ şi f'^2 este o funcţie concavă pe $[0,1]$, atunci are loc inegalitatea

$$f'^2\left(\frac{1}{2}\right) \geq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)([x_i, x_{i+1}; f])^2.$$

4. Să se calculeze

$$(\underbrace{s_\Delta \circ s_\Delta \circ \ldots \circ s_\Delta}_{m-ori})(f), \quad f \in C[0,1].$$

5. Să se calculeze $s_\Delta(f)$, dacă $f = |x-a|$, $a \in \mathbb{R}$.

6. Dacă $f \in C^4[0,1]$, să se stabilească o evaluare a restului în interpolarea Hermite prin funcţii spline cubice.

7. Fie $f \in C^2[0,1]$. Să se arate că dacă $f'(0) = f'(1) = 0$ atunci

$$\int_0^1 f''^2(x)dx \geq 16 f'^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

8. Fie s splinul natural cubic de interpolare şi fie

$$(\mathcal{V}_1(f) = \{g \in C^1[0,1] \mid g \in C^2[x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1},$$

$$g(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{1, n-1}\}.$$

Să se arate că

$$\inf_{g \in \mathcal{V}_1(f)} \int_0^1 g''^2(x)dx = \int_0^1 s''^2(x)dx.$$