تمارين الملحق
النهايات والاتصال والاشتقاق

[1] أوجد كلاً من النهايات الآتية $\forall$ **ن** $\in$ ص$^+$

(أ) $\text{نها}_{ن\to\infty} \dfrac{1+3+5+.....+(2ن-1)}{1+4+7+.....+(3ن-2)0}$

الحل: البسط متتالية حسابية ح$_1$= 1، د = 2 $\Leftarrow$

$\text{مجـ}_ن = \dfrac{ن}{2}[2 + (ن - 1) \times 2] = \dfrac{ن}{2}[2 + 2ن - 2] = ن^2$

المقام متتالية حسابية ح$_1$=1، د= 3

$\text{مجـ}_ن = \dfrac{ن}{2}[2 + (ن-1)\times 3] = \dfrac{ن}{2}[3ن-1] = \dfrac{3ن^2}{2} - \dfrac{ن}{2}$

$\therefore$ $\text{نها}_{ن\to\infty} \dfrac{ن^2}{\frac{3}{2}ن^2 - \frac{ن}{2}}$ قلنا نتعامل مع الكبير ويهمل الصغير من البسط والمقام.

$= \text{نها}_{ن\to\infty} \dfrac{ن^2}{\frac{3}{2}ن^2} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

ب) $\text{نها}_{ن\to\infty} (1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+.....+(\frac{1}{2})^ن) \Leftarrow$

المتتالية هندسية ح$_1$= 1، ر= $\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $\text{مجـ}_ن = ح_1\dfrac{(ر^ن - 1)}{ر - 1}$

$= \dfrac{(\frac{1}{2})^ن - 1}{\frac{1}{2} - 1} 2 = \left((\frac{1}{2})^ن - 1\right)$

$\text{نها}_{ن\to\infty} 2\,(-1+(\frac{1}{2})^ن) = 2\,(0-1) = -2$ أنتبه $(\frac{1}{2})^ن \to 0$

جـ) $\text{نها}_{ن\to\infty} (\sqrt{ن+1} - \sqrt{ن+2})$

نضرب بالمرافق $\sqrt{ن+1} + \sqrt{ن+2}$

$$\therefore \text{نهـا} \frac{\text{ن}+1-(\text{ن}+2)}{\sqrt{\text{ن}+1}+\sqrt{\text{ن}+2}} = \text{نهـا} \frac{(\sqrt{\text{ن}+1}-\sqrt{\text{ن}+2})(\sqrt{\text{ن}+1}+\sqrt{\text{ن}+2})}{\sqrt{\text{ن}+1}+\sqrt{\text{ن}+2}}$$

$$= \text{نهـا} \frac{-1}{\sqrt{\text{ن}+1}+\sqrt{\text{ن}+2}} = \frac{-1}{\infty} = \text{صفر}$$

نهايـة دالـــــة حقيقيـة

أولاً: نهاية دالة عند نقطة:

1) $\text{نهـا}_{\text{س}\to 2}(2\text{س}+1)$ = تعويض مباشر = $2\times 2+1=4+1=5$

2) $\text{نهـا}_{\text{س}\to -1}(\text{س}-1) = -1-1 = -2$

3) $\text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{1}{2}} \frac{4\text{س}^2-1}{2\text{س}-1} = \frac{4\times\frac{1}{4}-1}{2\times\frac{1}{2}-1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعيين.

المعالجة الرياضية: $\text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{1}{2}} \frac{(2\text{س}-1)(2\text{س}+1)}{(2\text{س}-1)} = \text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{1}{2}}(2\text{س}+1) = 2\times\frac{1}{2}+1=2$

4) $\text{نهـا}_{\text{س}\to -1}(3\text{س}-1) = 3(-1)-1 = -4$

5) $\text{نهـا}_{\text{س}\to 4}(\sqrt{\text{س}}-\frac{4}{\text{س}}) = (\frac{4}{16}-\sqrt{4}) = -2 = \frac{1-8}{4}$

$$\#\frac{7}{4}=$$

6) $\text{نهـا}_{\text{س}\to 5} \frac{\text{س}^2-25}{\sqrt{\text{س}+1}} = \frac{25-25}{\sqrt{125+1}} = \frac{0}{\sqrt{126}} = \text{صفر}$

ثانياً: نهاية دالة عند اللانهاية:

أوجد:

1) $\text{نها}_{س\to\infty} \frac{س^3 + 2س^2 + 1}{3 - س - 3س^2}$ = قلنا نتعامل مع الكبير ونهمل الصغير.

$\therefore \text{نها}_{س\to\infty} \frac{س^3}{3س^2} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{س}{3} = \frac{\infty}{3} = \infty$

2) $\text{نها}_{س\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8س^3 - 5س^2 + 1}}{2 - 3س} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8س^3}}{3س} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{2س}{3س} = \frac{2}{3}$

3) $\text{نها}_{س\to\infty} \frac{2\times 3^س - 4\times 5^س}{3\times 2^س - 4\times 5^س}$ = نتعامل مع الكبير $\left| \begin{matrix} 3^س > 5^س \\ 4^س > 5^س \end{matrix} \right.$

$\therefore \text{نها}_{س\to\infty} \frac{-4}{3} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{-4\times 5^س}{3\times 5^س} = -\frac{4}{3}$ #

4) $\text{نها}_{م\to\infty} \frac{3^{م+1} - 4\times 2^{م-2}}{3^م + 1} = \text{نها}_{م\to\infty} \frac{3\times 3^م - 2^م}{3^م + 1} = \text{نها}_{م\to\infty} \frac{3\times 3^م}{3^م} = 3$

5) $\text{نها}_{س\to\infty} (\sqrt{س^2 - س + 1} - \sqrt{س^2 + س + 1})$ = $(\infty - \infty)$ عدم تعيين المعالجة.

بالضرب بالمرافق.

$= \text{نها}_{س\to\infty} \frac{(\sqrt{س^2 - س + 1} - \sqrt{س^2 + س + 1}) \times (\sqrt{س^2 - س + 1} + \sqrt{س^2 + س + 1})}{\sqrt{س^2 - س + 1} + \sqrt{س^2 - س + 1}}$

$= \text{نها}_{س\to\infty} \frac{س^2 - س + 1 - (س^2 + س + 1)}{\sqrt{س^2 - س + 1} + \sqrt{س^2 + س + 1}} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{-س - س - 1 + س - س^2}{\sqrt{س^2 - س + 1} + \sqrt{س^2 + س + 1}}$

$= \text{نها}_{س\to\infty} \frac{-2س}{\sqrt{س^2} + \sqrt{س^2}} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{-2س}{|س| + |س|} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{-2س}{س + س}$

$\text{نها}_{س\to\infty} \frac{-2س}{2س} = -1$ #

6) $\text{نها}_{س\to\infty} \frac{3س + 5}{\sqrt[4]{4س^2 + 1}} \text{ نها}_{س\to\infty} \frac{3س}{\sqrt[4]{4س^2}} = \text{نها}_{س\to-\infty} \frac{3س}{2|س|} = \text{نها}_{س\to-\infty} \frac{3س}{-2س} = -\frac{3}{2}$

7) $\text{نها}_{س\to-\infty} \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{\sqrt[4]{س^4 + 1}} = \text{نها}_{س\to-\infty} \frac{|س|}{س^2} = \text{نها}_{س\to-\infty} \frac{-س}{س^2} = \text{نها}_{س\to-\infty} \frac{-1}{س}$ =صفر

[1] أبحث اتصال الدوال الآتية عند النقاط المذكورة: **2**

أ) د(س) = $\frac{\text{س} - 2}{|2 - \text{س}|2}$ عند س = 3

+	−
$\frac{\text{س} - 2}{2(\text{س} - 2)} = \frac{1}{2}$	$\frac{\text{س} - 2}{-2(\text{س} - 2)} = \frac{-1}{2}$

* د(3) = $\frac{2-3}{|2-3|2} = \frac{1}{2} \leftarrow (1)$

نهاد(س) = نها $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow (2) \therefore (1) = (2) \therefore$ د متصلة عند س=3 من اليمين.
س←3+

نهاد(س) = $-\frac{1}{2} \leftarrow (3) \therefore (1) \neq (3)$ غير متصلة من اليسار بشكل عام غير متصلة.
س←3−

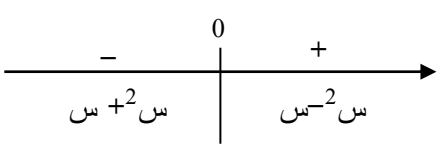
ب) ق(س) = $\begin{cases} 3-\text{س}: \text{س} \neq -1 \\ 1 \quad \text{س} = -1 \end{cases}$

الحل: د(−1) = 1 ← (1)0

نها د(س) = نها (3−س) = 1+3= ← (2)4 ∴ (1) ≠ (2)
س←−1 س←−1

⇐ د غير متصلة عند س= −1

جـ(م(س) = $\text{س}^2 - |\text{س}|$ عند س = 0



م(0) = 0 ← (1)

نها م(س)=نها(س^2−س)= ← 0(2) لاحظ (1)=(2)⇐متصلة عن يمين(0).
س←(0)+

نها م(س)= نهـا(س^2+س)0+0=0 ← (3) ⇐ (1)=(3) غيـر متصـلة مـن
س←(0)−

اليسار بشكل عام متصلة عند س = 0

[2] أبحث اتصال الدوال الآتية على الفترات المذكورة:

د) د(س) = { 2س : 0 ≤ س < 1 ; 4 : س = 1 ; 5 − 3س : 1 < س ≤ 3 }

أولاً: على الفترات المفتوحة: على]0، 1[، د(س) = 2س كثيرة حدود ∴ متصلة على]1، 3[[د (س) = 3 − 5س كثيرة حدود متصلة

∴ متصلة على الفترات المفتوحة.

ثانياً: عند الأطراف:

(1) عند س = 0 من اليمين

د(0) = 2 (0) = 0 ← (1)

نهـا د(س) = نهـا 2س = ← 0 (2)

س ← (0)+

(1) = (2) متصلة من اليمين

(2) عند س = 1

د(1) = ← 4 (1)

نهـا د(س) = نهـا (3 − 5س) = 3 − 5 = ← 2 (2)

س ← (0)+

(1) ≠ (2) غير متصلة من اليمين

نهـا د(س) = نهـا (2س) = ← 2 (3) ∴ (1) ≠ (3) غير متصلة عند س=1 من اليسار

س ← (1)−

بشكل عام غير متصلة عند س = 1

(3) عند س = 3 من اليسار

د(3) = 5 − 3×3 = 9 − 5 = −4 ← (1)

نهـا د(س) = نهـا (3 − 5س) = 3 − 5×3 = − ← 4 (2)

س ← (3)−

(1) متصلة من اليسار عند س = 03

ب) د (س) = { 5 − 2س : −1 ≤ س < 2 ; 2س − 3 : 2 ≤ س ≤ 3 }

الحل: **أولاً على الفترات المفتوحة:**

- على]−1، 2[⇐ د (س) = 2−5س ∴.متصلة لأنها كثيرة حدود.
- على]2، 3[، د(س) = 2س −3 كثرة حدود ∴ متصلة.

ثانياً: عند الأطراف: (1) **عند س = −1 من اليمين.**

د(−1) = 2−5× −1=2+5=7 ← (1)

نهـا =د(س) نهـا (2−5س)=2−5×−1=← 7(2)

س←(−1)+

(1) = (2) ∴. متصلة عند س =−1

(2) عند س =2

د(2) = 2× 3−2= 1 ← (1)

نهـا د(س) = نهـا (2−5س) = 4−5 = ← 1(2) (1)=(2)متصلة من اليسار

س←(2)−

نهـا د(س)=نهـا(2س−3)=3−4=← 1(3) ⇐ (1) = (3) متصلة من اليمين عند س=2

س←(2)+

(3) عند س = 3 من اليسار

د(3) = 2 × 3−3 = 3 ← (1)

نهـا د(س)= نهـا (2س−3) = 3−6=3← (2)

س←(3)−

(1) = (2) ∴. متصلة من اليسار

∴.متصلة على م ت

[3] افرض أن مجتمع ما ينمو متبعاً العلاقة حق= 3000+60ق حيث (ق) الزمن مقاساً بالأيام أوجد معدل النمو عندما (ق) = صفر، 2، 5

الحل:

معدل التغير= نهـا $\frac{د(ق_1+هـ) - د(ق_1)}{هـ}$ = نهـا $\frac{(300+60(ق_1+هـ)) - (300+60ق_1)}{هـ}$

هـ←0 هـ←0

= نهـا $\frac{300+60ق_1+60هـ-300-60ق_1}{هـ}$ نهـا $\frac{60هـ}{هـ}$ = 60 = ثابت.

هـ←0 هـ←0

لما ق = صفر ⇐ المعـــدل (60)

لما ق = 2 ⇐ المعدل (60)

لما ق = 5 ⇐ المعدل (60)

المشتقـــة

[1] أوجد باستخدام تعريف المشتقة (د/ (س))

هـ(ص = |س−1|

1		
−		+
− س+1		س−1

د/ (س) = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د\,س) + هـ) - د\,(س)}{هـ}$

د/(س$^{+}$) = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{س + هـ - 1 - (-س + 1)}{هـ}$ نها $\frac{هـ}{هـ}$ =1

د/ (س$^{-}$)= نها $\frac{س + هـ - 1 - (س - 1)}{هـ}$

= نها نها $\frac{- س - هـ + 1 + س - 1}{هـ}$ = نها = $\frac{هـ}{هـ}$ = −1

[2] أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المبينة أمام كل منها:

(أ) د(س) = س^{2} −6س+3 عندما س= 2

الحل: د/(س) = 2س −6 ضع س = 2 تحصل على الميل.

∴ ضع س =2 ⇐ م = 2 (2) − 6 = 4−6 = −2

∴ م = −2

(ب) د(س) = س^{2} +س+1 عندما س =0

الحل: د/(س) = 2س+1

الميل: ضع س= 0 ⇐ م = د/(0) = 2 (0) +1 = 1+0

∴ م = 1

المشتقة عند نقطة وعلى فترة

[1] ابحث قابلية الاشتقاق للدوال التالية عند النقاط المبينة أمام كل منها:

(أ) د (س) = 2س ، س ≤ 1 عند س=1

$$\text{الحل: د}''(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2+1 & ، \text{س} < 1 \\ 2 & ، \text{س} > 1 \\ 2\text{س} & \text{س} < 1 \end{cases}$$

$\text{د}_{\text{ل}}(\dot{1}) = 2$ ، $\text{د}_{\text{ل}}(\bar{1}) = 2 \times 1 = 2$ لاحظ

$\text{د}_{\text{ل}}(\dot{1}) = \text{د}_{\text{ل}}(\bar{1}) \Leftarrow \text{د}_{\text{ل}}(1) = 2$ ∴ قابلة للاشتقاق

$$\text{ب) د(س)} = \begin{cases} 2\text{س}+1 & \text{س} < 3 \\ 3\text{س}+4 & \text{س} \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{الحل: د}_{\text{ل}}(\text{س}) = \begin{cases} 2 & \text{س} < 3 \\ 3 & \text{س} > 3 \end{cases}$$

$\text{د}_{\text{ل}}(\dot{3}) = 2$ ، $\text{د}_{\text{ل}}(\bar{3}) = 3$ واضح أن $\text{د}_{\text{ل}}(\dot{3}) \neq \text{د}_{\text{ل}}(3)$

∴ د غير قابلة للاشتقاق.

$$\text{جـ) د (س)} = \begin{cases} \text{س}+2 & ، \quad 0 \leq \text{س} \leq 2 \\ 3\text{س}-1 & ، \quad 2 < \text{س} \leq 5 \end{cases}$$

عند النقاط الآتية س=2 ، س= 0، س=5

الحل: س= 0 طرف فترة ∴ $\text{د}_{\text{ل}}(0)$ غير معرفة.

س= 5 طرف فترة ∴ $\text{د}_{\text{ل}}(5)$ غير معرفة.

$$\text{د}_{\text{ل}}(\text{س}) = \begin{cases} 1 & ، \quad 0 < \text{س} < 2 \\ 3 & ، \quad 2 < \text{س} < 5 \end{cases}$$

لاحظ $\text{د}(\dot{2}) = 3$ ، $\text{د}(\bar{2}) = 1$

∴ $\text{د}_{\text{ل}}(2)$ غير معرفة.

$$[2]\ \text{د (س)} = \begin{cases} 0 & ، \text{س} > 0 \\ \frac{1}{2} & ، \text{س} = 0 \end{cases}$$

1 ، س >0

أ) أثبت أن د(س) ليست متصلة وليست قابلة للاشتقاق عند س=0

الحل: د $(0) = \frac{1}{2} \leftarrow (1)$ $\quad (1) \neq (2) \Leftarrow$ د غير متصلة عند س=0

نهـا د(س) $= 1 \leftarrow (2)$ $\quad س \leftarrow (0)^+$

∴ غير قابلة للاشتقاق عند س = 0

ب) أثبت أن ر (س) = س د (س) متصلة عند س = 0 ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند س= 0

الحل: ر (س) = $\begin{cases} 0 & ، س < 0 \\ \frac{1}{2}س & س = 0 \\ س & س > 0 \end{cases}$ $\Leftarrow ر'(س) = \begin{cases} 0 & س < 0 \\ \frac{1}{2} & س = 0 \\ 1 & س > 0 \end{cases}$

الاتصال: ر$(0) = 0$

نهـا ر(س) $= 0$ $\quad س \leftarrow (0)^+$

نهـا ر(س) $= 0$ $\quad س \leftarrow (0)^-$

∴ نهـا ر(س) = ر(0) $\quad س \leftarrow 0$

∴ ر متصلة عند س = 0

الاشتقاق: ر$'(0^+) = 1$

ر$'(0^-) = 0$

∴ ر$'$ (0) غير معرفة

جـ(الدالة ق (س) = س$^2 \times$ د (س) متصلة وكذلك قابلة للاشتقاق عند س=0

الحل:

ق(س)= $\begin{cases} 0 & س < 0 \\ 0 & ، س > 0 \end{cases}$ /

أ
1

$\frac{1}{2}$س^2 ،س=0 ⇐ ق(س)=	س س=0
س^2 س> 0	2س س0>

الاتصال:

ق(0) = $\frac{1}{2}$ (0) = 0

نهاق (س)= 0 ، نهاق (س) = ⇐0

س←(0)$^+$ س←(0)$^-$

نهاق(س) =ق (0) .∴متصلة عند س =0

س←(0)$^+$

الاشتقاق ق/(0̊)= 0 ، ق/ (0̄) = .∴0 ق/ (0) =0

.∴ قابلة للاشتقاق عند س =0