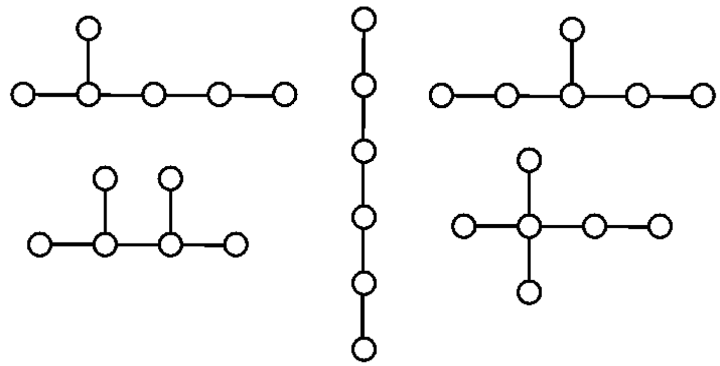
G06-Fak-EA-200330-lead.tex, 200401.

6. Fák

Dr. Szalkai István

2020.03.31.

Definíció: **erdő** (forest) = **liget** = *körmentes* gráf ,
fa (tree) = *körmentes* ÉS *összefüggő* gráf. □



Alapvető állítások:

i) *Erdő komponensei fák.*

ii) *Fák és erdők mindig egyszerű gráfok.* □

iii) G összefüggő $\iff$ $\forall x, y \in V$ <u>legalább</u> egy út x és y között,

iv) G körmentes $\iff$ $\forall x, y \in V$ <u>legfeljebb</u> egy út x és y között,

v) G fa $\iff$ $\forall x, y \in V$ <u>pontosan</u> egy út x és y között,

vi) $\iff$ minimális összefüggő gráf (bármely élét elhagyva szétesik),

vii) $\iff$ maximális körmentes gráf (bármely élt behúzva kör lesz). □

Hasonlít a vektorterekhez => Matroidok .

Fokszámok és élek száma

Állítások:

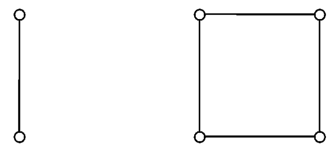
i) $\forall x \in V \quad \delta(x) \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad G$ *-ben van kör,*

ii) G *körmentes* $\Longrightarrow \quad |E| \leq |V| - 1$,

iii) G *összefüggő* $\Longrightarrow \quad |E| \geq |V| - 1$,

iv) G *fa* $\Longrightarrow \quad \boxed{|E| = |V| - 1}$,

v) DE egyik sem fordítható meg:



Tétel: *Tetszőleges* G *gráfra az alábbi 3 tulajdonság*

> *egyik sem vonja maga után semelyik másikat, de*

>> *bármely kettőből következik a harmadik:*

a) G *összefüggő,*

b) G *körmentes,*

c) $|E| = |V| - 1$. $\square$

Következmény: *A paraffinok* $C_n\ H_{2n+2}$ *nyílt szénláncúak.*

Bizonyítás: $|V| = n + 2n + 2 = 3n + 2$ és $|E| = \frac{1}{2}(4 \cdot n + 1 \cdot (2n + 2)) = 3n + 1$. $\square$

Házi feladat: **a)** alkoholok: $C_n\ H_{2n+1}\ O\ H$, **b)** $C_8\ H_{18}\ C_2$?

Házi feladat: $G = (V, E)$ tetszőleges gráf, n csúcs, k komponens és e él van, akkor

o) $|E| \geq n - k$,

a) G -ben legalább $e - n + k$ kör van,

b) G erdő $\Longleftrightarrow \quad e - n + k = 0$ azaz $|E| = n - k$. $\square$

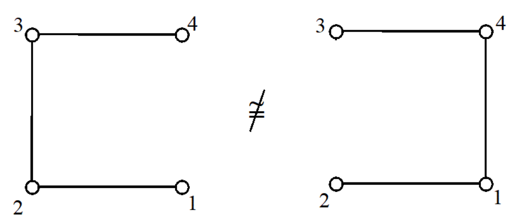
Fák összeszámlálása

Fontos ÉS nehéz probléma, nem csak kémikusoknak, máig megoldatlan.

Számozott (címkézett) csúcsú fák

Definíció: minden csúcsnak *egyedi címkéje* (sorszáma) van. □

Például:



Tétel (Cayley, 1889)**:** *Tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* n^{n-2} *páronként nem izomorf, számozott csúcsú fa gráf van* n *csúcson.*

Bizonyítás (**Prüfer kód**, 1918)**:** $V = \{1, ..., n\}$, G fa.

Töröljük a legkisebb sorszámú elsőfokú csúcsot a hozzá csatlakozó éllel együtt

ÉS írjuk le *szomszédjának* sorszámát,

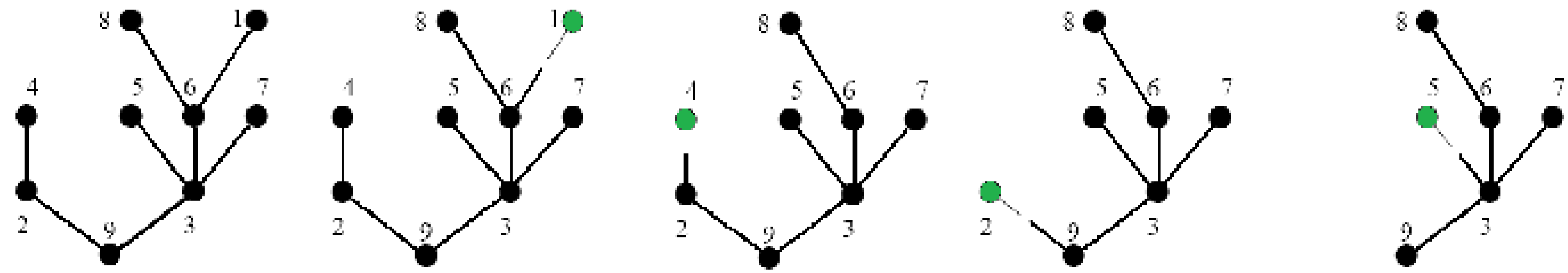
ÉS ismételjük amíg el nem fogy,

=> a legutoljára leírt szám mindig n => felesleges,

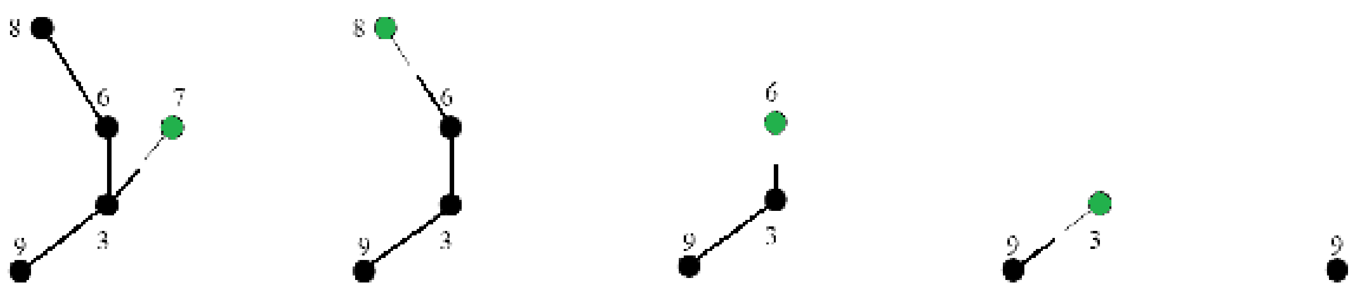
=> $n-2$ hosszú sorozat $1, ..., n$ számokból,

ÉS dekódolható. □

Példa [17.23]: *KÓDOLÁS*



töröl:	(1)	(4)	(2)	(5)
leír:	(6)	(2)	(9)	(3)
kód:	(6)	(62)	(629)	(6293)



töröl:	(7)	(8)	(6)	(3)	
leír:	(3)	(6)	(3)	-	
kód:	(62933)	(629336)	**(6293363)**		

Példa: *DEKÓDOLÁS* **(6293363)** ez 7 hosszú sorozat: $n-2=7 \implies n=9$,

legutolsó elem mindig $n=9$ => **(62933639)**

Csak a törölt csúcsok *szomszédait* látjuk, a törölt csúcsokat nem.

A *törölt* csúcs = "legkisebb sorszámú (elsőfokú)", => "legkisebb sorszám, amit *nem* látunk".

kód	6	2	9	3	3	6	3	9
törölt								
él								

=>

kód	**6**	2	9	3	3	6	3	9
törölt	**1**							
él	$\{1,6\}$							

kód	x	2	9	3	3	6	3	9
törölt	1							
él	$\{1,6\}$							

=>

kód	x	**2**	9	3	3	6	3	9
törölt	1	**4**						
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$						

kód	x	x	9	3	3	6	3	9
törölt	1	4						
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$						

=>

kód	x	x	**9**	3	3	6	3	9
törölt	1	4	**2**					
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$					

kód	x	x	x	3	3	6	3	9
törölt	1	4	2					
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$					

=>

kód	x	x	x	3	3	6	3	9
törölt	1	4	2	**5**				
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$				

kód	x	x	x	x	3	6	3	9
törölt	1	4	2	5				
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$				

=>

kód	x	x	x	x	3	6	3	9
törölt	1	4	2	5	**7**			
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$			

kód	x	x	x	x	x	6	3	9
törölt	1	4	2	5	7			
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$			

=>

kód	x	x	x	x	x	6	3	9
törölt	1	4	2	5	7	**8**		
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{6,8\}$		

kód	x	x	x	x	x	x	3	9
törölt	1	4	2	5	7	8		
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{6,8\}$		

=>

kód	x	x	x	x	x	x	3	9
törölt	1	4	2	5	7	8	**6**	
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{6,8\}$	$\{3,6\}$	

kód	x	x	x	x	x	x	x	9
törölt	1	4	2	5	7	8	6	
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{6,8\}$	$\{3,6\}$	

kód	x	x	x	x	x	x	x	9
törölt	1	4	2	5	7	8	6	**3**
él	$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{6,8\}$	$\{3,6\}$	$\{3,9\}$

=> **éllista:**

$\{1,6\}$	$\{2,4\}$	$\{2,9\}$	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{6,8\}$	$\{3,6\}$	$\{3,9\}$

Házi feladat: ellenőrizni!

Tétel (Cayley, 1889, ism): *Tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* n^{n-2} *páronként nem izomorf, számozott csúcsú fa gráf van n csúcson.* □

Tétel* (Cayley)**:** *Az olyan n csúcsú fa gráfok* száma, *amely csúcsainak* fokszámai δ_1 ,..., δ_n :

$$\binom{n-2}{\delta_1 - 1 \ , \ \dots \ , \ \delta_n - 1}$$

polinomiális együttható. □

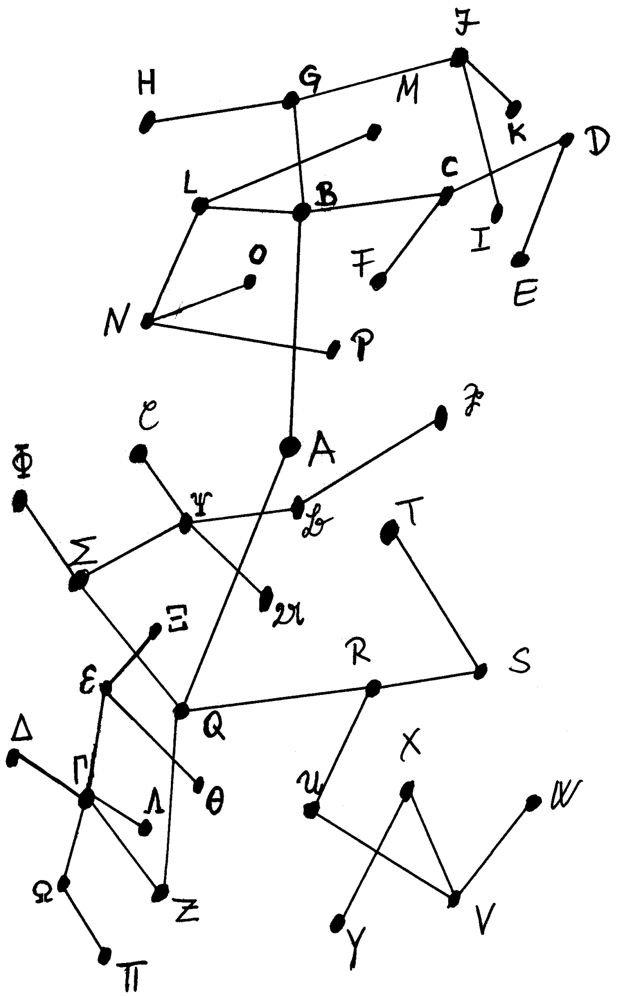
Paraffin molekulák: $C_n H_{2n+2}$, Cayley 1857 és 59 között, máig megoldatlan, nehéz és fontos probléma.

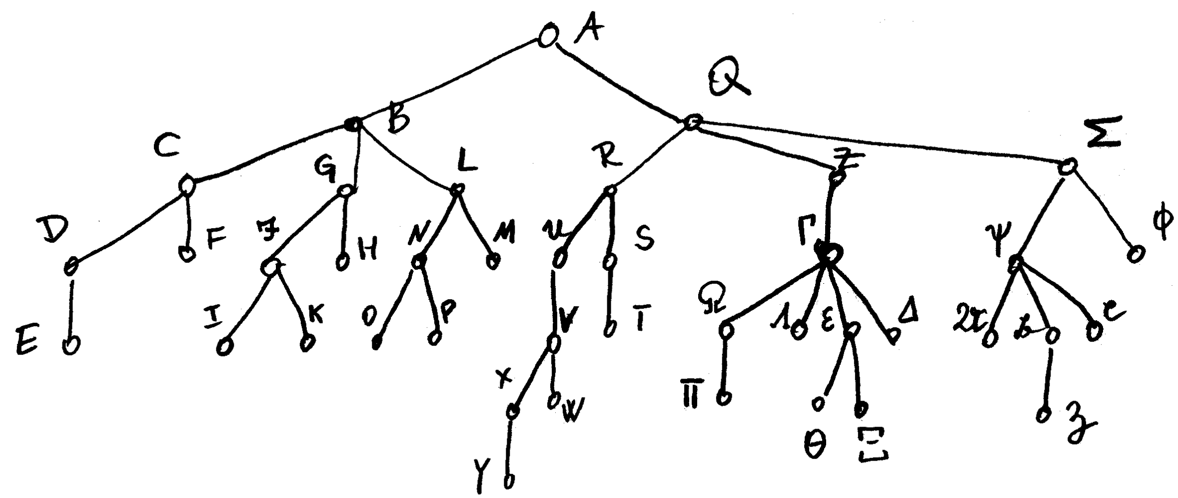
Számozatlan csúcsú fák

Közönséges gráfok, közönséges izomorfizmussal => a legnehezebb, máig megoldatlan.

Tétel* (R.Otter, 1948) $t\,(n) \sim c \cdot \alpha^n \cdot n^{-5/2} = \dfrac{c \cdot \alpha^n}{\sqrt{n^5}}$ ahol $c \approx 0.5349$, $\alpha \approx 2.9558$. □

Gyökereztetés



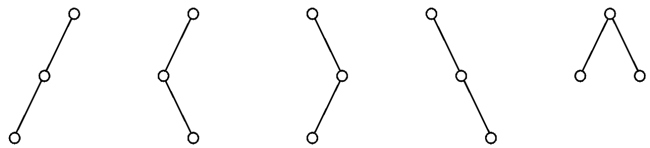


Bináris (döntési) fák

Definíció: *Ha a T fát tudjuk úgy gyökereztetni, hogy minden csúcsnak* legfeljebb két *leszármazottja van, akkor T* **bináris fa**.
Ekvivalens: T minden fokszáma legfeljebb három, a gyökér fokszáma legfeljebb kettő. □

Definíció: *Két bináris fa* **szigorúan izomorfak** (**strictly isomorphic**), *ha lényeges, hogy a csúcsok leszármazottait* jobbra *vagy* balra *rajzoljuk a papírra.* □

Például: páronként szigorúan nem izomorf bináris fák:



Tétel (Cayley)**:** u_n := *páronként szigorúan nem izomorf bináris fa gráfok száma n csúcson:*

$$u_0 = 1 \ , \quad u_1 = 1$$

és

$$u_n = 2 \cdot u_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} u_i \cdot u_{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot u_{n-1-i}$$

Bizonyítás: gyökér, valamennyi balra, és a többi jobbra. □

= Catalan számok **!!!**

Rendezések és fák

Állítás: *Ha egy bináris fa magassága h, leveleinek száma ℓ, akkor* $\ell \leq 2^h$. **Bizonyítás:** Indukcióval h -ra. □

Meglepően egyszerű:

Alaptétel: *Tetszőleges sorbarendező algoritmus n adat esetén (a legrosszabb input esetében)* legalább

$$\Omega\left(n \cdot \log(n)\right)$$

ideig fut. (Megj: Ω régen $\mathcal{O}$ volt.)

Bizonyítás: A program elágazásai és állapotai = csúcsok, futása = élek, futás hossza = magasság.

$n!$ féle lehetséges input van => ennyi levél (végállapot), =>

$$n! \leq \ell \leq 2^h \qquad / \log$$

$$\log_2(n!) = \log_2\left(\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right) = \mathcal{O}\left(n \cdot \log(n)\right) \leq h \ .$$

□

Rendezés bináris fán

Algoritmus *adatok sorbarendezésére* :

Az adatok egy gyökereztetett $G = (V, E)$ fa csúcsain,

a gráfot az adatok beolvasásával együtt növesztjük:

" *Minden v csúcs alatti*

bal*oldali részfa minden adata* megelőzi *a v csúcs adatát,*

jobb*oldali részfa minden adata v csúcson adata* után *következik.* "

Példa: