

Bingo und maximale Chancenanzahl

Schinken

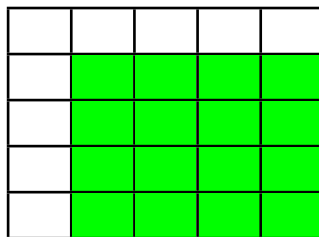
24. Mai 2019

Im Folgenden betrachten wir immer ein Standard-Bingospiel, das heißt, wir betrachten ein 5×5 -Feld, wobei ein Bingo erreicht ist, wenn alle fünf Zahlen in einer Reihe, Spalte, oder einer Diagonalen gezogen wurden.

Mit „Chance“ bezeichnen wir ein Feld, für das gilt: Wenn die Zahl des Feldes gezogen wird, dann hat man ein Bingo erreicht (egal, ob diagonal, senkrecht oder waagrecht). Wir fragen uns, wie viele Chancenfelder es maximal geben kann, also an wie vielen paarweise verschiedenen Feldern auf dem 5×5 ein Bingo im nächsten Zug erreicht werden kann. Wir behaupten:

Theorem: *Die maximale Chancenanzahl, die man erreichen kann, ist 9.*

Beweis: Wir zeigen durch ein einfaches Beispiel, dass 9 Chancenanzahlen möglich sind:



Die grünen Felder seien bereits gezogen. Dann bleiben 9 Felder übrig, welche nicht gezogen wurden. Für die Felder in der zweiten bis fünften Zeile kann man ein waagrechtes Bingo erzielen. Für die Felder in der zweiten bis fünften Spalte kann man ein vertikales Bingo erreichen. Für das Feld oben links ist ein Diagonal-Bingo möglich. Damit erreicht man neun verschiedene Chancen.

Wir zeigen nun, dass nicht mehr als neun Chancen möglich sind:

Angenommen, wir finden ein Feld, in dem wir mindestens zehn Chancen haben. Das heißt, mindestens zehn Felder in unserem Bingofeld wurden nicht gezogen. Wir gucken uns an, in welchen Zeilen und Spalten ein Bingo entstehen kann:

Angenommen, wir haben in vier oder fünf Reihen eine Chance auf ein Bingo. Dann müssen mindestens $4 \cdot 4 = 16$ Felder gezogen wurden sein. Da wir aber zehn Chancen voraussetzen, und somit nur 15 Felder gezogen wurden, kann dies nicht sein. Wir finden

also maximal drei Reihen eine Chance. Analog ergibt sich dies für die Spalten. Mit vertikalen und horizontalen Bingomöglichkeiten ergeben sich also sechs Chancen maximal. Es kann außerdem maximal zwei Chancen geben, bei denen wir ein diagonales Bingo erhalten. Somit kann es maximal acht Chancen auf unserem Feld geben. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass wir mindestens zehn Chancen auf unserem Feld haben. Somit kann es maximal 9 Chancen geben für ein Bingofeld.

Analog lässt sich zeigen:

Bemerkung: *Die maximale Chancenanzahl, die man auf einem $n \times n$ -Feld erreichen kann, ist $2n - 1$.*

Beweis: Funktioniert wie der Fall für $n = 5$ und bleibt dem Leser als kleine Übungsaufgabe hinterlassen.