8.7 - Beidseitiger Hypothesentest

Reminder: Rechts- und Linksseitiger Test

✓ **Links:**	**Gesucht ist das größte k, für das $P(X \leq k) \leq \alpha$ gilt.**
✓ **Rechts:**	**Gesucht ist das kleinste k, für das $P(X \leq k-1) \geq 1-\alpha$ gilt.**

Einführung Beidseitiger Test

Walter hält eine Münze in der Hand. Sie fühlt sich so an, als sei sie auf einer Seite schwerer als auf der anderen. Er vermutet, seine Schwester Verena hat die Münze so manipuliert, dass eine Seite häufiger geworfen wird als die andere.

Verena behauptet, die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei 50%: $H_0: p = 0{,}5$

Walter ist davon überzeugt, dass die Münze manipuliert wurde: $H_1: p \neq 0{,}5$

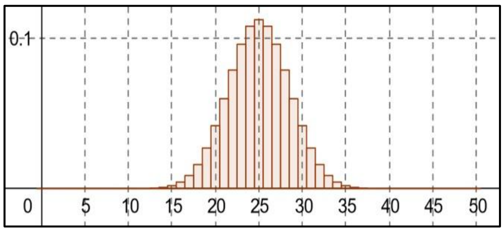
Um die Hypothesen zu testen, wird die Münze 50-mal geworfen (n = 50).

Wichtig: Walter behauptet im Beispiel nur, dass die Wahrscheinlichkeit für Kopf nicht 50% sei, er trifft aber keine Aussage darüber, ob sie größer oder kleiner als 50% sei. Wenn also Kopf beim 50-maligen Werfen verdächtig oft oder verdächtig selten herauskommt, wird H_0 verworfen und Walters H_1 wird angenommen (in beiden Fällen!). **Der Ablehnungsbereich von H_0 liegt also links und rechts.**

Da in der Alternativhypothese kein größer/kleiner Zeichen vorkommt, kann der Ablehnungsbereich nicht nur links oder nur rechts liegen. Er liegt auf beiden Seiten.

In diesem Fall wird ein beidseitiger Hypothesentest durchgeführt.

Die Münze wird 50-mal geworfen. Falls H_0 stimmt, ist X := „Wie oft Kopf geworfen wird" binomialverteilt mit den Parametern n = ______ und p = ______.



Wir erwarten, dass (durchschnittlich und auf lange Sicht) _______-mal Kopf geworfen wird. Wenn Kopf also drastisch seltener (z.B. 17) oder drastisch öfter (z.B. 33) kommt, wird H_0 zugunsten von H_1 verworfen.

Es gibt also zwei kritische Werte k_1 und k_2 (im Beispiel oben 17 und 33).

Dementsprechend gibt es zwei Ablehnungsbereiche: $\{0; 1; 2; ...; k_1\}$ und $\{k_2; k_2+1; ...; n\}$.

Auch der beidseitige Test besitzt ein **Signifikanzniveau α**. Dieses gibt die maximale Wahrscheinlichkeit der beiden Ablehnungsbereiche zusammen an, falls H_0 stimmt. α wird also „aufgeteilt":

Ist α = 5%, so landet X mit einer Wahrscheinlichkeit $\leq \frac{\alpha}{2} = 2{,}5\%$ im linken und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\leq \frac{\alpha}{2} = 2{,}5\%$ im rechten Ablehnungsbereich.

Um den „linken kritischen Wert" k_1 zu bestimmen, führt man einen linksseitigen Test mit $\frac{\alpha}{2}$ durch.

Um den „rechten kritischen Wert" k_2 zu bestimmen, führt man einen rechtsseitigen Test mit $\frac{\alpha}{2}$ durch.

Beispielrechnung mit dem Münzproblem

Verena behauptet, die Münze sei nicht gezinkt, die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei also 50%. Walter will dies mit einem beidseitigen Hypothesentest widerlegen, indem er die Münze 50-mal wirft. Führe diesen Test für Walter durch, wähle $\alpha = 5\%$. Formuliere die Entscheidungsregel.

(1) Formuliere die Hypothesen: H_0: ________________, H_1: ________________

(2) Zufallsvariable einführen: ____

(3) Gib die Parameter der Binomialverteilung an: Im Extremfall n = ________, p = ________

(4) Berechne den linken kritischen Wert mit einem linksseitigen Test:

Gesucht: Das größte k, sodass $P(X \leq k) \leq \frac{\alpha}{2}$, also das größte k, sodass $P(X \leq k) \leq 0{,}025$.

k	$\boldsymbol{P(X \leq k)}$
16	
17	
18	

Der linke kritische Wert ist also k_1 = __________.

(5) Berechne den rechten kritischen Wert mit einem rechtsseitigen Test:

Gesucht: Das kleinste k, sodass $P(X \leq k-1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$, also das kleinste k,

sodass $P(X \leq k-1) \geq 1 - 0{,}025 = 0{,}975$.

k	k-1	$\boldsymbol{P(X \leq k-1)}$
32	31	
33	32	
34	33	

Der rechte kritische Wert ist also k_2 = __________.

(6) Notiere den Ablehnungsbereich (zur Verdeutlichung für dich):

$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; 17\} \cup \{33; 34; 35; \dots; 50\}$.

(7) Formuliere die Entscheidungsregel (im Sachzusammenhang!):

„Wenn höchstens _______ oder mindestens _______ mal Kopf geworfen wird, so wird H_0 zugunsten von H_1 verworfen (und man nimmt an, dass die Münze manipuliert wurde), sonst nicht."

Übungsaufgabe zu allen drei Tests

Marc behauptet: „In der gymnasialen Oberstufe (Kl. 11+12) sind im Allgemeinen immer gleich viele Mädchen wie Jungs, also ist die Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen p = 0,5."

Bestimme für die folgenden Behauptungen die jeweilige Entscheidungsregel (n = 100 und $\alpha = 5\%$).

a) Claudia behauptet, es seien <u>mehr</u> als 50% Mädchen (H_1: p > 0,5).
b) Simon behauptet, es seien <u>weniger</u> als 50% Mädchen (H_1: p < 0,5).
c) Max behauptet, es seien <u>nicht</u> 50% Mädchen, sondern weniger oder mehr (H_1: $p \neq 0{,}5$).

Lösungen:
a) H_0 wird für $X \geq 59$ verworfen. b) H_0 wird für $X \leq 41$ verworfen. c) H_0 wird für $X \geq 61$ oder $X \leq 39$ verworfen.