

3-10-18

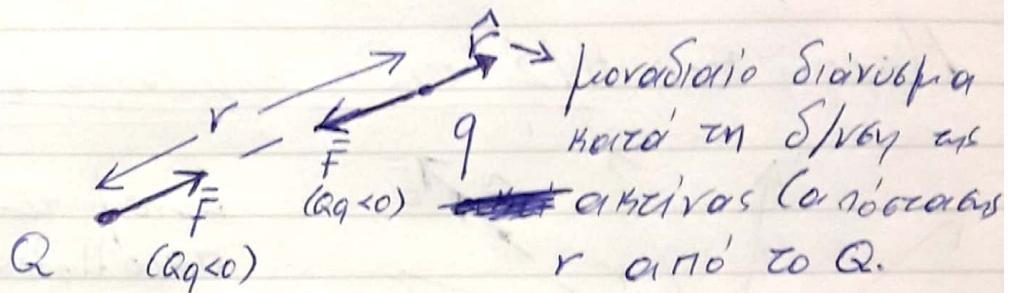
# ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ I

## Ηλεκροστατικό Πεδίο

Πηγές του Η/Σ πεδίου: φορτίοι

- Νόμος του Coulomb: περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ φορτίων.

Σημειακά φορτία:  $Q, q$



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

↑  
 διηλεκτρική σταθερά του κενού

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F/m} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Αν  $Q \cdot q < 0$  η  $\vec{F}$  ελκτική  
 $Q \cdot q > 0$  η  $\vec{F}$  απωστική

- Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (ή απλά "ηλεκτρικό πεδίο")

(Έστω (σύμβαση) ότι το  $Q$  είναι το φορτίο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο και το  $q$  αυτό που δέχεται την επίδρασή του)



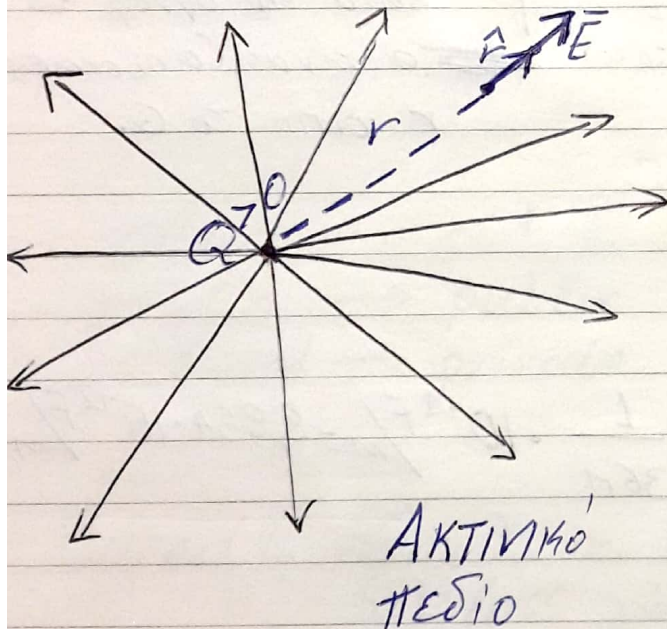
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

φορτίο "δοκιμής"

(αυτό που δέχεται την επίδραση της δύναμης)

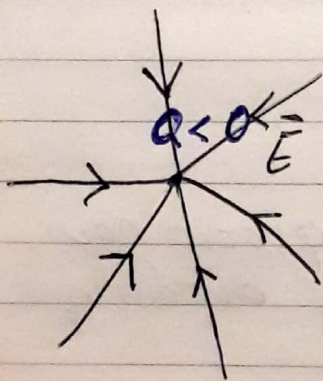
( $\vec{E}$ : χρησιμότερο μέγεθος από την  $\vec{F}$ : ανεξάρτητο του φορτίου δοκιμής)

### Μορφή του Η/Σ πεδίου σημειακού φορτίου

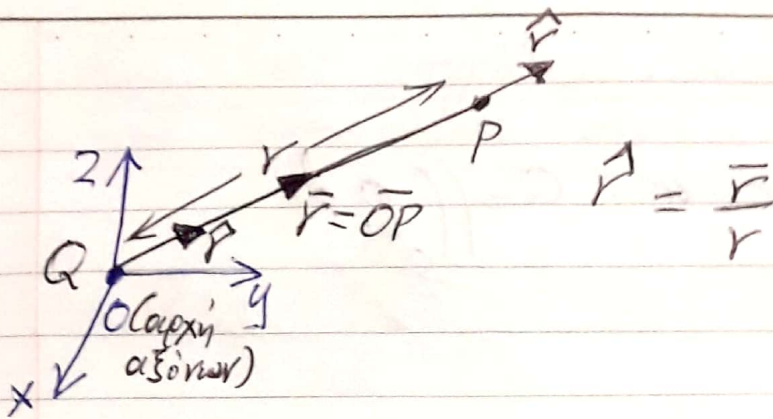


Δυναμικές γραμμές του  $\vec{E}$ , παράλληλες (εφαπτομενικές) προς το  $\vec{E}$ .

- Δείχνουν την κατεύθυνση του πεδίου
- Η "πυκνότητά" τους είναι μεγαλύτερη εκεί όπου το  $\vec{E}$  είναι ισχυρότερο

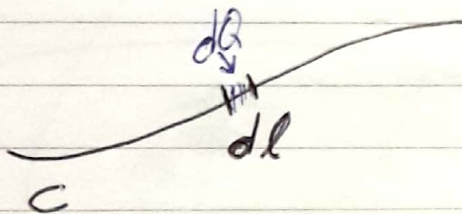






Γενίκευση για κατανομές φορτίων

- Γραμμικό φορτίο: κατατεταγμένο σε (καμπύλη) γραμμή



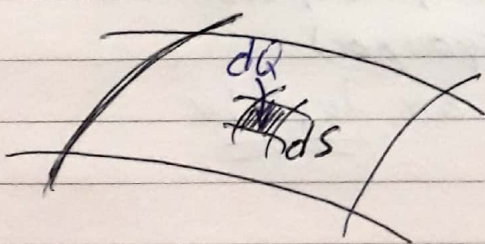
Γραμμική πυκνότητα φορτίου:  $\rho_l$   
(Cb/m)

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$$

$$dQ = \rho_l \cdot dl$$

Συνολικό φορτίο  $Q = \int dQ = \int_C \rho_l dl$

- Επιφανειακό φορτίο



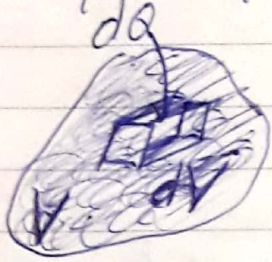
Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  
 $\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}$   
(Cb/m<sup>2</sup>)



$$dQ = \rho_s ds$$

Συνολικό φορτίο της επιφάνειας:  $Q = \iint_S \rho_s ds$

- Χωρικό φορτίο



Χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

(ή  $\rho$ )

$$dQ = \rho_v dV$$

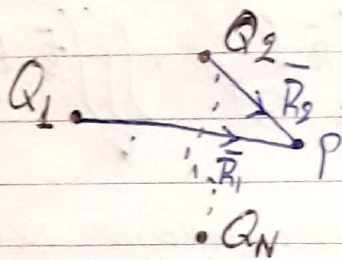
Συνολικό φορτίο  $Q = \iiint_V \rho_v dV$

Παραδείγματα:

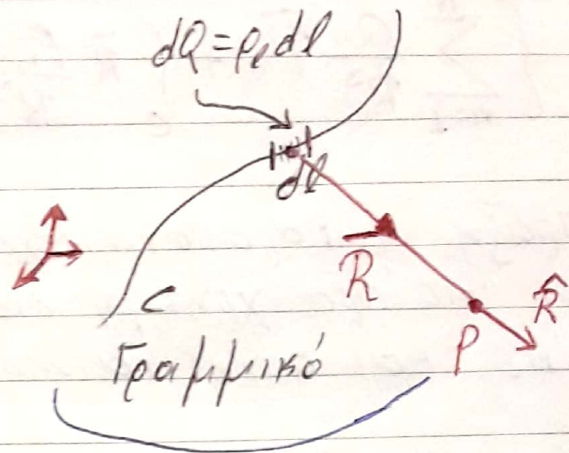
- Γραμμικό φορτίο: λεπτή φορτισμένη ράβδος
  - Επιφανειακό φορτίο: " " επιφάνεια
- \*\* Αλλά και όλες οι επιφάνειες των αγωγών
- Χωρικό φορτίο: ατμοσφαιρικά φαινόμενα (νέφη, ιονόσφαιρα)
- στο εσωτερικό των λυχνιών



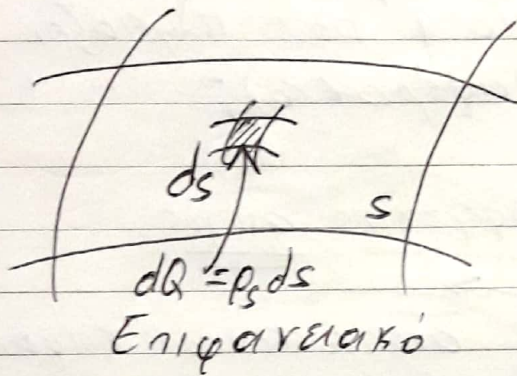
Αρχή της υπερθέσεως (superposition) - Ηλεκτρικό πεδίο από κατανεμημένες φορτίων



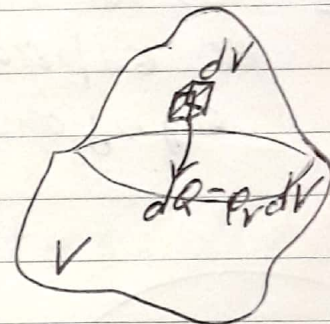
Σημειακά  
(διακριτά)



Γραμμικό



Επιφανειακό



Χωρικό

Κάθε στοιχειώδες φορτίο  $dQ$  ( $\rho dl$ ,  $\rho_s ds$ ,  $\rho_v dv$ ) μπορεί να θεωρηθεί ως "σημειακό":  
"αδρανής" τις επιμέρους  $d\vec{E}$

π.χ. γραμμικό: 
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2} \hat{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dl}{R^3} \vec{R}$$

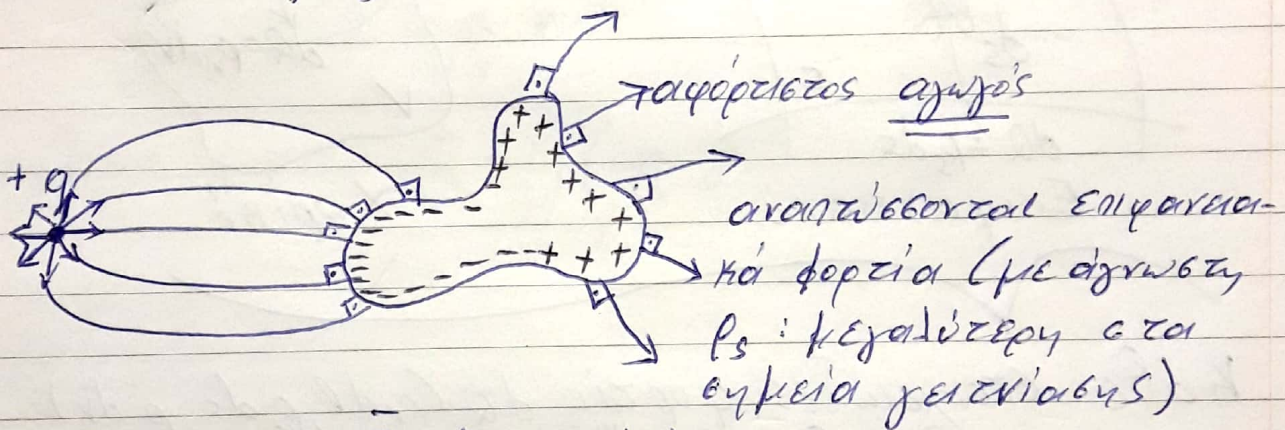


## Γενική σχέση:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{R_n^2} \vec{R}_n + \int_C \frac{\rho_l dl}{R^2} + \iint_S \frac{\rho_s ds}{R^2} + \iiint_V \frac{\rho_v dV}{R^2} \right\}$$

Στην πράξη η παραπάνω σχέση η παραπάνω σχέση δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη διότι οι συνκρούσεις φορτίων θα πρέπει και αυτές να υπολογιστούν.

Παράδειγμα: Πώς θα υπολόγισα τη δύναμη που ασκείται σε σημειακό φορτίο  $q$  που πλησιάζει σε αγωγό (έστω αφορτιστό);



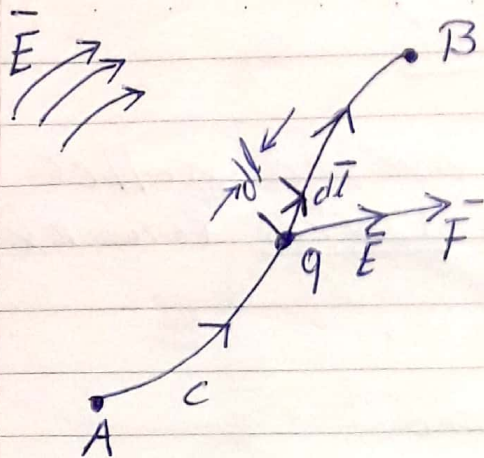
Η μορφή του  $\vec{E}$  είναι περιπλοκή

## Ιδιότητες του ηλεκτροστατικού πεδίου

- Ενεργειακή θεωρία: το έργο των δυνάμεων του ηλεκτρικού πεδίου

Έστω κάποιο  $\vec{E}$ . Δύναμη που ασκείται σε φορτίο  $q$   
 $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$





Στοιχειώδες έργο:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

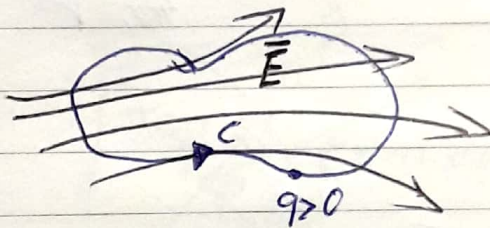
$$W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(+): έργο που αποδίδεται από το πεδίο στο φορτίο

(-): αντίθετο

• Νόμος του "αετιόβιλου" του Η/Σ πεδίου:

Σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη



$$W = q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

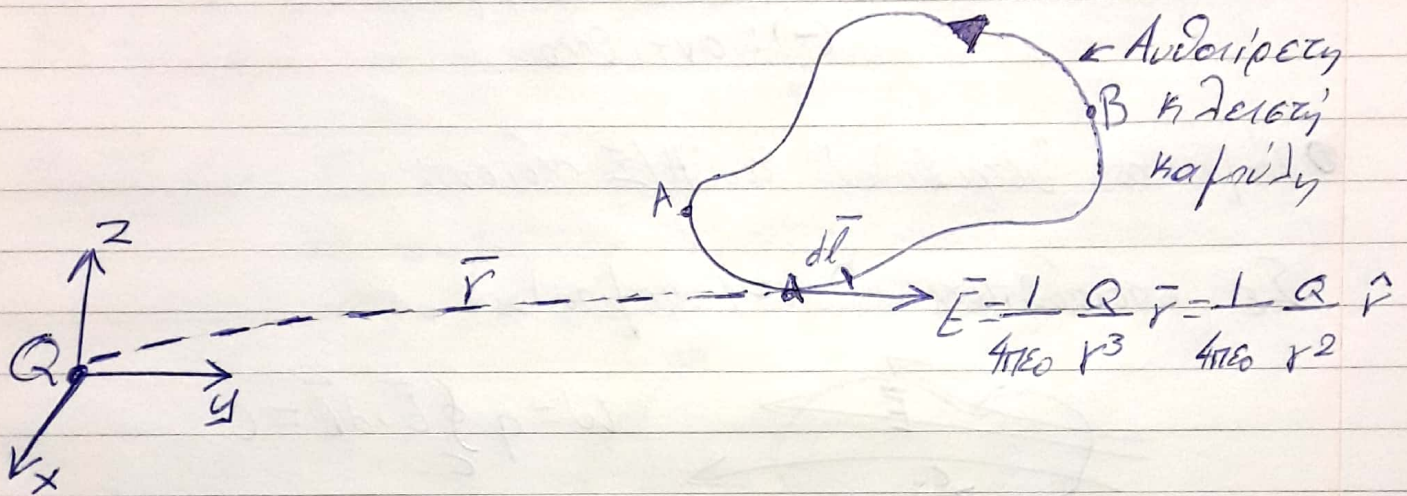


5-10-18

## Το αερόβιο του Η/Σ πεδίου

Το Η/Σ πεδίο τείνει να σχηματίζει ανοιχτές γραμμές (από φορτία θε σε φορτία) και όχι κλειστές (όπως π.χ. συμβαίνει στο μαγνητικό πεδίο).

Απόδειξη: για ένα σφαιρικό φορτίο



Θέλω ν.δ.ο. το έργο των δυνάμεων του Η/Σ πεδίου κατά μήκος της (εποχιακής) κλειστής καμπύλης είναι 0.

Στοιχειώδες έργο στο τμήμα  $d\vec{l}$ :  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} =$

$$= q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{r^2}$$

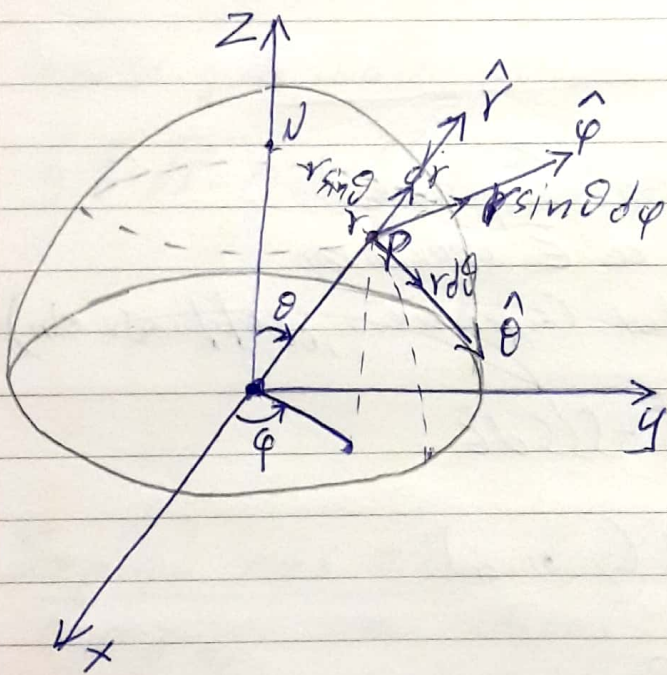
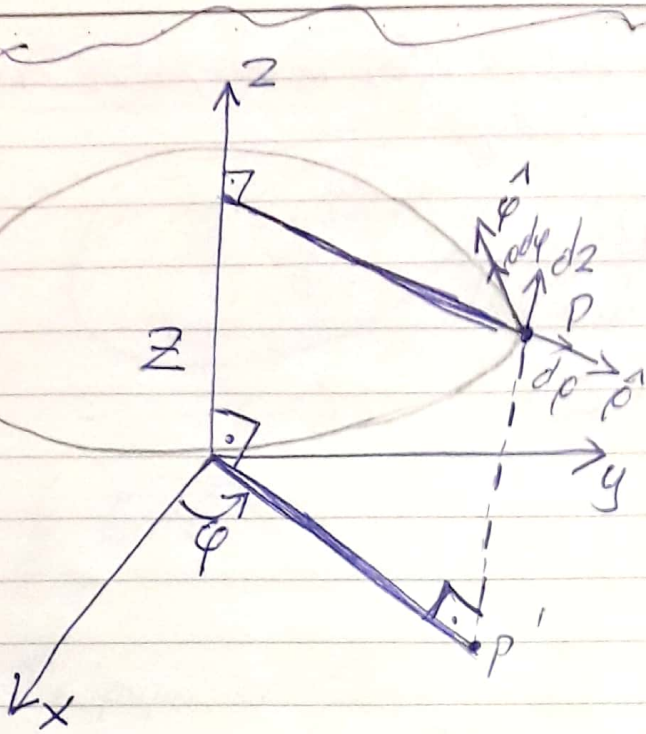
Το διαφορικό μήκους (διανεύματικό) στα σημεία ευθείων συντεταγμένων:

$$d\vec{l} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z} \quad (\text{καρτεσιανός})$$

$$= \rho \cdot d\rho \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} + dz \cdot \hat{z} \quad (\text{κυλινδρικός})$$

$$= dr \cdot \hat{r} + r \cdot d\theta \cdot \hat{\theta} + r \sin\theta \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} \quad (\text{σφαιρικός})$$





$$\begin{aligned}
 dw &= \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (dr \cdot \hat{r} + r d\theta \cdot \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \cdot \hat{\phi}) \\
 &= \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow w_{A \rightarrow B} = \int_A^B dw = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)
 \end{aligned}$$



Το έργο κατά μήκος μιας διαδρομής εξαρτάται μόνο από  
τις αρχική και την τελική θέση.

Για κλειστή διαδρομή ( $B \equiv A$ )

$$W_{A \rightarrow A} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} \right) = 0$$

$$W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ολοκληρωτική έκφραση του αερόβιου

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Το αποδεικνύει για ένα φορτίο (σφαιρικό)

Όμως στη γενική περίπτωση το  $\vec{E}$  προκύπτει

ως υπέρθεση διαφόρων φορτίων (σφαιρικών, γραμμικών κλπ)

$$\vec{E} = \sum_n \vec{E}_n + \int d\vec{E} + \iint d\vec{E} + \iiint d\vec{E}$$

(σφαιρικά) (γραμμικά) (επιφ) (χυσικά)

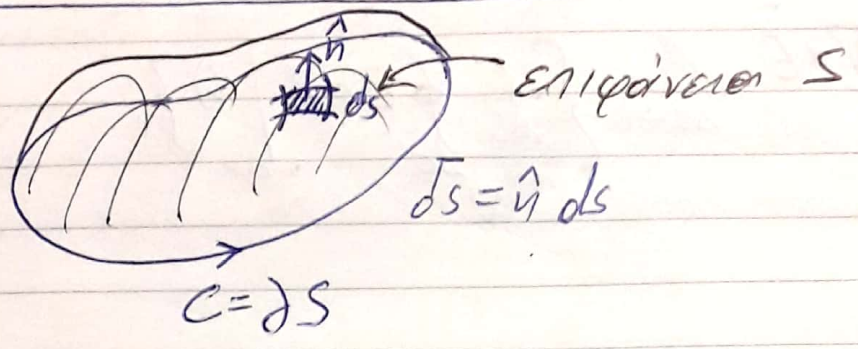
Εφόσον κάθε  $\vec{E}_n$  ή  $d\vec{E}$  θεωρείται ότι προέρχεται  
από σφαιρικό φορτίο

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \dots = 0$$

υπέρθεση



Πως εκφράζεται η έννοια του αερόβιλου σε "τοπικό" επίπεδο;



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Θεώρημα του Stokes:  $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s}$

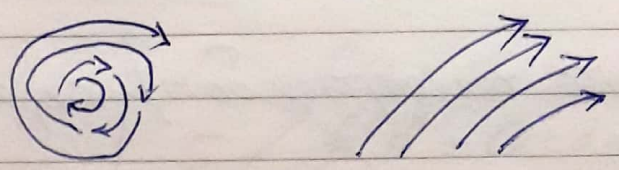
Ισχύει για κάθε δυνατή επιφάνεια  $S$ .

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

$\forall S$

Η έκφραση του αερόβιλου του ΗΕ πεδίου σε "τοπική" ή εγκοσμική μορφή

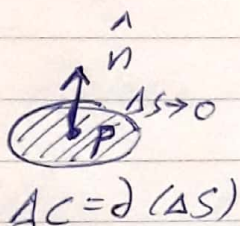
Στροφή ενός πεδίου (curl, rot): μια μορφή διανυσματικής παραγωγής που εκφράζει ένα μέτρο του "αερόβιλου" του πεδίου, δηλ. το κατά πόσον τείνει να σχηματίσει κλειστές διαδρομές.



$\nabla \times \vec{E}$  "ισχύρο"       $\nabla \times \vec{E}$  "αδενικό"



## Ορισμός



$$\nabla \times \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta S} \oint_{AC} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right\} \hat{n}$$

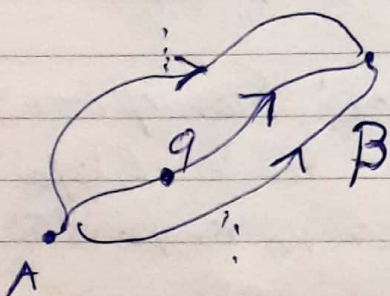
$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Προσοχή!!! Για κυλινδρικό & σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων της ετήσιου τύπου (αναπαύονται βιβλίων) & όχι κάποια ορίσματα.

## Η έννοια του δυναμικού (potential)

Ασκήσιμο αέριο: μπορεί να περιγραφεί μέσω της κλίσης (grad) ενός βαθμωτού δυναμικού.

As το δείξουμε μέσω ενεργειακής θεωρίας:



Έργο στη διαδρομή  $A \rightarrow B$ : ανεξάρτητο της διαδρομής:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ορίζεται μέγεθος ανεξάρτητο του φορτίου δοκιμής q:



Διαφορές δυναμικού  
(μεταξύ των επιπέδων A, B)

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(Η ηλεκτρική εργασία μεταξύ δύο επιπέδων όπως των ξέρουμε)}$$

Αν θεωρήσουμε ένα επίπεδο αναφοράς Κ και θέσουμε στο επίπεδο αυτό μια αυθαίρετη τιμή για το δυναμικό (συνηθώς 0)

Κ επίπεδο αναφοράς

P σημείο παρατηρήσεως

$$V_{PK} = \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi_P - \phi_K$$

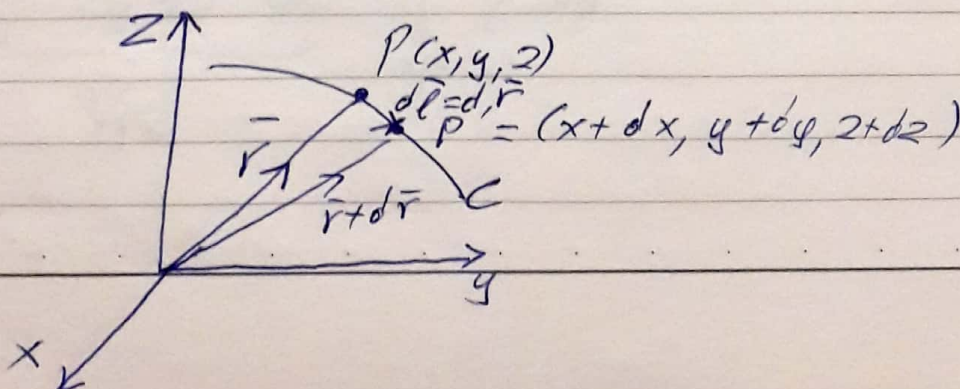
Ορισμός της συνάρτησης δυναμικού

$$\phi_P(x, y, z) = \phi_K + \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Πώς επιλέγεται η αναφορά Κ;

Συνήθως παίρνουμε  $K \rightarrow \infty$  μόνο όταν εφόσον δεν υπάρχουν φορτία στο άπειρο.

Σχέση  $\vec{E}, \phi$





$$V_{pp'} = \phi_p - \phi_{p'} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\downarrow$$
$$\phi - (\phi + d\phi) = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = (\vec{E}_x \cdot \hat{x} + \vec{E}_y \cdot \hat{y} + \vec{E}_z \cdot \hat{z}) \cdot (dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z})$$
$$= -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\boxed{|\vec{E} = -\nabla\phi|}$$

$$\uparrow$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Σημεία φ:

- Βαθμύτι μέγεθος (μια αλμαί υαολογίσκοι)
- Σαφίσταρα φασί κή σφρασία (αχρσίζατα με έργο λενίρα)



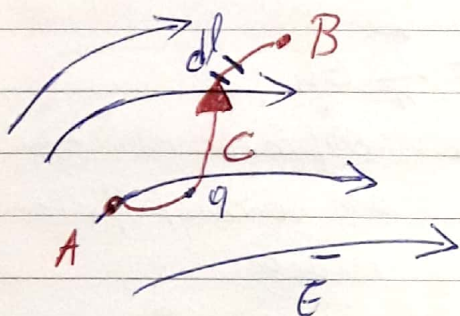
10-10-18

## Σχέση $\vec{E}$ , $\phi$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$$

Γιατί  $\vec{E} = -\nabla \phi$  (και όχι  $\nabla \phi$ ).

Διότι η διαφορά δυναμικού ορίζεται ως:



$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ορίζουμε έτσι τη συνάρτηση δυναμικού (ή απλά δυναμικό) από τη σχέση.

$$\phi(x, y, z)$$



K σημείο αναφοράς  
για το δυναμικό  
(σχεδόν πάντα  $\phi_K = 0$ )

$$\underbrace{\phi(x, y, z) - \phi_K}_{V_{PK}} = \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Άρα το δυναμικό μειώνεται προς τη δ/νση του  $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Αρχή της υπέρθεσης (εφαρμογής):

Ισχύει και για τα δυναμικά

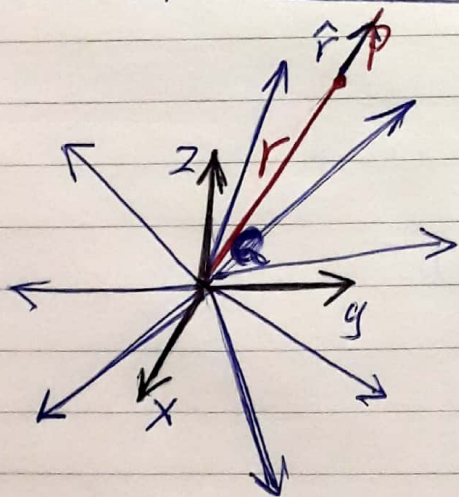
Αρχή της υπέρθεσης για το  $\vec{E}$ :  $\vec{E} = \sum_n \vec{E}_n$   
↑ συνολικό    ↑ επιμέρους πεδία  
από κάθε φορτίο/μέγ.  
μέγ.

$$\begin{aligned}\phi_P &= \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^K \sum_n \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \\ &= \sum_n \int_P^K \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \sum_n \phi_n\end{aligned}$$

( $d\vec{l}$  και όχι  $d\vec{l}_n$  διότι είναι η ίδια κατεύλ.  $P \rightarrow K$ )

•  $K \rightarrow \infty$

Δυναμικό επιφανειακού φορτίου



• Επιλέγουμε ευκλείδειο αναφορικά των δυναμικών  $K$  στο επίπεδο (δίνει  $\neq$  φορτία στο άπειρο)

• Το ολοκλήρωμα είναι ανεξ. της διαδρομής (λόγω του ασφύβιλου), άρα επιλέγουμε την πιο βολική διαδρομή που είναι προς  $dr$ . ( $d\vec{l} = dr \cdot \hat{r}$ )

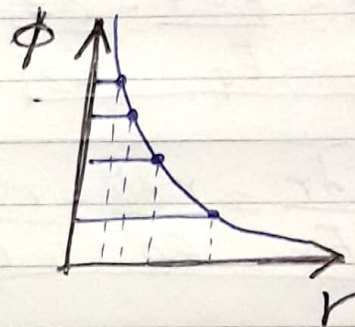
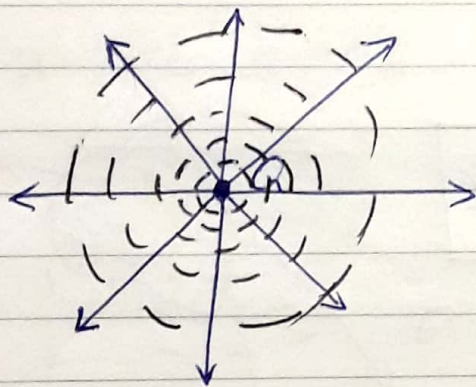


$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) - \phi_{\infty} &= \int_{\rho}^{\infty} \overbrace{\vec{E}}^{\text{Εξωτερικού φορτίου}} \cdot d\vec{l} = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot (dr \hat{r}) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Μορφή του Η/Σ πεδίου (δυναμικές γραμμές & ισοδυναμικές επιφάνειες)

Ισοδυν. επιφάνειες :  $\phi(x, y, z) = \text{σταθ.}$

Σημειακό φορτίο :



Δυναμικές γραμμές :

Καμπύλες στις οποίες το  $\vec{E}$  είναι εφαπτόμενο.

$$\vec{E} \parallel d\vec{l} \quad \text{ή} \quad \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$



## Εξισώσεις των δυναμικών γραμμών

• Καρτεσιανές:  $d\bar{l} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z}$

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{x} + E_y \cdot \hat{y} + E_z \cdot \hat{z}$$

$$\bar{E} \parallel d\bar{l} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}}$$

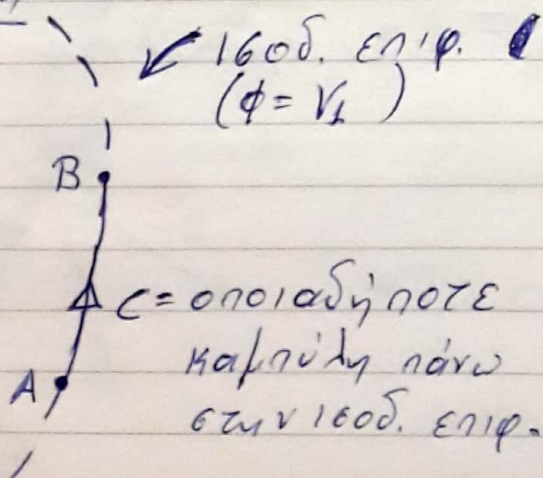
• Κυλινδρικές:  $d\bar{l} = d\rho \cdot \hat{\rho} + \rho d\varphi \cdot \hat{\varphi} + dz \cdot \hat{z}$

$$\boxed{\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}}$$

• Σφαιρικές:  $\boxed{\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}}$

(Δυναμικές γραμμές)  $\perp$  (Ισοδυναμικές επιφάνειες)  
(ορθογώνιες)

Απόδειξη



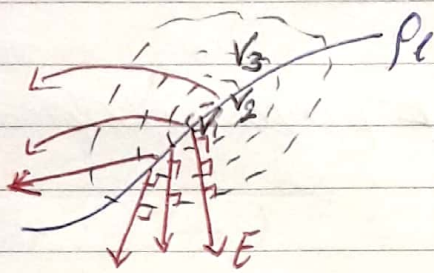


$$V_{AB} = \phi_A - \phi_B = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

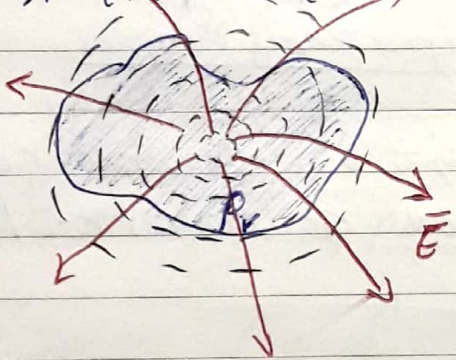
↑  
ως 160δ.  
ΕΠΙΦ.

Παράδειγμα: - γραμμικό φορτίο



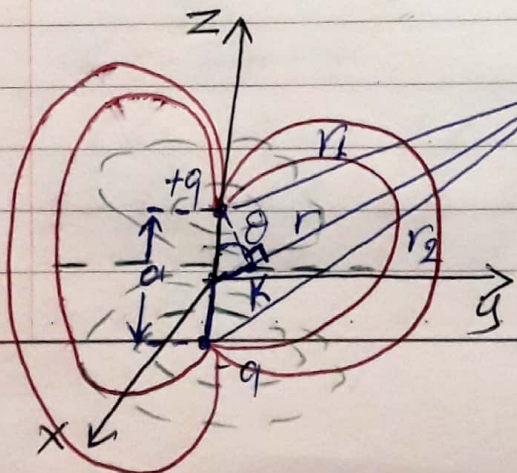
γραμμικός  $\vec{E}$ : κινείται προς 160δ. επιφ.  
(όχι κινεί' ανάγνση στο φορτίο)

- χωρικό φορτίο



Το ηλεκτρικό δίπολο

Δύο ίσα & αντίθετα φορτία  $+q, -q$   
σε απόσταση  $a$  μεταξύ τους.

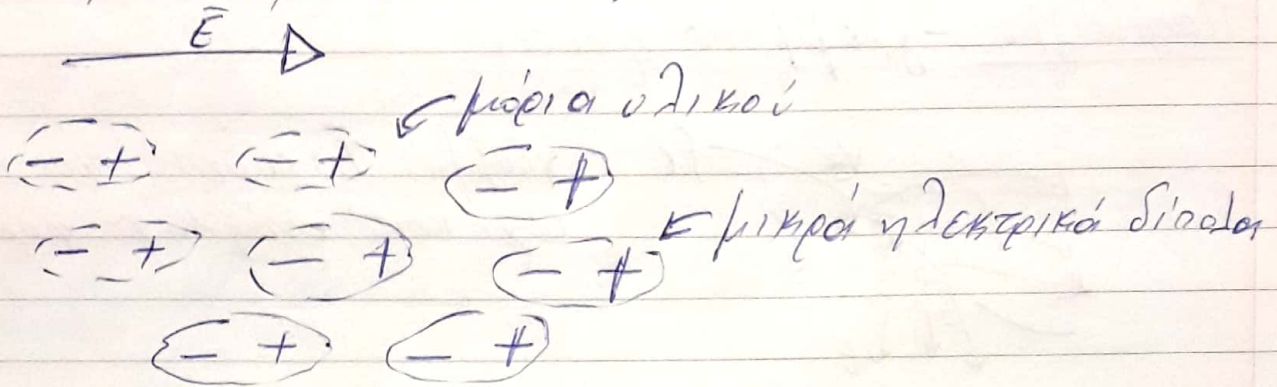


$P(x, y, z)$  ζητούνται  $\vec{E}, \phi$  και σχεδίαση  
(συντεταγμένες "σφαιρικές":  
σε αυτό υπολ. το  $\phi$ )



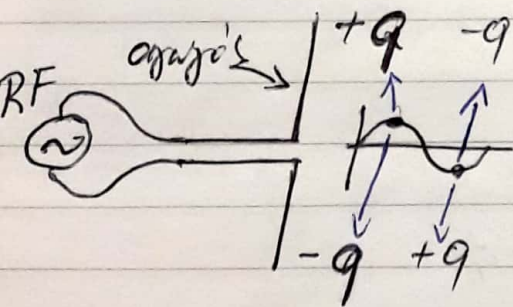
## Σημειώσεις του ηλεκτρικού διόλου

- Στα διηλεκτρικά υλικά (μονωτές) τα μόρια υπό την επίδραση  $\vec{E}$  "πολώνονται" δηλ. προσανατολίζονται προς τη διεύθυνση του πεδίου.



- Στο μαγν. πεδίο δεν υπάρχουν κεραιμένα μαγν. φορτία αλλά μόνο μαγνητικά δίπολα.

- Στα πεδία υψηλών συχνοτήτων το βασικό στοιχείο αλληλοβοήθειας είναι το ταλαντούμενο ηλεκτρ. δίπολο:





Δυναμικό διπόλου: υπέρθεση 2 φορτίων

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( r \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^4}} \right)^{-1/2} - \left( r \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^4}} \right)^{-1/2} \right]$$

(v. συνημιτόνων)

Συνήθως μας ενδιαφέρει η έκφραση στο λεγόμενο "μακρινό πεδίο" (far field).  
 $r \gg a$

Taylor:  $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2}$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \right] =$$

$$= \frac{q \cdot a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

$M = q \cdot a$  διπολική ροπή

Β' τρόπος (far field): γεωμετρικά

$$r_1 \approx (PK) = r - (OK) = r - \frac{a}{2} \cdot \cos \theta$$

Εξισώσεις 160β, επιφ:  $\frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \alpha}{r^2}$

$$\vec{E} = -\nabla \phi =$$

(σε σφαιρ. συντεταγμένες)

$$= - \left( \hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right)$$



$$E_r = - \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q \cdot a}{4\pi\epsilon_0} = \frac{2 \cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{q \cdot a}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

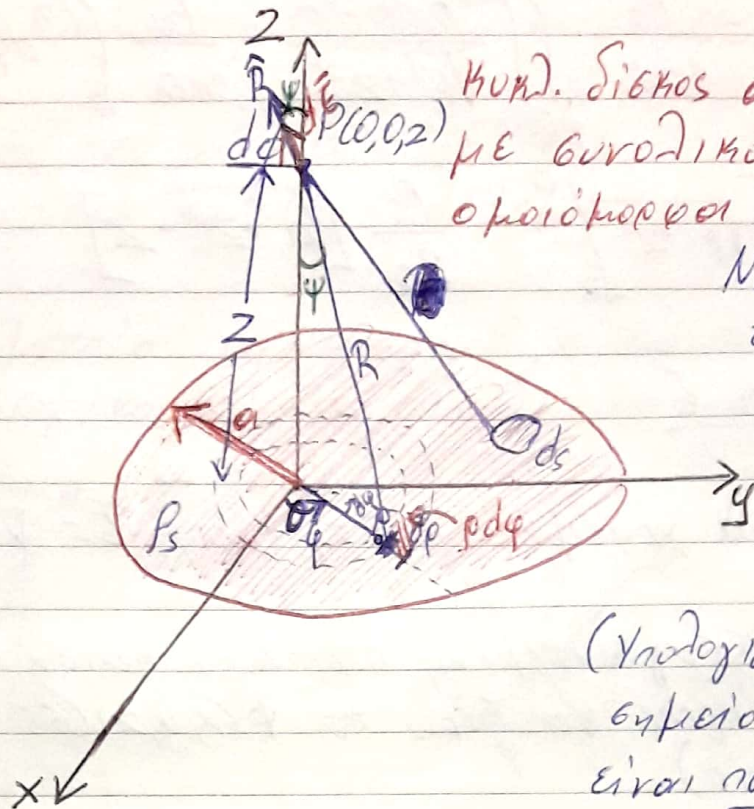
Εξίσωση  
δυναμικών  
γραμμών

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{σταθ} \text{ (δυν. γραμμής είναι σταθ. } \varphi) \\ \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \Rightarrow \ln r = 2 \ln |\sin\theta| + c \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\sin^2\theta}{r} = C_2} \end{array} \right.$$



[4]  
(φωτοδίο)  
(ακτινών)



Κυλ. δίσκος ακτίνας  $a$   
με ομοιόμορφο φορτίο  $\rho_s$   
ομοιομορφα κατανοημένο

Να υπολ.  $\phi, \vec{E}$  σε  
κάποιο σημείο  
 $P(0,0,z)$  του άξονα  $z$

(Υπολογισμός σε οποιοδήποτε  
σημείο του χώρου  $P(x,y,z)$   
είναι πολύ δύσκολο προβλημα)

Εφαρμόζω υπέρθεση: "άθροισμα" των στοιχειωδών  $d\phi$  από  
κάθε στοιχειώδη επιφ.  $ds$

$$dQ = \rho_s ds \text{ (από ορισμό } \rho_s \text{)} \text{ (στοιχειώδες φορτίο } \rightarrow \text{επιφανειακό)}$$

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ (τύπος } \phi \text{ επιφανειακού φορτίου)}$$

$$\phi = \int d\phi$$

Πώς επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων για εύκολη ολοκλήρωση;  
Επιλέγουμε κυλινδρικές συντεταγμένες διότι περιγράφουν  
με τον πιο θλιτό τρόπο τη γεωμετρία (κυλ. δίσκος)

Ομοιομορφη κατανομή:  $\rho_s = \frac{Q}{\pi \cdot a^2}$



$$\phi = \int \int \int \frac{\rho_s \, ds}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[ \sqrt{\rho^2+z^2} \right]_0^a = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{a^2+z^2} - z \right]$$

Υπολογισμός του  $\vec{E}$

Μήπως μπορώ να χρησιμοποιήσω τη σχέση  $\vec{E} = -\nabla\phi$ ;

Απάντηση: Στην συγκεκριμένη περίπτωση κανονικά όχι διότι θα έπρεπε να ξέρω το  $\phi(x,y,z)$  (σε οποιοδήποτε σημείο)

Όμως:  $E_z \Big|_{x=y=0} = - \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{x=y=0} = - \frac{\partial\phi(0,0,z)}{\partial z}$  (οριζόντιες κοίτες παραγωγών)  
( $\vec{E} = -\nabla\phi$ )

Αννί μπορώ να υπολογίσω την  $E_z$  στον άξονα  $z$  αλλά μόνον αυτή.

Από υπέρθεση:  $\vec{E} = \int \int d\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

$\vec{E}$  συγκρατικού φορτίου

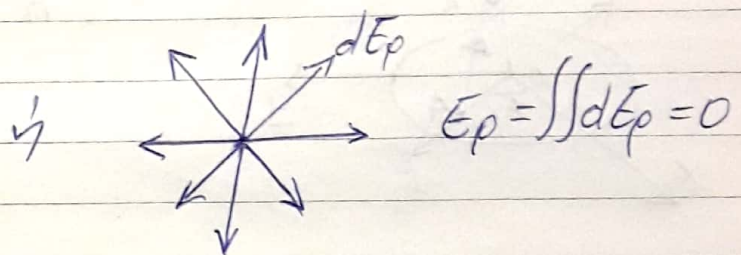
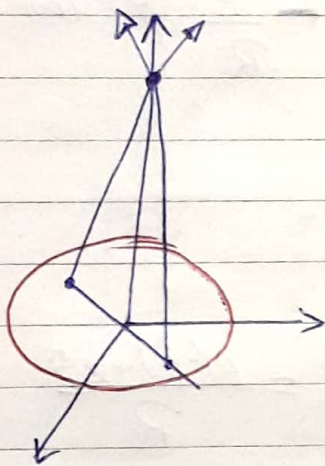


1<sup>ος</sup> τρόπος : αναλύω το  $d\vec{E}$  σε δύο συνιστώσες :

- Στον άξονα z :  $dE_z = |dE| \cos \varphi$

- Στο επίπεδο xy :  $dE_p = |dE| \sin \varphi$

Λόγω συμμετρίας εκ περιφέρειας, οι συνιστώσες  $dE_p$  από δύο αντιδιαμετρικά σημεία αλληλοακυρώνονται.



Αναμένει μόνο η συνιστώσα

$$dE_z = \frac{\rho_s \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \varphi \cdot \frac{z}{R} = \frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$|R| = 1$

$$E_z = \frac{\rho_s \cdot z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

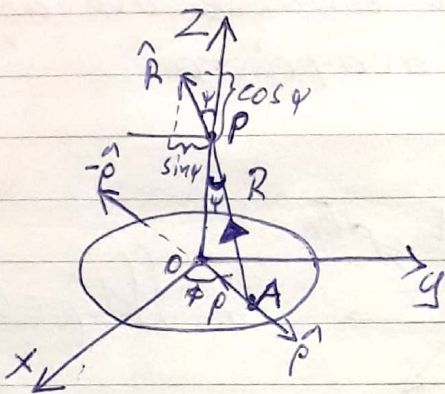
$\downarrow$   
 $\left[ -(R^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^a$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα που θα παίρναμε από τη σχέση  $E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$



2ος τρόπος: Πιο γενικός, ανεξαρτητικός, δεν απαιτεί τη συμμετρία στη περιγραφή.

Γράφουμε απευθείας το διάνυσμα  $\hat{R}$  σε διανυσματική μορφή.



$$\hat{R} = \cos\psi \hat{z} + \sin\psi (\hat{r}) =$$

(Γενικά.)  $= \frac{z}{R} \hat{z} + \frac{\rho}{R} \hat{r}$  (από τις προβολές)

ή πιο εύκολα  $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{AP}}{R} = \frac{\vec{AO} + \vec{OP}}{R} = \frac{\rho(\hat{r}) + z\hat{z}}{R}$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2} \hat{R} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left( \underbrace{\frac{\rho z}{R^3} \rho d\rho d\phi \hat{z}}_{dE_z} - \underbrace{\frac{\rho^2}{R^3} d\rho d\phi \hat{r}}_{dE_\rho} \right)$$

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho z d\rho d\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

ακριβώς αυτό που υπολογίσα πριν.

Αλλά η συνιστώσα στο επίπεδο xy είναι

$$\vec{E}_{xy} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\hat{r} \rho^2 d\rho d\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\hat{r} \rightarrow \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}$

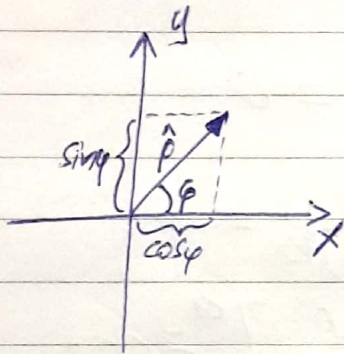
!!! εξαρτάται από  $\phi$  άρα δεν βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα.



Πρέπει να εκφράσω το  $\hat{p}$  μέσω βασικών διανυσμάτων, άρα να το δώσω σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Υπάρχουν τρεις μετατροπές των μοναδιαίων διανυσμάτων από ένα συστ. συντετ. σε άλλο

$$\hat{p} = \cos\varphi \cdot \hat{x} + \sin\varphi \cdot \hat{y}$$

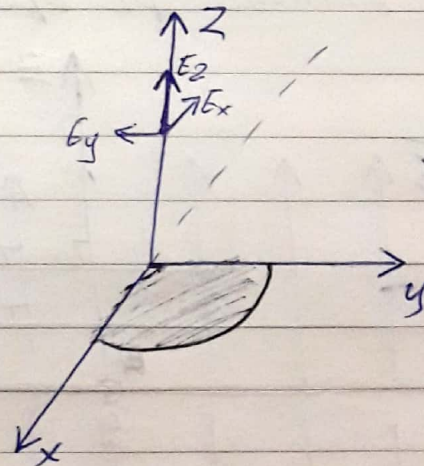
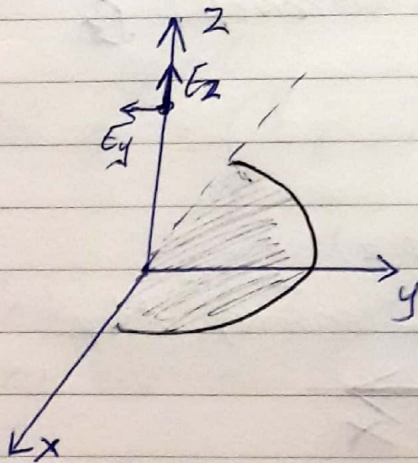


$$E_x = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

$$E_y = \text{||} \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \text{||} = 0$$

- [5] (α) Ημικυκλικός δίσκος  
 (β) Δίσκος τεταρτοκυκλίου

Δεν υπάρχει ευθύμετρο για εκ περιστροφής!





Όπως η [4] αλλά με όρια  $0 \leq \varphi \leq \pi$  για το ημικύκλιο  
 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  τεταρτοκύκλιο

Δυναμικό  $\phi$  (βαθμωτό) Για το ημικύκλιο προκύπτει προφανώς το  $1/2$  του πλήρους δίσκου (τεταρτοκύκλιο  $1/4$ )

Το ίδιο ισχύει προφανώς για τη συνιστώσα  $E_z$ .

Ημικύκλιο :  $E_x = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos\varphi d\varphi \int \dots = 0$

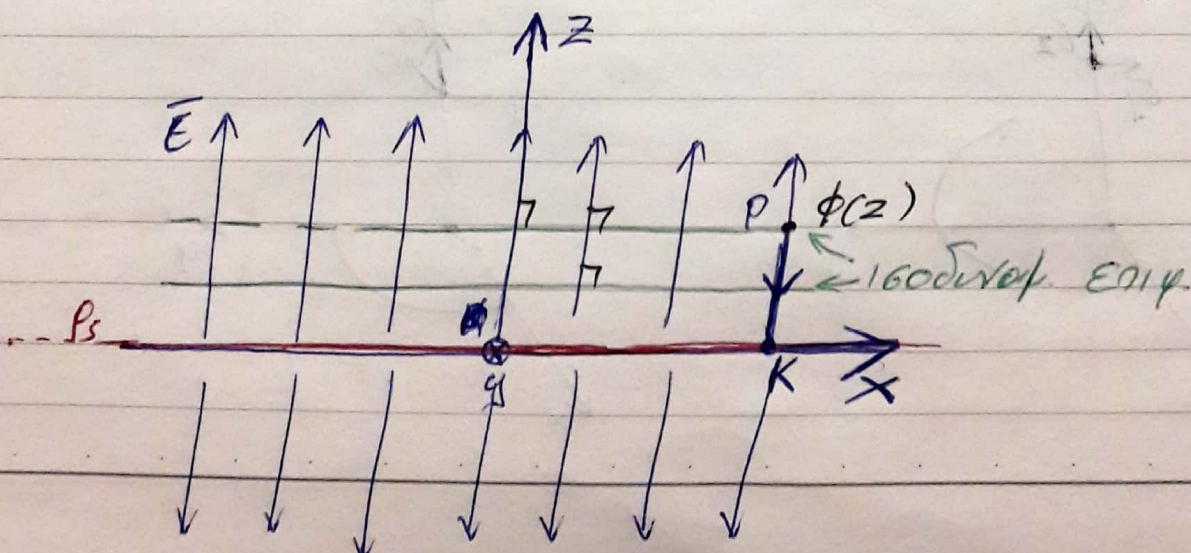
$$E_y = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \left[ \ln(\sqrt{\rho^2+z^2} + \rho) - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \right]_0^a = \dots$$

Τεταρτοκύκλιο :  $E_x = \dots \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \dots = \dots$

$E_y = \dots \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \dots = \dots$

[6] Να υπολογιστούν  $\phi, \vec{E}$  σε οποιαδήποτε ευθεία πάνω από άπειρο επίπεδο με ομοιόμορφη κατανομή  $\rho_s$





Θα πάρουμε το αποτέλεσμα για τον κυκλικό δίσκο ακτίνας  $a$ , για  $a \rightarrow \infty$

$$\phi(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{a^2 + z^2} - z \right]$$

για κυκλικό δίσκο (δίκ. 4)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \phi(z) = \infty$$

Ο υπολογισμός καταρρέει διότι χρησιμοποιεί την έκφραση  $\phi(d\phi)$  για σημειακό φορτίο, ο οποίος έχει ως αναφορά των δυναμικών στο  $\infty$ . Επειδή, όπως έχω φορτία στο άπειρο, αυτό δεν είναι σωστό.

Θα βρω πρώτα το  $E$  (δεν έχει πρόβλημα)

$$E_z(z) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

απομένει με  $z$   
 $E_z$  κυκλ. δίσκου  
 ακτίνας  $a$

$$\phi(z) - \phi_0 = \int_P^{\text{πίσω}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Παίρνω σημείο αναφοράς  $z=0$  (πάνο στο επίπεδο) και την πιο βολική κατεύθυνση

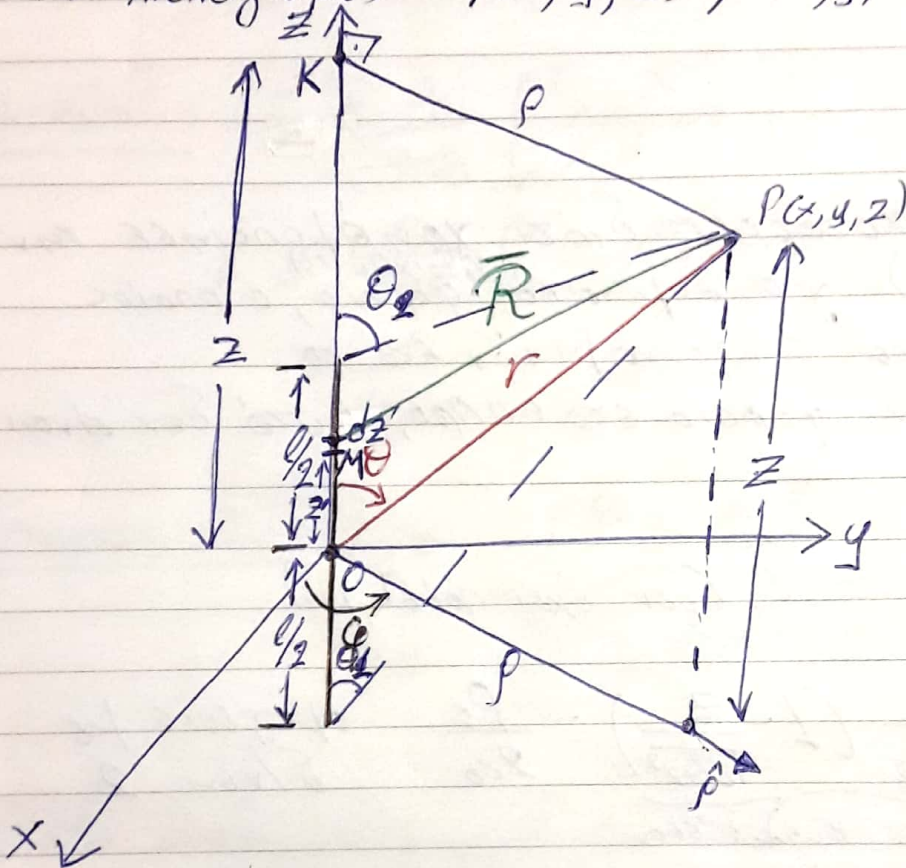
$$d\vec{l} = \hat{z} dz \quad (z \text{ από } z \text{ έως } 0)$$



$$\int_z^0 \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} z \cdot \frac{1}{z} dz = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \cdot z \quad (\text{ισοδ. επιφ. } z = 6 \text{ cm})$$

19-10-18

[7] Γραμμικό φορτίο (ευθύγραμμο, μήκος  $l$ , φορτίο  $Q$  ομοιόμορμα)  
 → Υπολογισμός  $\Phi(x, y, z)$ ,  $\vec{E}(x, y, z)$



Χρησιμοποιούμε  $x, y, z$  για τις συντεταγμένες του επιπέδου παρατηρητή και  $x', y', z'$  για τις συντεταγμένες που διατρέχουν τις ηχές (φορτία  $Q$  ομοιόμορμα)

$$\rho_l = \frac{Q}{l} \quad (\text{από ομοιόμορμη κατανομή})$$

$$dQ = \rho_l \cdot dl = \rho_l \cdot dz'$$



$$\phi(x, y, z) = \int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{το } \rho \text{ } dz'}}{d\phi} = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{R} = *$$

$$R = \sqrt{(\rho x)^2 + (ky)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$$

$$* = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{l}{2} - z + \sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}}{-\frac{l}{2} - z + \sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}}$$

$\vec{E} = -\nabla\phi$  (OK / ξέρω το  $\phi$  παλαιά αλλά τι σχέση  $\nabla\phi$  με κυλινδρικά συντεταγμένες)

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{\rho l dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\vec{R} dz'}{R^3}$$

$$\vec{R} = \vec{MP} = \vec{MK} + \vec{KP} = (z-z')\hat{z} + \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\rho\hat{\rho} - (z'-z)\hat{z} dz'}{[\rho^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} =$$

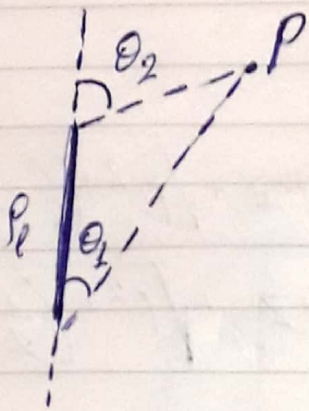
$$= \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \rho\hat{\rho} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} - \hat{z} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{(z'-z) dz'}{[\rho^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left\{ \hat{\rho} \left[ \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right] + \hat{z} \left[ \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right] \right\}$$

$-\cos\theta_2$ 
 $\cos\theta_1$ 
 $\sin\theta_2$ 
 $\sin\theta_1$



Χρήσιμος τύπος: πεδίο ενδύστατης διατάξεως  
κατανάλυσης φορτίου



$$\vec{E} = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \hat{r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \hat{z} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \right]$$

[8] Άπειρο γραμμικό φορτίο  $\rho_l$

$$\phi = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{l}{2} - z + \sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}}{-\frac{l}{2} - z + \sqrt{\rho^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \rightarrow \infty = \infty$$

τύπος για το  $\phi$  πεπερασμένου γραμμ. φορτίου

Απομένει ελεύθερη ύπαρξη φορτία στο  $\infty$

Υπολογίστε το  $\vec{E}$

Όταν  $l \rightarrow \infty$   $\theta_1 \rightarrow 0$ ,  $\theta_2 \rightarrow \pi$

$$\vec{E} = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \hat{r} (1 - (-1)) + \hat{z} (0 - 0) \right] = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$



## Υπολογισμός $\phi$ από το $\vec{E}$

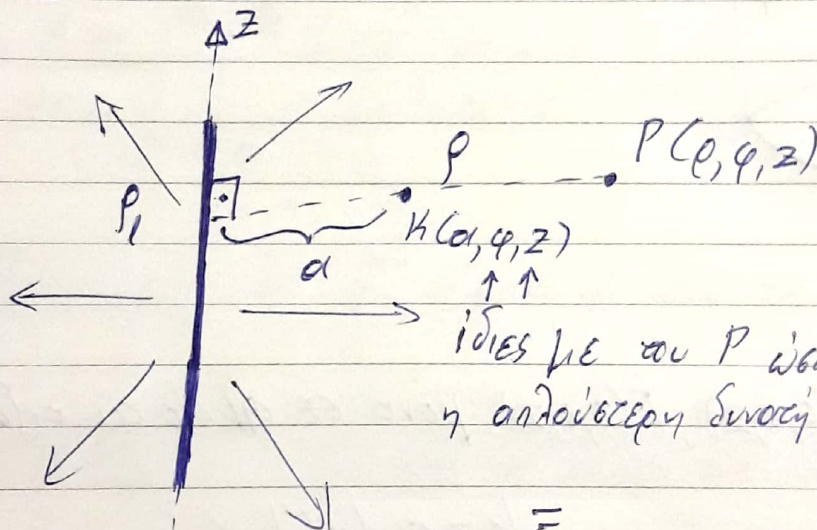
$$\phi(x, y, z) - \phi_K = \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Πάντα παίρνω  $\phi_K = 0$  (στο σημείο αναφοράς)

Σημείο αναφοράς  $K$ : δεν μπορεί να είναι στο  $\infty$  (διότι υπάρχουν φορτία στο  $\infty$ )

Εδώ όμως δεν μπορεί να είναι πάλι στο  $\infty$  γιατί φορτίο ( $\rho=0$ ), διότι έχω απειρισμό του  $\vec{E}$ .

Έστω σημείο αναφοράς  $K$  απόσταση  $a$  από τον άξονα.

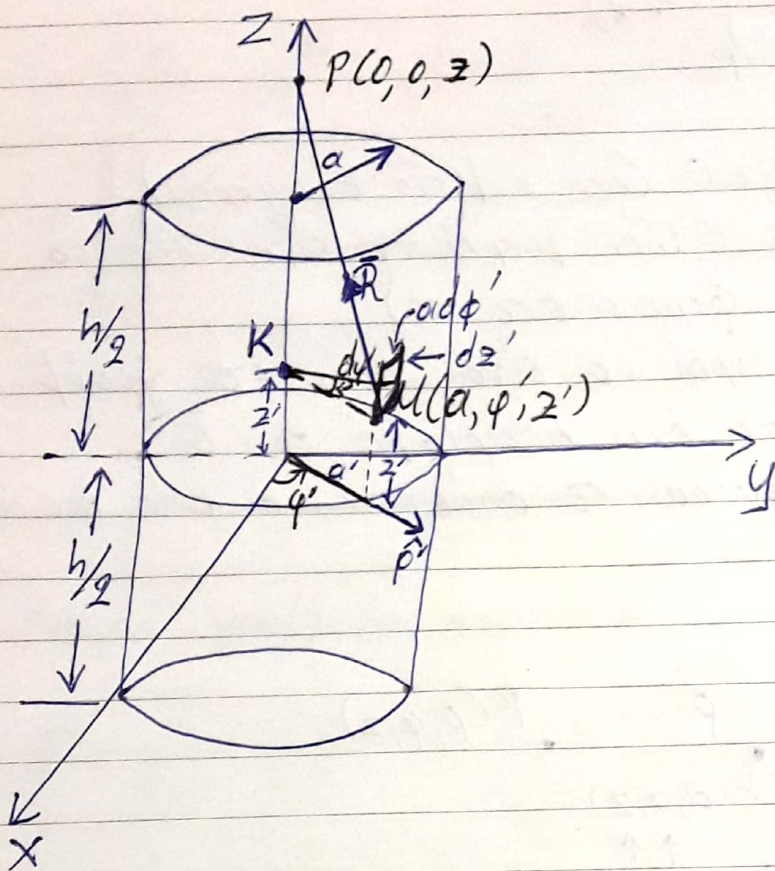


ίδιες με του  $P$  ώστε η διαδρομή να είναι η απλούστερη δυνατή:  $d\vec{l} = dr \cdot \hat{r}$

$$\phi(\rho, \varphi, z) - \phi_K = \int_P^K \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho}^a \frac{dr}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho}$$



[9] Επιφανειακό φορτίο  $\rho_s$  κατανεμημένο σε κύλινδρο ακτίνας  $a$  και ύψους  $h$ .



Υπολογισμός  $\phi(0, 0, z)$ ,  $\vec{E}(0, 0, z)$  μόνο σε επίπεδο του αξονα  $z$ .

$$\rho_s = \frac{Q}{2\pi a \cdot h} \leftarrow \text{επιφάνεια}$$

$$ds = a d\phi' dz'$$

$$dQ = \rho_s \cdot ds$$

$$\vec{R} = \vec{MK} + \vec{KP} = -a\hat{\rho}' + (z - z')\hat{z}$$

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$$



$$\phi(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dQ}{R} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z'=-h/2}^{h/2} \frac{a d\varphi' dz'}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} =$$

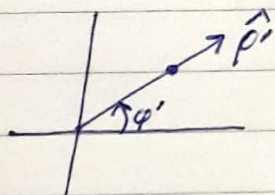
$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} = \dots$$

$$\left[ \ln \left( \sqrt{(z-z')^2 + a^2} + z' - z \right) \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z'=-h/2}^{h/2} \frac{\vec{R} \cdot a \cdot d\varphi' dz'}{R^3} =$$

$$= \frac{\rho_s \cdot a}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z'=-h/2}^{h/2} \frac{[-a\hat{\rho}' + (z-z')\hat{z}'] d\varphi' dz'}{[a^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} = *$$

Προσοχή! Το  $\hat{\rho}'$  εξαρτάται από το  $\hat{\varphi}'$



$$\hat{\rho}' = \cos\varphi' \cdot \hat{x} + \sin\varphi' \cdot \hat{y}$$

(ως προς τις ευρωθείες  $\hat{x}, \hat{y}$ )

$$* = \frac{\rho_s \cdot a}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\hat{x} a \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz'}{[a^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} - \hat{y} a \int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' \dots \right.$$

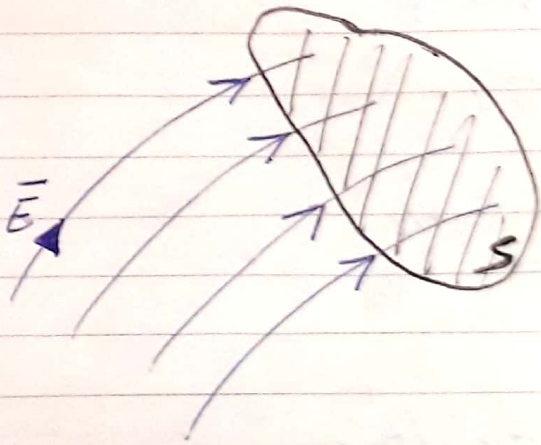
$$\left. - \hat{z} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z'-z) dz'}{[a^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} = \dots \right.$$



24-10-18

# Η έννοια της ηλεκτρικής ροής

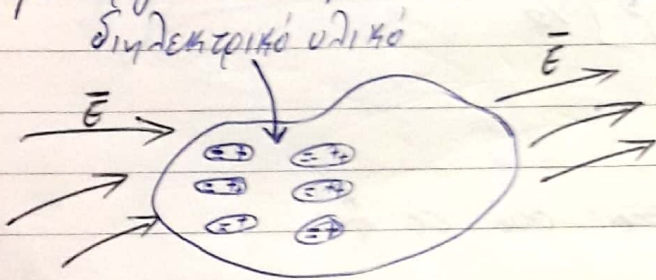
## Αιλεκτρική μετατόπιση



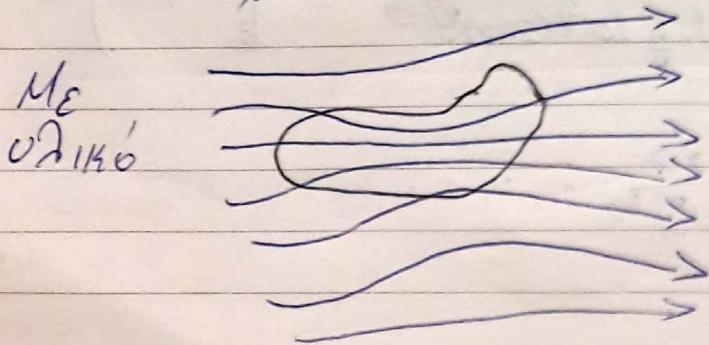
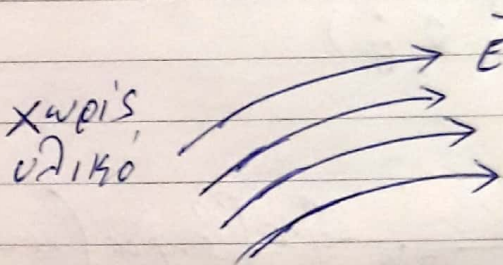
Η έννοια της "ροής" (flux) του ηλ. πεδίου μέσα από μία επιφάνεια.

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου πάνω στην επιφάνεια αυτή.

Αλληλεπίδραση πεδίου με διηλεκτρικά υλικά (μονωτές):  
Τα μόρια προσανατολίζονται προς τη दिνεύη του πεδίου δημιουργώντας <sup>(μικρά)</sup> ηλεκτρικά δίπολα.



Το μακροσκοπικό αποτέλεσμα είναι το διηλεκτρικό μέσο να παρουσιάζει υψηλότερη συγκέντρωση του πεδίου στο εσωτερικό του, και έτσι υψηλότερη "υχνότητα ηλεκτρικής ροής".





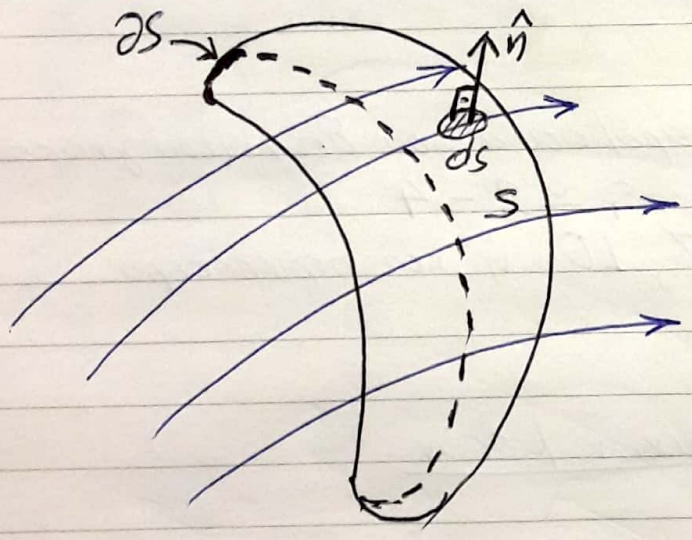




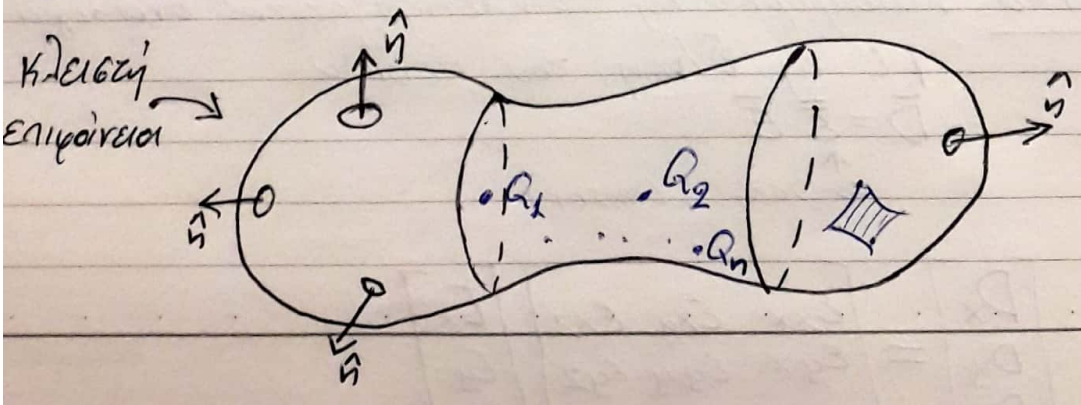
$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \left( \begin{array}{l} \text{"νομοθετατική" ΕΞΙΣΩΣΗ} \\ \text{constitutive relation} \end{array} \right)$$

- πυκν. ροής } - ένταξη πεδίου
- "αποτελ." } - "αίτιο"
- αποκτά } - αποκτά φυσική σημασία μέσω της
- φυσ. σημασία } διαφορικής διαφορικού (ενικά ολόκληρ.)
- μέσω ροής }  $V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- από επιφάνεια }  $\iint \vec{D} \cdot d\vec{S}$

Ορισμός της ηλεκτρικής ροής



Ο Νόμος του Gauss (για το Η/Σ πεδίο)

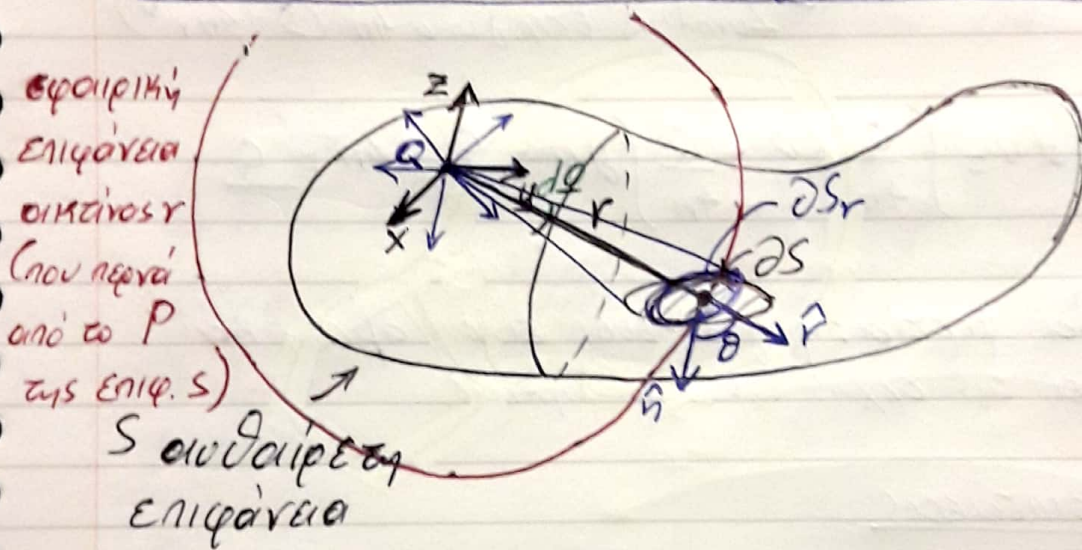




Για κάθε κλειστή επιφάνεια  $S$ , η ροή του πεδίου  
 ισούται με το άθροισμα των φορτίων που περικλείει

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum_i Q_i$$

Απόδειξη του v. Gauss (για ένα σφαιρικό φορτίο)



Θέλω να δείξω ότι  $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \epsilon \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Στοιχειώδης ροή (διαφορικό)

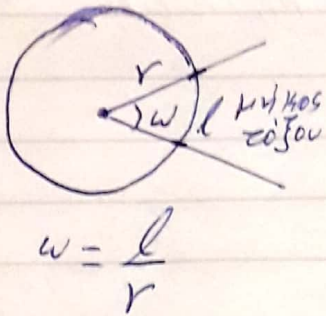
$$dN = \vec{D} \cdot d\vec{s} = \vec{D} \cdot \hat{n} \cdot ds = \frac{Q}{4\pi} \frac{\overbrace{\hat{r} \cdot \hat{n}}^{\cos\theta}}{r^2} ds$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \frac{ds \cos\theta}{r^2} = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{ds_r}{r^2} \right) = \frac{Q}{4\pi} d\Omega$$

είναι η στερεά γωνία με την οποία  
 το  $Q$  βλέπει την επιφάνεια  $ds_r$

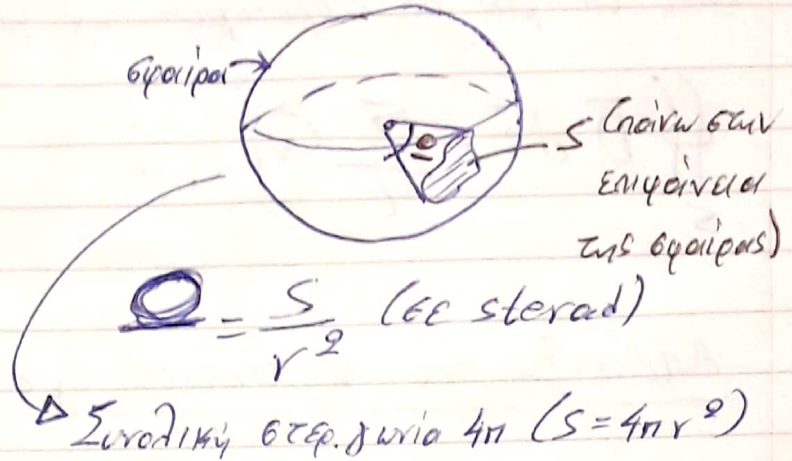


## Οριζόντιος γωνίας



$$\omega = \frac{l}{r}$$

## Οριζόντιος στερεός γωνίας



$$\Omega = \frac{S}{r^2} \text{ (σε sterad)}$$

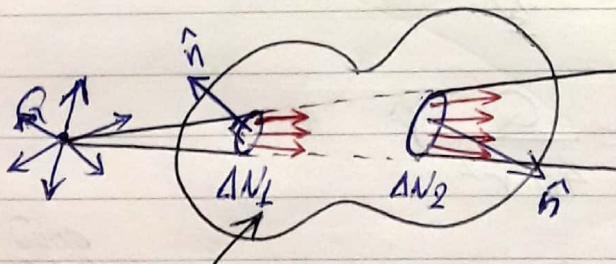
Συνολική στερεογωνία  $4\pi$  ( $S=4\pi r^2$ )

$$\text{Τελικά } N = \int dN = \int \frac{Q}{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{4\pi} \int d\Omega = \frac{Q}{4\pi} \cdot 4\pi = Q$$

- Για πολλαπλά φορτία: η γενίκευση είναι άμεση και προφανής βάσει της αρχής της επαλληλίας.

## Ειδικές περιπτώσεις

- Φορτίο έξω από επιφάνεια.

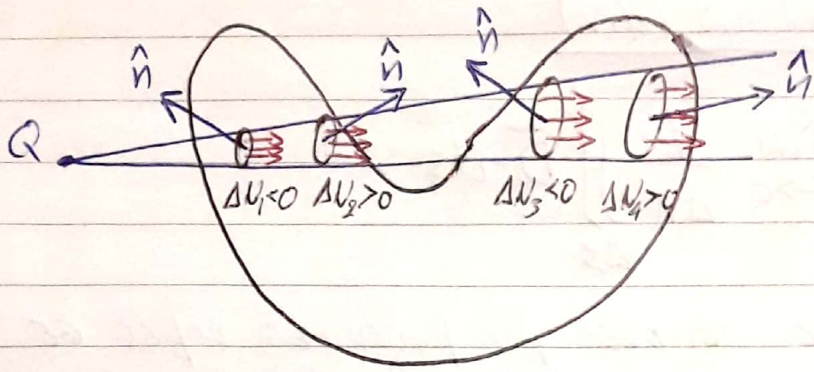


Α φορτίο στο εσωτερικό

$$\Delta N_1 = -\Delta N_2$$

και άρα είναι λογικό  
ότι  $\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$





$$\Delta N_1 = -\Delta N_2$$

$$\Delta N_3 = -\Delta N_4$$

$$\text{Άρα, } \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ο v. Gauss αφορά τα φορτία που είναι μέσα στην επιφάνεια.

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum_i Q_i = \iiint_V \rho dV$$

$\uparrow$  εντός της S  
 $\uparrow$  Εξωτερικά Χωρικά  
 $\uparrow$  ο χώρος που περιβάλλει η S

(ολοκληρωτική μορφή) ⇒

Θεώρημα ανώκλησης (Gauss)

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{D} dV$$

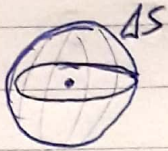
$$\Rightarrow \iiint_V (\nabla \cdot \vec{D} - \rho) dV = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho}$$

V ≠



# Η έννοια της απόκλισης (div)

Ορισμός  $\nabla \cdot \vec{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{s}$

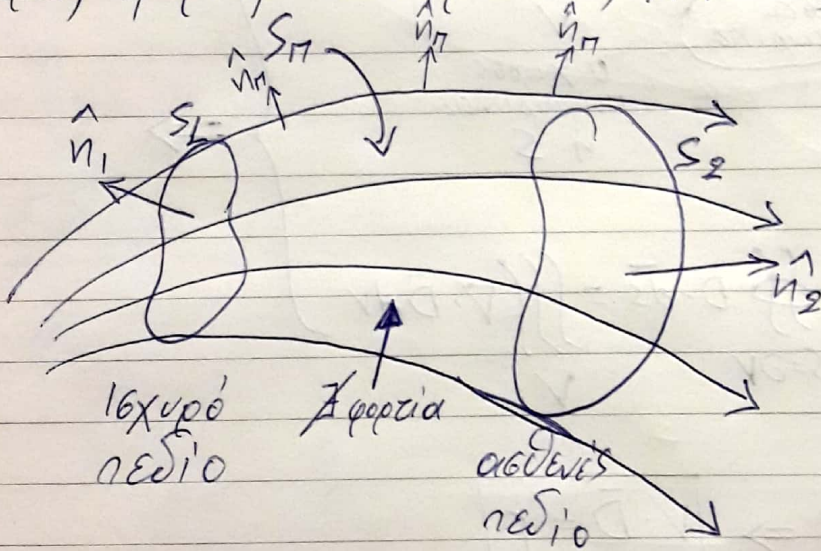


$\Delta V \rightarrow 0$

Τείνει να παίρνει τη μεσοκλίση της σε περιοχές που υπάρχει "εύκλιση" ή "απόκλιση" των δυναμικών γραμμών. (λόγω της παρουσίας φορτίων)

Σε περιοχές χωρίς χωρικά φορτία  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$   
(ομογενέστερη περίπτωση)

Άρα, η ροή διατηρείται, σχηματίζοντας "ωλύγες ροές"



$$\oint_{S_1+S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow$$

$\Delta$  δίνει  $D \perp \hat{n}$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{D} \cdot (-\hat{n}_1) ds = \iint_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{n}_2 ds \Rightarrow N_1 = N_2$$

$S_1$  ροή που μπαίνει       $S_2$  ροή που βγαίνει



Η ροή σε βωλήνοι ροής διατηρείται.

Άρα σε χώρο χωρίς φορτία είναι (επίσης από ασφρόβι) και βωλήνοαδής. ( $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ )

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

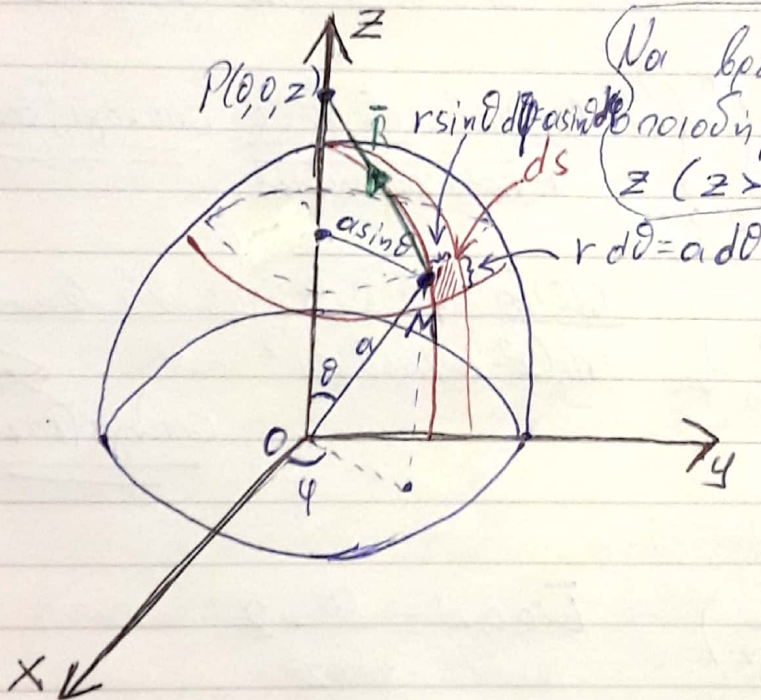
30-10-18

[10] Επιφανειακό φορτίο  $Q$  (συνολικό)

σε σφαίρα ακτίνας  $a$ .

(α) Ομοιόμορφη  $\rho_s$

(β)  $\rho_s = \rho_0 \cos \theta$



$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

(α)  $\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}$  ← Επιφ. της σφαίρας

(β)  $Q = \iint \rho_s(\theta) ds = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_0 \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi a^2 \rho_0 \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos \theta) \sin \theta d\theta \right\} = 2\pi \rho_0 a^2 \Rightarrow \rho_0 = \frac{Q}{2\pi a^2}$



Για τον υπολογισμό των  $\phi, \bar{E}$  κανονικά θα έπρεπε να χρησιμοποιήσω  $r', \theta', \varphi'$  - δεν υπάρχει εύχρηστη σχέση  $P(\theta, \varphi, z)$ , χρησιμοποιώ  $r, \theta, \varphi$ .

$$\bar{R} = \bar{MP} = \bar{MO} + \bar{OP} = a \cdot (-\hat{r}) + z \cdot \hat{z}$$

$$\hat{r} = \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \hat{x} + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \hat{y} + \cos\theta \cdot \hat{z}$$

$$\bar{R} = -a \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \hat{x} - a \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \hat{y} + (z - a \cos\theta) \hat{z}$$

$$R = |\bar{R}| = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + a^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + (z - a \cos\theta)^2} = \sqrt{z^2 - 2az \cos\theta + a^2}$$

$$\phi(\theta, \varphi, z) = \iint \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho_s(\theta) \cdot a^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 - 2az \cos\theta + a^2}} \quad \text{υπολογίζεται}$$

$$\bar{E}(\theta, \varphi, z) = \iint \frac{\bar{R} \rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho_s(\theta) [a \cos\theta \sin\theta \cdot \hat{x} + a \sin\varphi \sin\theta \cdot \hat{y} + (z - a \cos\theta) \hat{z}] a^2}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - 2az \cos\theta + a^2)^{3/2}} \sin\theta d\theta d\varphi \quad \text{υπολογίζεται}$$

Τελικό αποτέλεσμα

$$\left( \text{για } \rho_s = \sigma a \theta = \frac{Q}{4\pi a^2} \right) \quad \bar{E}(\theta, \varphi, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα προκύψει πολύ ευκολότερα από ν. Gauss.

Λόχι όπως για την περίπτωση (β): ευγένεια μόνον εκ περιστροφής, όχι "πλάτους" - ελαστική ευγένεια



[14] Ομοιομορφη  $\rho_s$  σε σφαιρα ακτινας  $a$ .

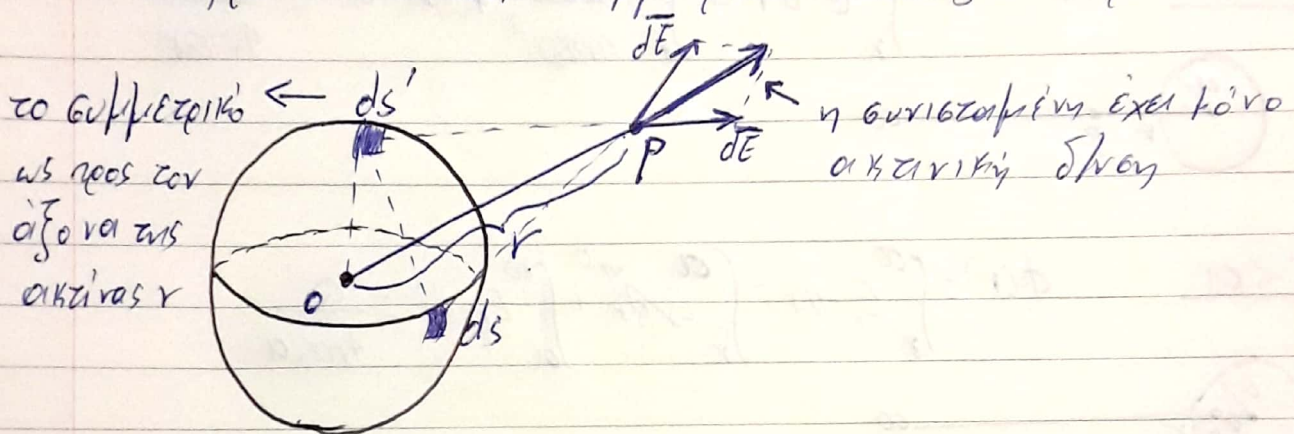
$\vec{E}$  σε οποιοδήποτε επιφειο

$\phi$  " " "

(με ν. Gauss)

Ο ν. Gauss εφαρμόζεται για τον υπολογισμό του  $\vec{E}$  σε περιπτώσεις:


- πλήρους σφαιρικής συμμετρίας (όχι αλλαγές περιτρόφης) ← ανεξ. των  $\theta, \phi$
- πλήρους κυλινδρικής συμμετρίας (όχι μεταφερόμενο μήκος) ← ανεξ. των  $\phi, z$
- πλήρους επίπεδης συμμετρίας (διατάξεις άπειρων επιπέδων).



Υπάρχει απόλυτη σφαιρική συμμετρία:  $\rho_s$  ανεξ. των  $\theta, \phi$ .  
 άρα θα είναι  $\vec{E} = E_r(r) \cdot \hat{r}$

↑ ανεξ. των  $\theta, \phi$  προς την ακτινική διεύθυνση

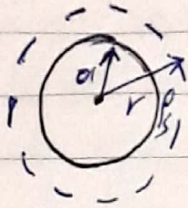
Δύο περιπτώσεις

•  $r < a$   Εφαρμόζω ν. Gauss σε σφαιρα ακτινας  $r < a$  όπου  $\vec{E} = E_r \hat{r}$ .

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{in} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{σταθ}}}{D_r} \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{E_r = 0}$$



$r > a$



$$Q = 4\pi a^2 \rho_s$$

$$\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = Q \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

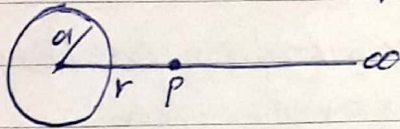
$$\phi(r) - \phi_{\infty} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↑  
δυναμικό  
απόφορτίσ

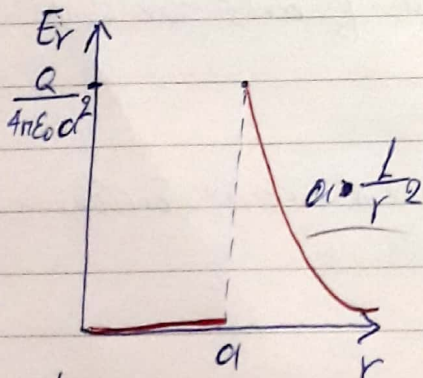
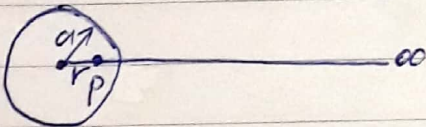
$d\vec{l} = dr \cdot \hat{r}$   
η πιο απλή διαδρομή  
(πάρω στην ακτίνα)

( $k \rightarrow \infty$ : οκ δίνει  $\vec{A}$  φορτίο στο  $\infty$ )

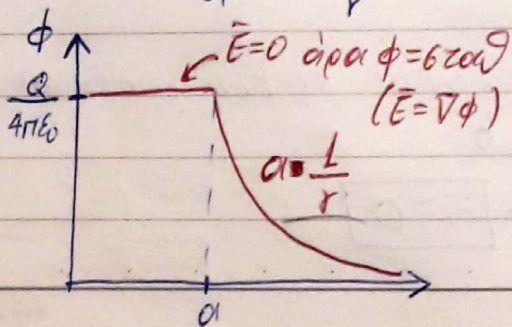
$r > a$   $\phi(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$



$r < a$   $\phi(r) = \int_r^{\infty} E_r \cdot dr = \int_r^a E_r \cdot dr + \int_a^{\infty} E_r \cdot dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a}$



Σε επιφανειακή κατανομή  
φορτίων  $\rho_s$  υπάρχει αενέχεια  
του  $E$



Η  $\phi$  είναι πάντα  
συνεχής συνάρτηση



[15] Σφαίρα με ομοιόμορφο χωρικό φορτίο  
 Ακτίνα  $R$  }  $E(r)$ ,  $\phi(r)$  ναρτά  
 φορτίο  $Q$

Νόμω Gauss  $\vec{E} = E_r(r) \cdot \hat{r}$

V. Gauss

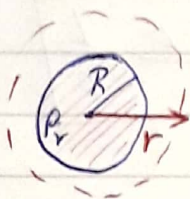
$r < R$



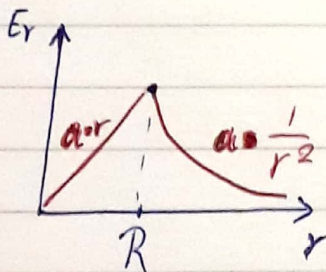
$$\rho_v = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\epsilon_0 E_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_r = \frac{\rho_v \cdot r}{3\epsilon_0}$$

$r > R$



$$\epsilon_0 \cdot E_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E_r = \frac{\rho_v \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$



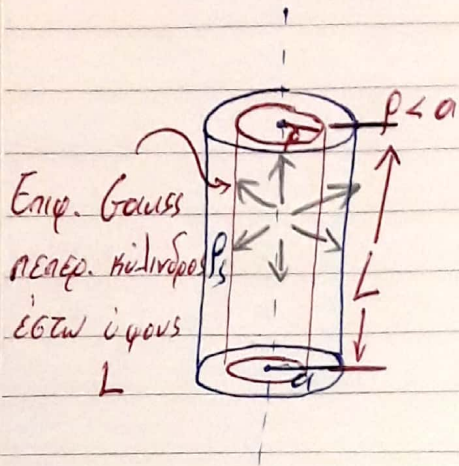
$\phi(r)$ : (από έσω προς τα έξω)

$r > R$   $\phi(r) = \int_r^{\infty} \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} dr = \frac{\rho_v R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$

$r < R$   $\phi(r) = \int_r^R \frac{\rho_v \cdot r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^{\infty} \frac{\rho_v \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_v R^2}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + \frac{\rho_v R^3}{3\epsilon_0}$



[21] Ομοιόμορφη  $\rho_s$  σε κύλινδρο (άπειρο)



Λόγω ευφμεταίας  
 $\vec{E} = E_\rho(\rho) \cdot \hat{\rho}$

η ροή από τις βίσεις του κύλινδρου είναι μηδεν.

•  $\rho < a$   $\iint_{\text{κύλινδρος}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{κύλινδρος}} \Rightarrow \epsilon_0 \cdot E_\rho \underbrace{2\pi\rho L}_{S_\sigma} = 0 \Rightarrow \boxed{E_\rho = 0}$

•  $\rho > a$   $\epsilon_0 E_\rho \cdot 2\pi\rho L = \rho_s \cdot 2\pi a L \Rightarrow \boxed{E_\rho = \frac{\rho_s \cdot a}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho}}$

$\phi(\rho) - \phi_K = \int_{\rho}^K \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\rho}^K E_\rho d\rho$   
 (για αρχή διαδρομής)

Έχω φορτία στο  $\infty$

Παίρνω ευθεία αναφοράς Κ οποιαδήποτε άλλο ευθεία, π.χ. το  $\rho = a$

$\phi(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} E_\rho d\rho$

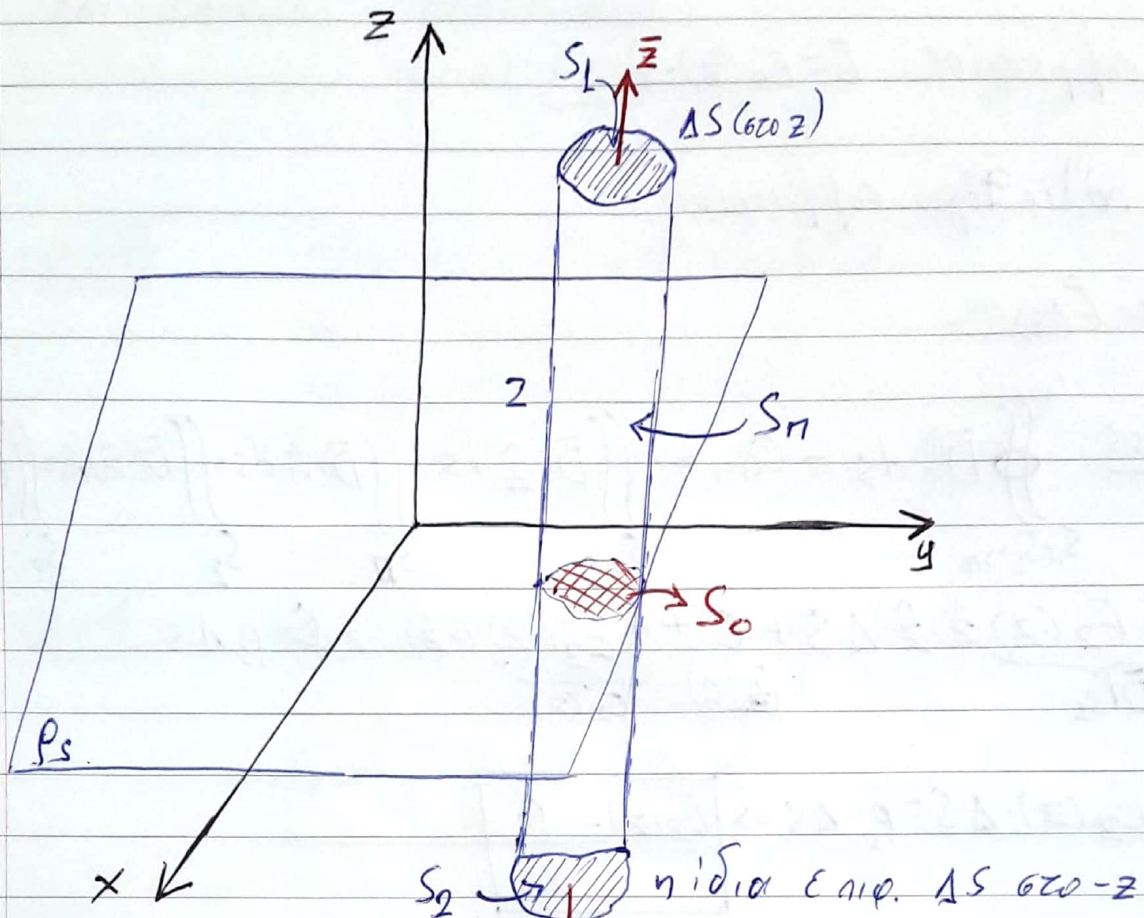
•  $\rho < a$   $\phi(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} 0 \cdot d\rho = 0$

•  $\rho > a$   $\phi(\rho) = \int_{\rho}^a \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \frac{1}{\rho} d\rho + \int_a^{\infty} 0 d\rho = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho}$

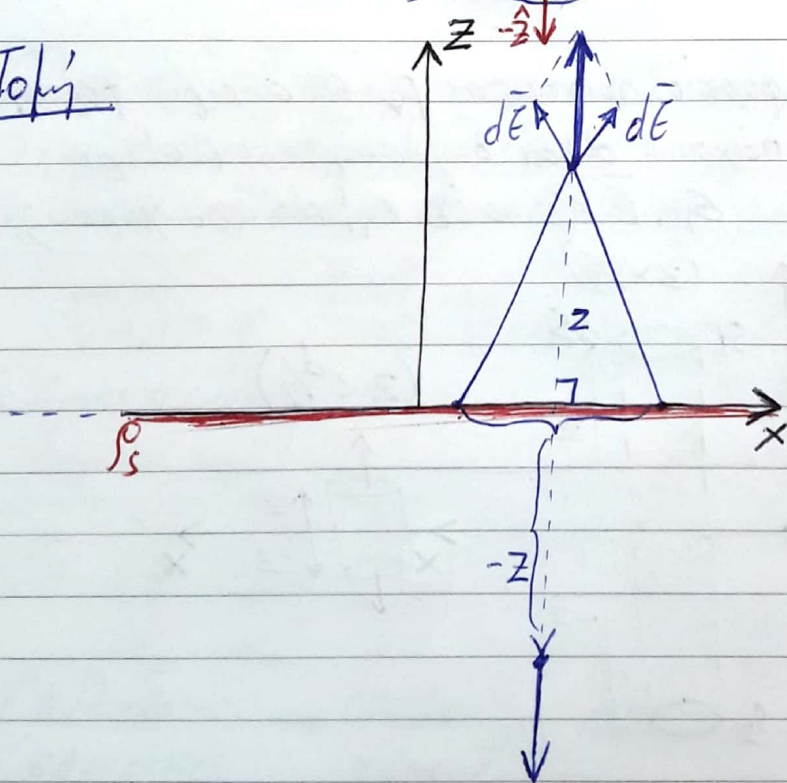


2-11-18

[18] Άπειρο επίπεδο ( $z=0$ ) με ομοιόμορφη επιφ. κατανομή  $\rho_s$ .



Τομή





Τέλειο επίπεδη συμπίεση

Λόγω συμπίεσης  $\vec{E} = E_z(z) \cdot \hat{z}$

Επίσης, ομοί λόγω συμπίεσης

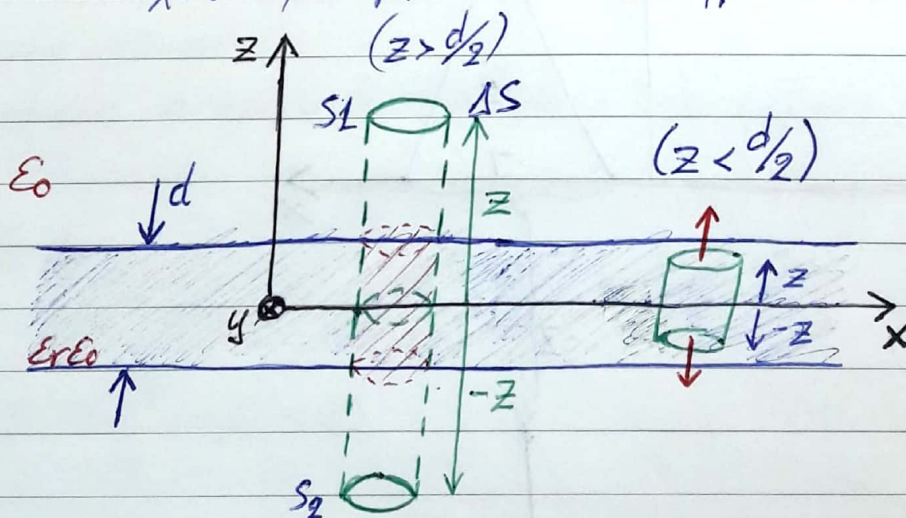
$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$$

N. Gauss:  $\oiint_{S_1+S_2+S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{in} \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{D} \cdot \hat{z} ds + \iint_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{n} ds + \iint_{S_3} \vec{D} \cdot (-\hat{z}) ds = \iint_{S_3} \rho_s ds$

$$\Rightarrow \underbrace{\epsilon_0 \cdot E_z(z)}_{\vec{D}|_{S_1}} \cdot \underbrace{\hat{z} \cdot \hat{z}}_{(\hat{z}|\hat{z})} \Delta S + 0 + \underbrace{\epsilon_0 E_z(-z)}_{\vec{D}|_{S_2}} \cdot \underbrace{(-\hat{z}) \cdot (-\hat{z})}_{(\hat{z}|\hat{z})} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

$$\Rightarrow 2\epsilon_0 E_z(z) \cdot \Delta S = \rho_s \cdot \Delta S \Rightarrow \boxed{E_z(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}}$$

Παρατήρηση: Χωρικό φορτίο πυκνότητας  $\rho_v$  σε επίπεδη φορτισμένη ομογενή πάχους  $d$  και διηλεκτρικής σταθεράς (σχετικής)  $\epsilon_r$ .  $\vec{E}$  σε κάθε σημείο του χώρου;





Νόμος ευθυμετρίας  $\vec{E} = E_z(z) \cdot \hat{z}$

και ενιγής  $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

$$\vec{E}(-z) = \underbrace{E(-z)}_{E'(z)} \cdot (-\hat{z})$$

$z > \frac{d}{2}$

$$\epsilon_0 E(z) \Delta S + \epsilon_0 E(-z) \Delta S = \rho_v \Delta S \cdot d$$

(και τα δύο πετρώτη όγκος του κυλίνδρου με φορτίο που βγαίνει από τον κυλίνδρο)

$$\Rightarrow 2\epsilon_0 E(z) \Delta S = \rho_v d \Delta S \Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\rho_v \cdot d}{2\epsilon_0}}$$

$z < \frac{d}{2}$

$$\epsilon_0 \epsilon_r E(z) \Delta S + \epsilon_r \epsilon_0 \underbrace{E(-z)}_{E''(z)} \Delta S = \rho_v \Delta S (2z)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z(z) = \frac{\rho_v \cdot 2z}{2\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\rho_v \cdot z}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

Όλες οι εξισώσεις του Η/Σ μεδίου αν συνδυαστούν δίνουν την Εξίσωση Poisson-Laplace που είναι τελικά η διαφ. εξίσωση του Η/Σ μεδίου.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = -\rho} \quad \text{Γενική Εξ. Poisson}$$

(v. Gauss σε σφαιρική/διαφορική κορφή) Συνήθως  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  (σταθ. και οι περιελές)

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

(Κυλινδρικές  $\rightarrow$  έτοιμοι)  
(σφαιρικές  $\rightarrow$  τμήσι)

\*\*

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad \text{Poisson}$$

Στην περίπτωση των περιπτώσεων  $\rho=0$ .

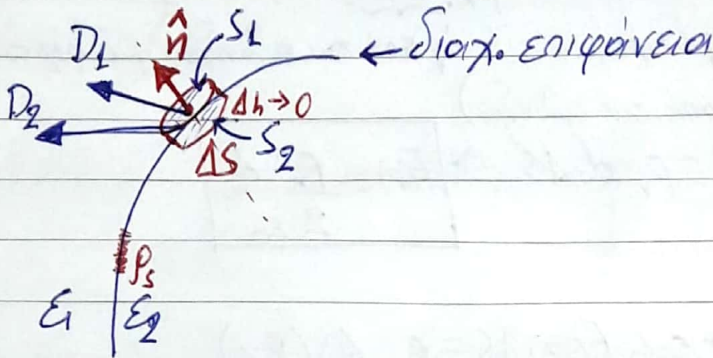
$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad \text{Laplace}$$



## Συνοριακές συνθήκες στο Η/Σ πεδίο

↳ συνθήκες συνέχειας ή μη στις διαχωριστικές επιφ. δύο διαφορετικών μέσων (υλικών).

\* Συμπληρώνουν την εξ. Poisson/Laplace



Πώς συνδέονται τα μεγέθη  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  στις δύο πλευρές της διαχωρ. επιφάνειας;

Εφαρμόζω ν. Gauss σε κύλινδρο πολύ μικρού ύψους με ίσες βάσεις εκατέρωθεν της διαχωρ. επιφάνειας.

$\hat{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη διαχωρ. επιφ. με κατεύθυνση από το μέσο 2 προς το μέσο 1 άρα  $\hat{n}_1 = \hat{n}$  και  $\hat{n}_2 = -\hat{n}$

$$\iint_{S_1+S_2+S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_0} \rho_s dS \implies \vec{D}_1 \cdot \hat{n} \Delta S + \vec{D}_2 \cdot (-\hat{n}) \Delta S = \rho_s \Delta S \implies \boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_s}$$

(~~7~~ ρού από παράλληλη επιφάνεια επειδή αυτή είναι αλειροβάτ.)

Προσοχή: Ποτέ δεν εμφανίζονται και οι τρεις όροι.

Δύο περιπτώσεις: - Διαχωρ. επιφάνεια 2 διηλεκτρικών μέσων.

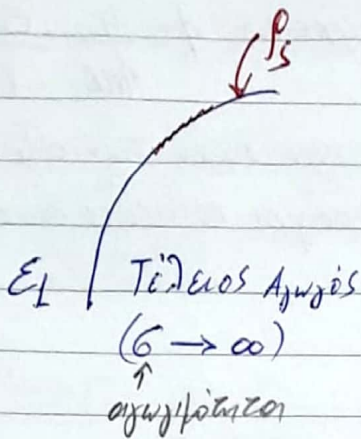
Δεν υπάρχει  $\rho_s$  (εκτός από ειδικές περιπτώσεις)

$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$  Συνέχεια των κάθετων συνιστωσών του  $\vec{D}$

$\epsilon_1 \cdot E_{1n} = \epsilon_2 \cdot E_{2n} \rightarrow$  Ασυνέχεια της καθ. συνιστώσας του  $\vec{E}$ .

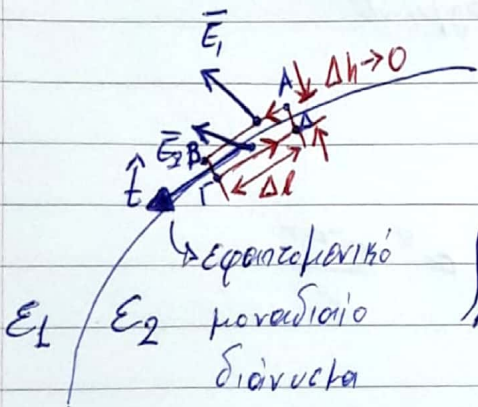


— Το ένα από τα δύο μέσα είναι αγωγός



$D_{in} = \rho_s$  Στις επιφάνειες των αγωγών

Τι γίνεται με τις εφαπτομενικές συνιστώσες;



Αστροβίλο  
 $\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$   
 $\Delta h \rightarrow 0$        $\Delta h \rightarrow 0$

Στο  $\overline{AB}$  το εφαπτ. διαν. είναι  $\hat{t}$   
 "  $\overline{BA}$  " " " "  $-\hat{t}$

$E_1 \hat{t} \Delta l + E_2 (-\hat{t}) \Delta l = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$

Η εφαπτομ. συνιστώσα του  $\vec{E}$   
 στα διαχ. επιφ. δύο μέσων  $\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$   
 είναι συνεχής.

→ Στις επιφάνειες αγωγών:  $E_n = 0$



[25]  
 ("Reverse  
 Engineering")

Σε ομογενή χώρο  $\epsilon$  μετρήθηκε ότι η δυναμική  
 δυναμικού ακολουθεί την έκφραση  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{e^{-ar}}{r}$   
 όπου  $q, a$  σταθερές  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  η απόσταση από την αρχή των αξόνων.  
 Ποια είναι τα φορτία που παράγει το πεδίο αυτό;

Χωρικά: Από τη σχέση  $\nabla \cdot \bar{D} = 0$

$$\bar{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\phi} \hat{\phi} =$$

Εφαρμογές συντεταγμένων

$$= -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} = \hat{r} \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-ar}}{r^2} (1+ar)$$

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \rho = \nabla \cdot \bar{D} = \dots = -\frac{q}{4\pi} a^2 \frac{e^{-ar}}{r}$$

επίσης σε  
 σφ. όγκο

Επιφανειακά: τα φορτία σε επιφάνειες όπου η  $D_n$  είναι  
 ασυνεχής.



Αεν υπάρχουν.

Σημειωτικά: Ενδεχομένως να υπάρχουν στα σημεία  
 ασυνεχειών των  $\phi, E$

Ενδεχόμενο σημείο  $r=0$ .

Εφαρμόζω το ν. Gauss σε μικρή σφαίρα  
 ακτίνας  $r$  και παίρνω το  $r \rightarrow 0$  οπότε  
 μένει μόνο το σημειακό φορτίο.



$$\iint_{S_r} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} D_r \cdot \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = D_r(r) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \underset{\substack{\text{divergence} \\ \text{of } \vec{D} \\ \text{at } r=0}}{Q} + \underset{\substack{\text{charge} \\ \text{on } S_r}}{Q_{\text{enclosed}}}$$

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow Q_{\text{enclosed}} \rightarrow 0$$

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0} \{ r^2 D(r) \cdot 4\pi \} = \dots = q$$



7-11-18

Συνάρτηση δυναμικού (γρωστή)

[26]  
"Reverse Engineering"

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{z}{3a} - \frac{a}{r}\right), & 0 < r < a \\ -\frac{Q_0 \cdot a}{12\pi\epsilon_0 r^3}, & r > a \end{cases}$$

↓  
Δίνεται το πεδίο  
να βρεθούν οι  
πηγές που το παράγουν

→ στο υπόλοιπο του ε-θμήμης  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  είναι λάθος (4).

Φορτία?

Παρατήρηση: το  $\phi$  είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση  
(πράγματι  $\phi(a^-) = \phi(a^+)$ ).

Αντικαθιστώ  $z = r \cdot \cos\theta$  ώστε η έκφραση να είναι σε  
εφαρ. συντεταγμένες.

Χωρικά φορτία

$$\rho = \nabla \cdot \bar{D} \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} = -\epsilon_0 \nabla \phi$$

$$\bar{E} = -\nabla \phi = -\left(\hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi}\right) = \dots$$

$$\bullet \underline{0 < r < a} \quad \bar{D} = \hat{r} \frac{Q_0}{4\pi a} \left(\frac{\cos\theta}{3a} - \frac{a}{r^2}\right) - \hat{\theta} \frac{Q_0}{4\pi a} \frac{\sin\theta}{3a}$$

$$\bullet \underline{r > a} \quad \bar{D} = -\hat{r} \frac{Q_0 a}{6\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} - \hat{\theta} \frac{Q_0 a}{12\pi} \frac{\sin\theta}{r^3}$$



από Τυπολόγιο Βιβλίου

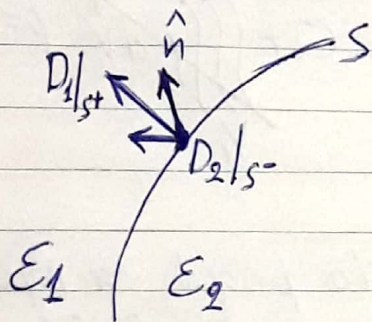
$$\rho = \nabla \cdot \bar{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

(όμοια με τον)

•  $0 < r < a$   $\rho = \nabla \cdot \bar{D} = \dots = 0$

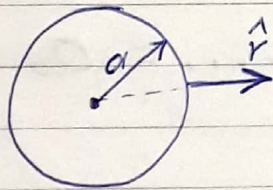
•  $r > a$   $\rho = \nabla \cdot \bar{D} = \dots = 0$

Επιφανειακά φορτία: τα αναζητώ σε τυχόν αβυρόχειρες των πεδίων (όχι απεριόριστο)



$$\bar{D}_1 \cdot \hat{n} / s^+ - \bar{D}_2 \cdot \hat{n} / s^- = \rho_s$$

Πιθανή αβυρόχειρα για  $r = a$



$$\begin{aligned} \rho_s &= D_r(r=a^+) - D_r(r=a^-) = \\ &= -\frac{Q_0 a \cos \theta}{6\pi a^3} - \frac{Q}{4\pi a} \left( \frac{\cos \theta}{3a} - \frac{a}{a^2} \right) = \\ &= \frac{Q_0}{4\pi a^2} (1 - \cos \theta) \quad (\text{για ομοιογενή φορτία}) \end{aligned}$$

Αν ζητούσαν το συνολικό επιφανειακό φορτίο.

$$Q_s = \iint \rho_s ds = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{Q_0}{4\pi a^2} (1 - \cos \theta) \overbrace{a^2 \sin \theta d\theta d\phi}^{ds} =$$

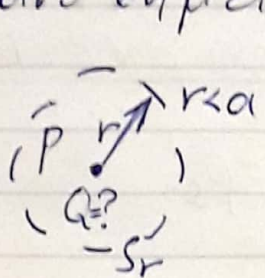
$$= \frac{Q_0}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos \theta) d\theta = \dots = Q_0$$



Γραμμικά φορτία: Τα αναζητούμε σε απειρισμό του πεδίου πάνω σε γραμμές (εδώ δεν υπάρχουν)

Σημειακά φορτία: Τα αναζητούμε σε επιφάνεια απειρισμού του πεδίου.

Πιθανό σημειακό φορτίο για  $r=0$



$$\text{V. Gauss: } \oint_{S_r=\partial V_r} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q + \iiint_{V_r} \rho dV \quad (\text{εδώ } \rho=0)$$

Ακόμα και αν έχουμε χωρικά φορτία μπορούμε να πάρω:

$$\begin{aligned}
 Q &= \lim_{r \rightarrow 0} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (D_r \cdot \hat{r} + D_\theta \cdot \hat{\theta}) \cdot \hat{r} \underbrace{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}_{ds} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_0}{4\pi a} \left( \frac{r^2 \cos\theta}{3a} - a \right) \sin\theta d\theta d\varphi = \dots = -Q_0
 \end{aligned}$$

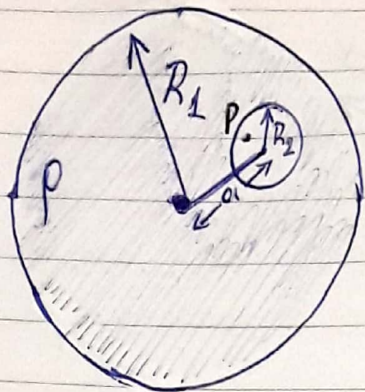
[23] Χωρικό φορτίο (ομοιόμορφο) πυκνότητας  $\rho$  σε σφαίρα ακτίνας  $R_1$  αλλά με σφαιρική κοιλότητα ακτίνας  $R_2 < R_1$  έκκεντρα, σε απόσταση  $a$  από το κέντρο.

( $\nabla \rho$  στην κοιλότητα)

(α)  $E = ?$  στο εσωτερικό της κοιλότητας.

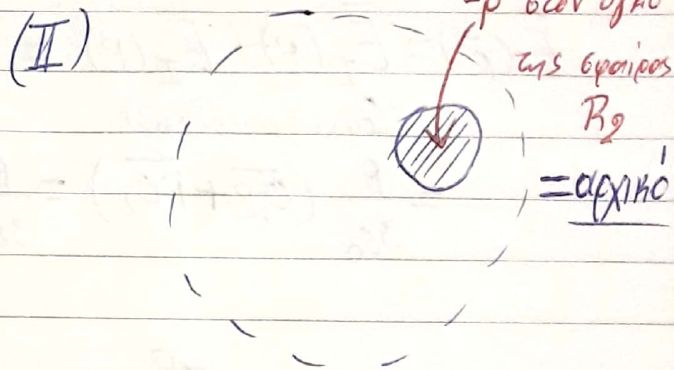
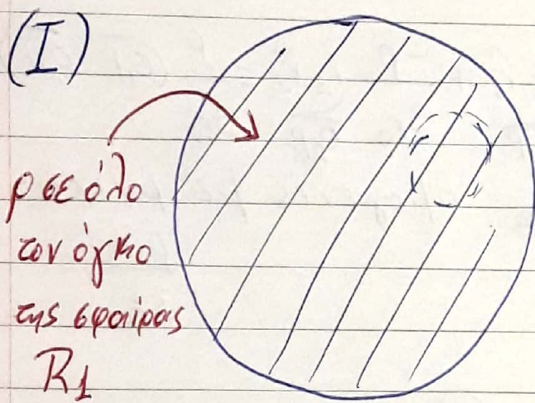
(β)  $\phi = ?$  στο κέντρο " "





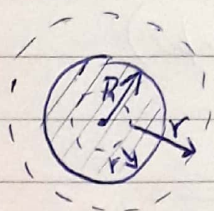
Δεν υπάρχει πλέον σφαιρική συμμετρία/δεν εφαρμόζεται ο V. Gauss.

Αναλύω το συνολικό πρόβλημα σε δύο απλούστερα.



Τα προβλήματα είναι άμεσα (όγκο [15])

V. Gauss

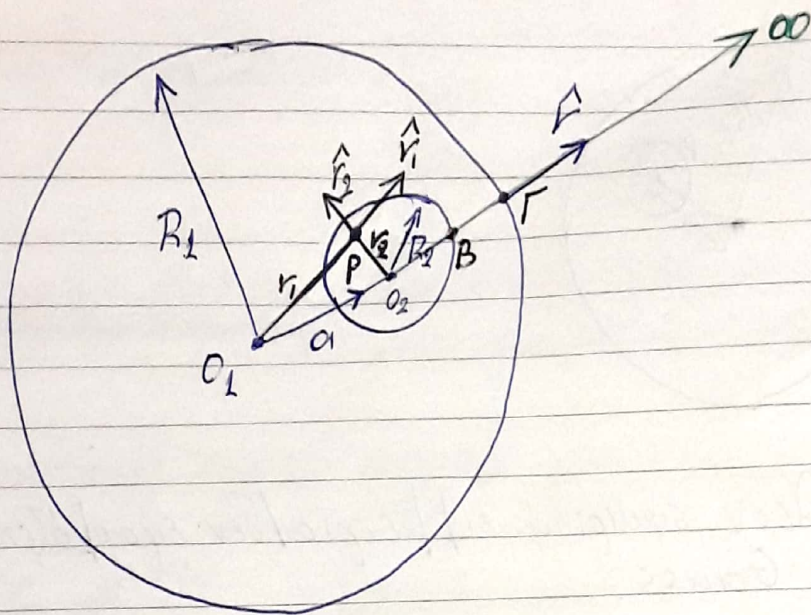


•  $r < R$ :  $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

•  $r > R$ :  $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$





(α) P τυχαίο σημείο μέσα στην κοιλότητα

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_I(P) + \vec{E}_{II}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \underbrace{r_1 \hat{r}_1}_{\text{λοιστή υπέρθεσας}} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \underbrace{r_2 \hat{r}_2}_{\text{O}_2\text{P}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{O_1P} - \vec{O_2P}) \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{O_1P} + \vec{PO_2}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_1O_2} \text{ ομογενής με τόπος: } \frac{\rho \cdot a}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

(β)  $\phi(O_2) - \phi(\infty) = \int_{O_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{O_2}^{\infty} \vec{E}_I \cdot d\vec{l} + \int_{O_2}^{\infty} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{l} =$

(Α φορτία στο ∞ είναι η αναφορά των δυναμικών δηλ.  $\phi=0$  είναι στο ∞)

(λοισή της διαδρομής, άρα επιλέγω τον ευκολότερο δρόμο)

$$= \int_{O_2}^{\Gamma} \vec{E}_I^{in} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma}^{\infty} \vec{E}_I^{out} \cdot d\vec{l} + \int_{O_2}^B \vec{E}_{II}^{in} \cdot d\vec{l} + \int_B^{\infty} \vec{E}_{II}^{out} \cdot d\vec{l} =$$

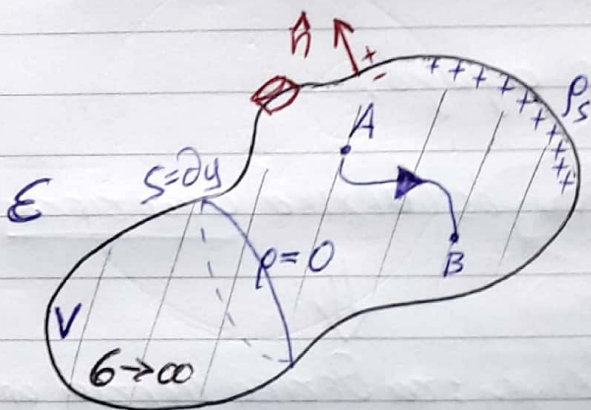
$$= \int_a^{R_1} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr + \int_{R_1}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr + \int_0^{R_2} \frac{-\rho r_2}{3\epsilon_0} \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_2 dr_2 + \int_{R_2}^{\infty} \frac{-\rho R^3}{3\epsilon_0 r_2^2} \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_2 \cdot dr_2 =$$

$$= \frac{\rho}{6\epsilon} (3R_1^2 - 3R_2^2 - a^2)$$



9-11-18

Η/Σ Πεδίο σε (τέλειος) αγωγός



Φορτίο: αλωθούνται μεταξύ τους → συγκεντρώνεται μόνο στην επιφάνεια ( $\rho_s$ )

Στο εσωτερικό:  $\rho=0$  και  $\boxed{\vec{E}=0}$

$\vec{E} = -\nabla\phi$  ή  $\phi_A - \phi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \phi_A = \phi_B, \forall A, B$  στον αγωγό

Όλα τα σημεία ενός τέλει αγωγού βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό (είτε στο εσωτερικό, είτε στην επιφάνεια).

Οριακές συνθήκες:

$\vec{E}_t|_{s^+} = \vec{E}_t|_{s^-} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_t|_s = 0}$

$\uparrow$   
μέσα

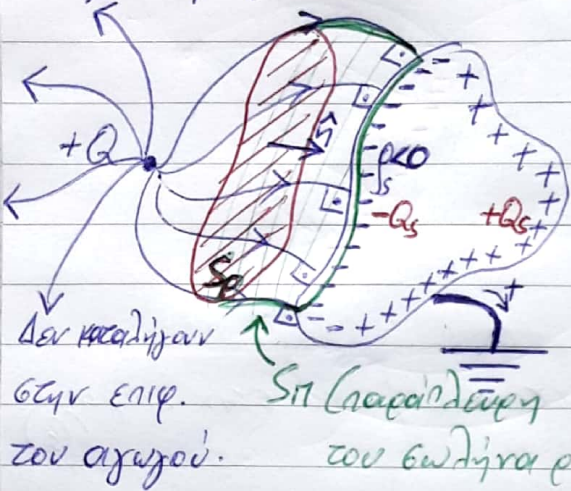
$D_n|_{s^+} - D_n|_{s^-} = \rho_s \Rightarrow \boxed{D_n|_s = \rho_s}$

(εσωτερικό)

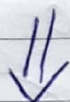


# Κατανομή φορτίων σε αγωγούς (ποιοτικά)

Π.χ. φορτίο διπλά σε αγωγό.



Αγωγός (αρχικά αφόρτιστος)



χείρα: τα θετικά φορτία αποκρίνονται \*

\*: Ηλεκτρική εξ. επαγωγής.

S\_π (καταρρέουσα του εωλήρα ροής)

Στο εωλήρα ροής των δυν. γραμμών που καταλήγουν στον αγωγό.

$$\iint_{S_p} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_s$$

V. Gauss:  $\oiint_{S_p + S_{\pi} + S_{in}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = -Q_s \Rightarrow \iint_{S_p} \vec{D} \cdot (-\hat{n}) d\vec{s} + \iint_{S_{\pi}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_{in}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_s$

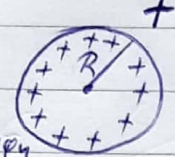
$S_p \quad S_{\pi} \quad \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad S_{in} \quad \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$

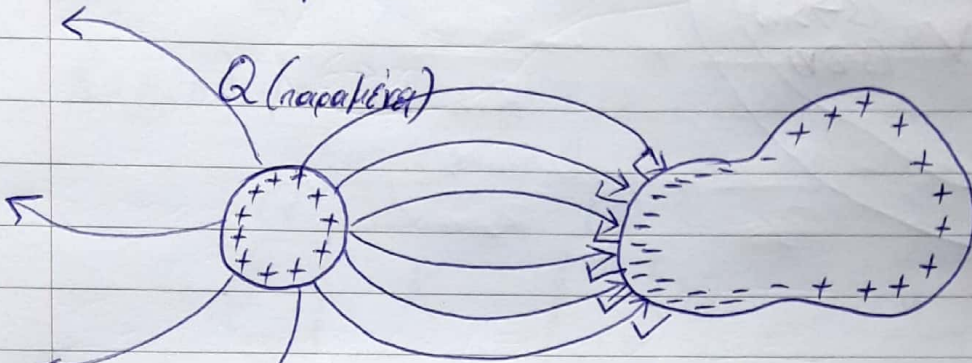


Αντί του σφαιρικού Q, Q σε αγωγό (σφαιρικό)

$\rho_s = \frac{Q}{4\pi R^2}$

αρχικά ομοιόμορη  
(Αρχικά φόρμα του)

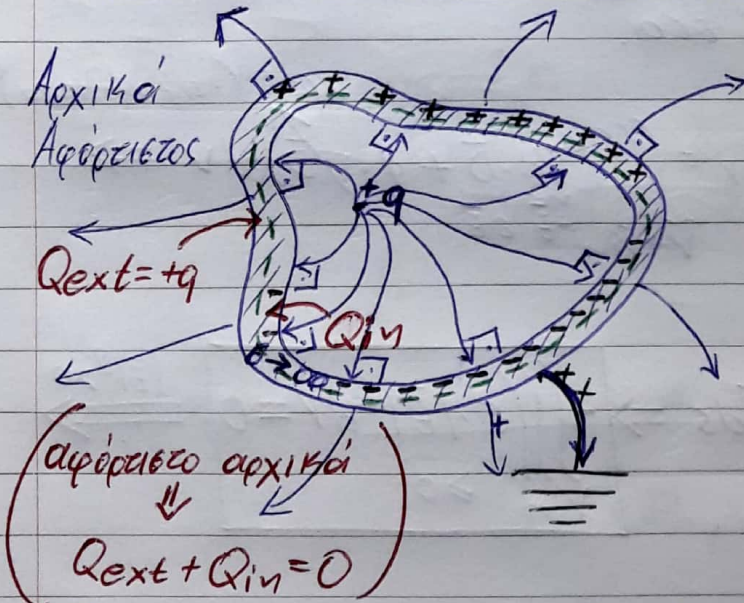




τα φορτία αναδιανέμονται με υψηλότερη  $\rho_s$  κοντά στον άλλο αγωγό.

Πεδίο σε κοιλώστες αγωγών = ΗΜ θωράκιση

(κλωβός Faraday)



$Q_{in} = -q$   
πείραμα

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{in} + q$

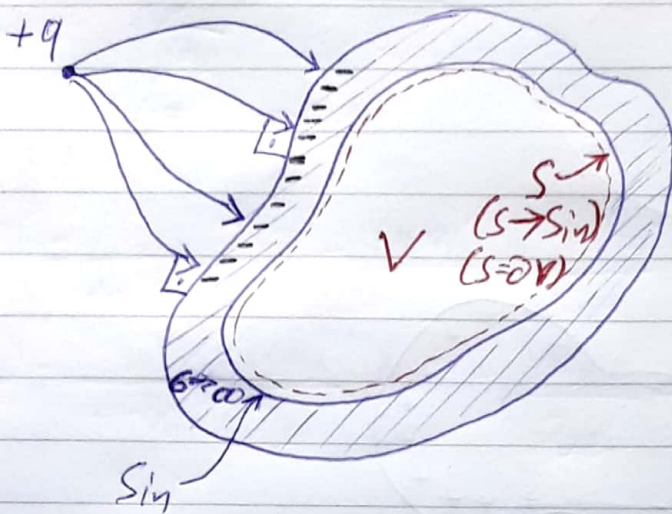
$\vec{D}_{in} = 0$  ενδοτικό φορτίο που περικλείεται

Για να είναι αποτελεσματική η θωράκιση με κλωβό Faraday, θα πρέπει αυτός να γειώνεται.

Τότε  $Q_{ext} = 0$  και στο εξωτερικό του κελύφους  $\vec{E} = 0$



Θεωρητική (από εσω προς τα μέσα)



Ότι και αν συμβαίνει στο εξωτερικό, το πεδίο στο εσωτερικό μιας κοίτης κοιλότητας είναι μηδέν.

Απόδειξη: Εφαρμόζω το Θεωρ Gauss για το πεδίο  $\phi \bar{D}$  σε επιφάνεια που προσεγγίζει την εσωτ. επιφ. του κλωβού από μέσα.

$$\oint_{S+S_{in}} \phi \bar{D} \cdot d\bar{s} = \iiint_{V \rightarrow V_{in}} \nabla \cdot (\phi \bar{D}) dV = \iiint_{V \rightarrow V_{in}} (\underbrace{\nabla \phi}_{-\bar{E}} \cdot \underbrace{\bar{D}}_{\epsilon \bar{E}} + \phi \cdot \underbrace{\nabla \cdot \bar{D}}_{\rho}) dV \Rightarrow$$

$\rho=0$  (κονή κοιλότητα)

λόγω V. Gauss (όχι υπάρχουν φορτία στο  $V_{in}$ )

$$\Rightarrow \phi \oint_{S_{in}} \bar{D} \cdot d\bar{s} = \iiint_{V_{in}} (-\bar{E}) \cdot \epsilon \bar{E} dV \Rightarrow \boxed{- \iiint_{V_{in}} \epsilon \cdot |\bar{E}|^2 dV = 0} \xrightarrow{|\bar{E}|^2 \geq 0}$$

σταθ. σε κάθε σημείο του αγωγού, είτε και στη  $S_{in}$

$$\Rightarrow |\bar{E}| = 0 \text{ παντού στο } V_{in}$$

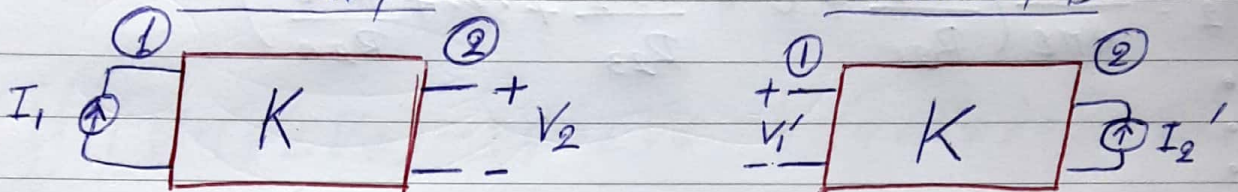


## Θέωρημα Αμοιβαιότητας (Green) (reciprocity)

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα στον ηλεκτρομαγνητικό.

### Αμοιβαιότητα στα ηλεκτρικά κυκλώματα

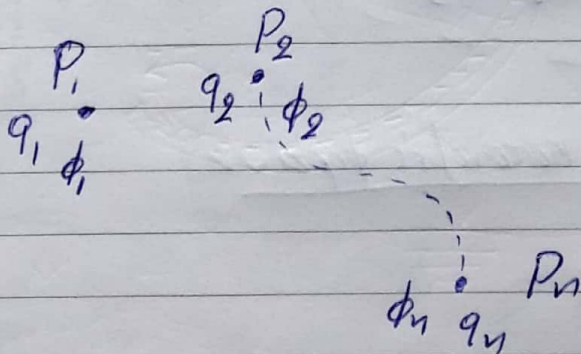
K: κύκλωμα χωρίς ενεργά στοιχεία (εξαρτημένες πηγές)  
 Κατάσταση A Κατάσταση B



$$V_1 \cdot I_1' = V_2 I_2' \quad \text{ή} \quad \frac{V_2}{I_1} = \frac{V_1'}{I_2} \quad (Z_{12} = Z_{21})$$

### Στο Η/Σ μέδιο

Σημειακά φορτία: η σημειακά φορτία σε συγκεκριμένα σημεία  
 $P_1, P_2, \dots, P_n$   $q_1, q_2, \dots, q_n$  τα οποία παράγουν  
 δυναμικά  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  στις ίδιες θέσεις



Αν βάλω άλλα φορτία  
 $q_1', q_2', \dots, q_n'$  στις ίδιες θέσεις  
 $P_1, P_2, \dots, P_n$  (ίδια γεωμετρία και  
 χώρου = το αντίστοιχο με το  
 ίδιο κύκλωμα) προκύπτουν  
 $\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_n'$



Πως συνδέονται όλα αυτά μεταξύ τους;

$$\phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon R_{ij}}$$

$\phi_i$  στην  $P_i$

$$\phi_1 q_1' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( 0 + \frac{q_2 q_1'}{R_{12}} + \frac{q_3 q_1'}{R_{13}} + \dots + \frac{q_n q_1'}{R_{1n}} \right)$$

$$\phi_2 q_2' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1 q_2'}{R_{21}} + 0 + \frac{q_3 q_2'}{R_{23}} + \dots + \frac{q_n q_2'}{R_{2n}} \right)$$

⋮

$$\phi_n q_n' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1 q_n'}{R_{n1}} + \dots + 0 \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i q_i' = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j'}{R_{ji}}$$

$\leftarrow$   $\sum_{i=1}^n \phi_i' q_i$  (στο αντίστροφο)

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i' q_j}{R_{ij}}$$

$$\left. \begin{array}{l} R_{ij} = R_{ji} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \sum_{i=1}^n \phi_i q_i' = \sum_{i=1}^n \phi_i' q_i$$

↙ Για χωρικές κατανομές φορτίων

$$\iiint_{V_{\infty}} \phi \cdot \rho' dV = \iiint_{V_{\infty}} \phi' \cdot \rho dV$$



Απόδειξη

Εξ. Poisson

$$\nabla \cdot (\underbrace{\epsilon}_{-\epsilon} \underbrace{\nabla \phi}_{-\bar{D}}) = -\rho$$

$$\iiint_{V_{\infty}} (\phi \rho' - \phi' \rho) dV = \iiint_{V_{\infty}} [\phi' \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) - \phi \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi')] dV = *$$

$$\nabla \cdot (\phi' \epsilon \nabla \phi) = \nabla \phi' \cdot \epsilon \nabla \phi + \phi' \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi)$$

$$* = \iiint_{V_{\infty}} [\nabla \cdot (\phi' \epsilon \nabla \phi) - \nabla \phi' \cdot \epsilon \nabla \phi - \nabla \cdot (\phi \epsilon \nabla \phi') + \nabla \phi \cdot \epsilon \nabla \phi'] dV$$

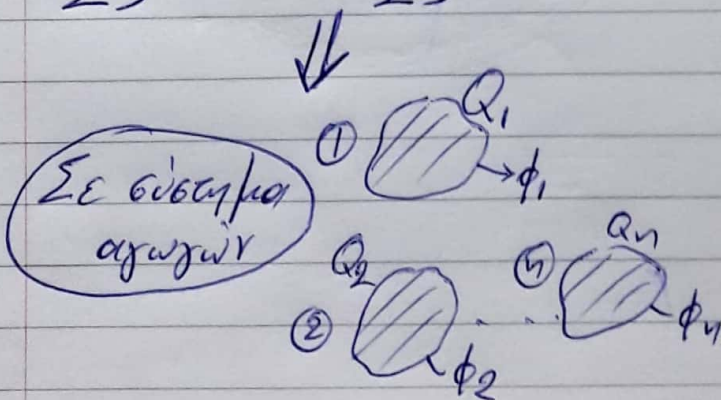
$$= \iiint_{V_{\infty}} \nabla \cdot (\phi' \epsilon \nabla \phi - \phi \epsilon \nabla \phi') dV = \oint_{S_{\infty} = \partial V_{\infty}} (\phi' \cdot \epsilon \cdot \nabla \phi - \phi \cdot \epsilon \nabla \phi') \cdot \bar{ds}$$

$\hookrightarrow a \cdot \frac{1}{r}$       $\hookrightarrow a \cdot \frac{1}{r^2}$       $\downarrow$   
 $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$= 0$$

Επιφ. Κατανόμης

$$\iint_{\Sigma S} \phi \rho_s' dS = \iint_{\Sigma S} \phi' \rho_s ds \quad (\text{κατ' αναλογία})$$



$$\sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \phi \rho_s' dS = \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i Q_i' = \sum_{i=1}^n \phi_i' Q_i$$

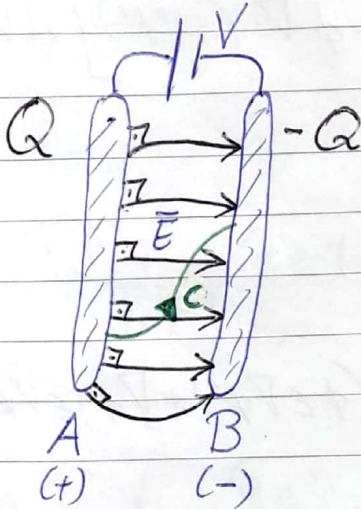
$$\iint_{S_i} \rho_s' dS$$



14-11-18

Η έννοια της χωρητικότητας - Πυκνωτές  
(capacitance) (capacitors)

Πυκνωτής: Σειράση 2 αγωγών για αποθήκευση φορτίου  
(σε γαλιόλιαση)



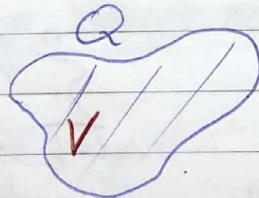
Ίσα & αντίθετα φορτία

Χωρητικότητα:  $C = \frac{Q}{V}$

Χωρητικότητα: - Δεν εξαρτάται από το V ή το Q  
- εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του συστήματος των 2 αγωγών και το διηλεκτρικό υλικό.

Γιατί Σειράση 2 αγωγών: Διότι 2 αγωγοί σε κοντινή απόσταση δίνουν πολύ καλύτερη χωρητικότητα (δηλ. ικανότητα αποθήκευσης φορτίου) από ότι ένας αγωγός μόνος του.

Χωρητικότητα αγωγού:



$C = \frac{Q}{V}$

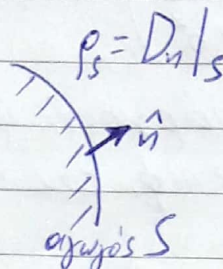
V ← το δυναμικό του αγωγού ως προς το άπειρο.

ανεξαρτήτως για τις περιβάτοντες εφαρμογές.



Γενική έκφραση της χωρητικότητας:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\iint_{(+) } \epsilon \bar{E} \cdot \hat{n} \cdot ds}{\int_{(-)}^{(+)} \bar{E} \cdot d\bar{l}} \leftarrow \text{αρεσ. της διαδρομής.}$$

$$Q = \iint_{(+)} \rho_s ds$$


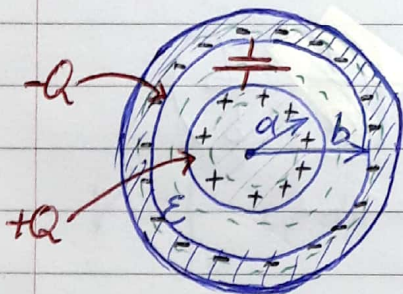
$\rho_s = D_n / \epsilon_0$   
 $\hat{n}$   
 αγωγός S

Ουδισιαστικά σε μία παράμετρο ενσωματώνεται όλη η συμπεριφορά του πεδίου.

Υπολογισμός C: - επίλυση Η/Σ προβλήματος (υπολογισμός  $\bar{E}$ ) (για απλές γεωμετρίες  $\rightarrow$  v. Gauss, εξ. Laplace για πιο σύνθετες: επίλυση εξ. Laplace)

Απλές διατάξεις πυκνωτών:

- Σφαιρικός πυκνωτής: αγωγική σφαίρα ακτίνας a & αγωγικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b.



(ανάμεσα υπάρχει διαλεκτικό υλικό  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ )

Θεωρώ γνωστό το φορτίο, έστω Q στον εσωτ. αγωγό, -Q στον εξωτερικό (κέλυφος).  
 Κατανομή φορτίων είναι επιφανειακή.



- Στην εξωτερική επιφάνεια ( $r=a$ ) του αγωγού:  
φορτίο  $Q$  ( $\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}$ )

- Στην εσωτερική επιφάνεια ( $r=b$ ) του κελύφους:  
φορτίο  $-Q$  (απόλυτη σφαιρική συμμετρία)  
( $\rho_s = \frac{-Q}{4\pi b^2}$ )

Πεδίο: ακτινικό | Δεν υπάρχουν φορτία στην  
 $\vec{E} = E_r \cdot \hat{r}$  | εξωτ. επιφ. του κελύφους

### V. Gauss:

- $r < a$   $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_r = 0$
- $a < r < b$   $\epsilon E_r 4\pi r^2 = Q \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}$
- $r > b$   $\epsilon E_r 4\pi r^2 = Q - Q = 0 \Rightarrow E_r = 0$

Γιατί οι δύο σφαιρικές επιφάνειες ( $r=a$  και  $r=b$ )  
έχουν ίσα και αντίθετα φορτία;  $\uparrow$  εξωτ. αγωγού  $\uparrow$  εσωτ. κελύφους

Διότι μέσα στο κέλυφος (όπως και στο εσωτ. κοίλο αγωγού)  
 $\vec{E} = 0$ .

$$V = \int_{(+)}^{(-)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = 4\pi \epsilon \frac{ab}{b-a}} \quad \begin{array}{l} \text{Χωρητικότητα} \\ \text{σφαιρικού πυκνωτή} \end{array}$$

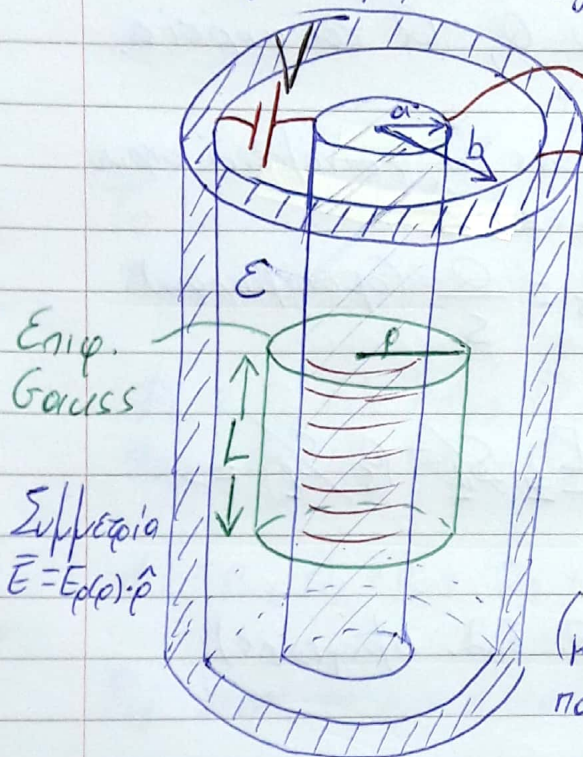


Μειώνοντας το  $b-a$  (όσο επιτρέπεται κατασκευαστικά αλλά και από τη διηλεκτρική αντοχή του υλικού) μπορούμε να πάρω υψηλές τιμές της  $C$ .

Αντίθετα, αν είχαμε μόνον ένα αγωγό, η χωρητικότητά του θα ήταν  $C = 4\pi\epsilon a$ .

### Κυλινδρικός πυκνωτής

- Άπειρου μήκους (για πλήρη κυλινδρική συμμετρία)



$Q_L (\rho = a^-)$   
 $-Q_L (\rho = b^+)$

$Q_L =$  φορτίο ανά μονάδα μήκους ( $Cb/m$ )

$\rho < a \quad \vec{E} = 0$

$a < \rho < b \quad \underbrace{\epsilon E_\rho \cdot 2\pi\rho L}_{\rho \text{ ή } (Cb/m) \cdot Lm} = Q_\rho \cdot L \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{E_\rho = \frac{Q_\rho}{2\pi\epsilon\rho}}$

(μόνο από ποσοιν. επιφ.)

$\rho > b \quad \vec{E} = 0$

$$V = \int_a^b E_\rho d\rho = \frac{Q_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

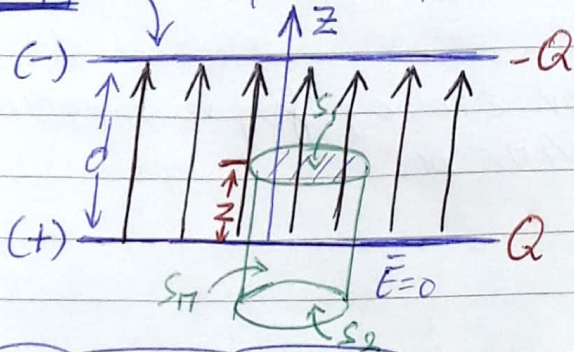
Χωρητικότητα (ανά μονάδα μήκους)

$$C = \frac{Q_L}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad (F/m)$$



Επίπεδος πυκνωτής (παράλληλων πλακών)

2D ζαή s: επιφάνεια της κάθε πλάκας



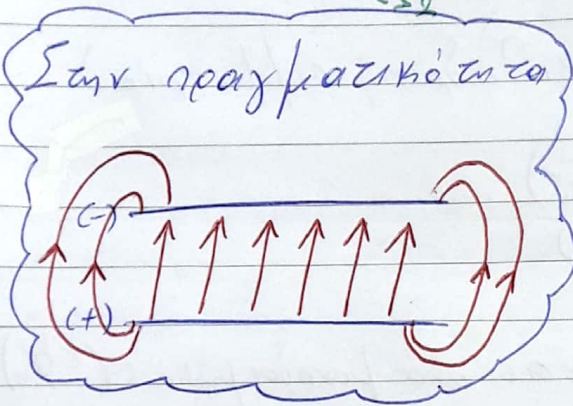
Θεωρούμε ότι οι δύο πλάκες έχουν αρκετά μεγάλες διαστάσεις, ώστε με το d ώστε να αγνοήσουμε τα φαινόμενα των άκρων.

Έστω Q, -Q τα φορτία.

Αγνοώντας τα φαινόμενα άκρων

$$\vec{E} = E_z(z) \cdot \hat{z}$$

και  $\rho_s = \frac{Q}{S}$  (ομοιόμορφη)



V. Gauss:  $\iint_{S_1+S_2+S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{in} = \rho_s S_1 \Rightarrow \epsilon E_z S_1 = \rho_s S_1 \Rightarrow$

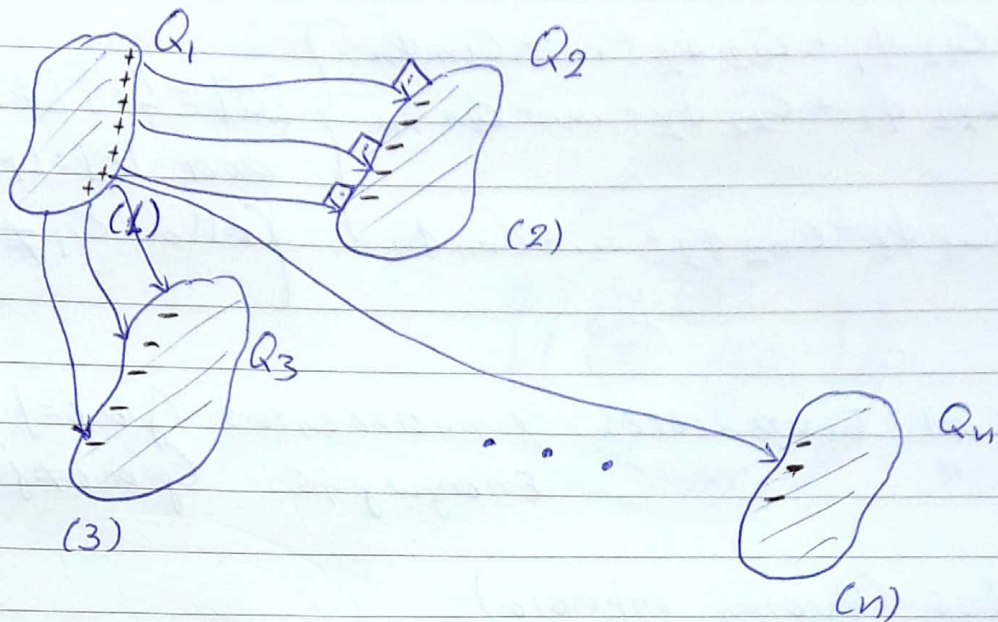
$$\Rightarrow E_z = \frac{\rho_s}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon \cdot S} \quad (\text{σταθ. δηλ. ομογενές})$$

$$V = \int_0^d E_z dz = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon \frac{S}{d}$$



## Χωρητικότητα σε σύστημα πολλών αγωγών



Το δυναμικό του κάθε αγωγού καθορίζεται από το φορτίο του κάθε αγωγού:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + \dots + p_{1n} Q_n \\ \phi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + \dots + p_{2n} Q_n \\ &\vdots \\ \phi_n &= p_{n1} Q_1 + p_{n2} Q_2 + \dots + p_{nn} Q_n \end{aligned} \right\} \text{ ή } [\Phi] = [P] \cdot [Q]$$

$P_{ij}$  είναι οι συντελεστές δυναμικού που ορίζονται ως εξής:

$$P_{ij} = \frac{\phi_i}{Q_j} \quad \left| \quad Q_k = 0, k \neq j \right.$$

← όλοι οι άλλοι αγωγοί αφορταίνονται



Συνήθως βολώνει η αντίστροφη σχέση:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \phi_1 + C_{12} \phi_2 + \dots + C_{1n} \phi_n \\ Q_2 &= C_{21} \phi_1 + C_{22} \phi_2 + \dots + C_{2n} \phi_n \\ &\vdots \\ Q_n &= C_{n1} \phi_1 + C_{n2} \phi_2 + \dots + C_{nn} \phi_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [Q] &= [C][\phi] \\ \text{\u03b1\u03c1\u03b1 } [C] &= [P]^{-1} \\ (\text{\u03b1\u03bb\u03bb\u03cc\u03b9 } C_{ij} &\neq \frac{1}{P_{ij}}) \end{aligned}$$

$C_{ij}$ : οι συντελεστές χωρητικότητας (για  $i=j$ )  
 " " " " επαγωγής (για  $i \neq j$ )

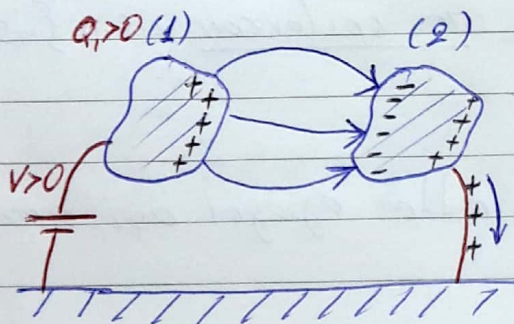
Ορισμός (φυσική σημασία)

$$C_{ij} = \frac{Q_i}{\phi_j} \Big|_{\phi_k=0, k \neq j}$$

όλοι οι άλλοι αγωγοί είναι γεωμένοι

• Λ\u03cc\u03b3\u03c9 ἀ\u03bc\u03b5\u03b9\u03b1\u03c4\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1\u03c2:  $C_{ij} = C_{ji}$

•  $C_{ij} < 0$ ,  $i \neq j$  \*\*\*

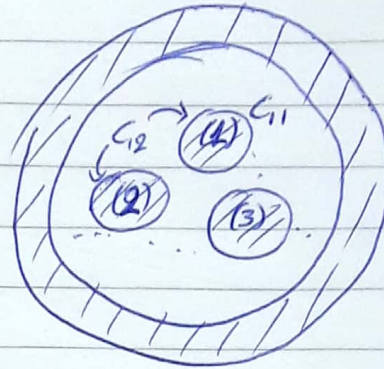
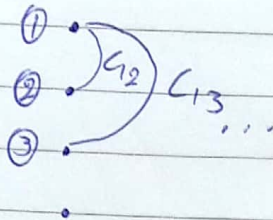


$$C_{21} = \frac{Q_2}{\phi_1} \Big|_{\phi_2=0} < 0$$



# Εφαρμογές

## Γραμμική μεταφοράς ηλ. ενέργειας

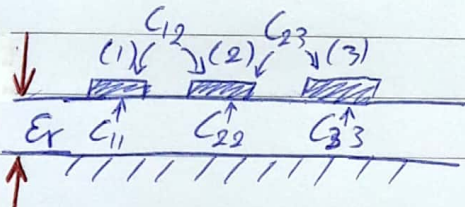


τριγωνικό  
μοτίβο



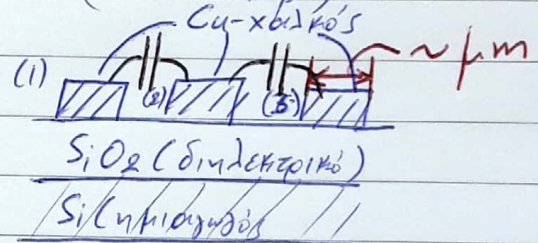
## Γραμμές μεταφοράς:

(on board)



$h \approx 1,2 \text{ mm}$

(on chip)



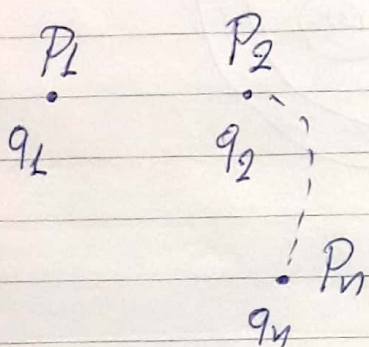


21-11-18

# Ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου

Υπαρξη  $\vec{E} \rightarrow$  αποθηκευμένη ενέργεια του πεδίου στο χώρο.

(α) Σύστημα (σφαιρικών) φορτίων:  
σε συγκεκριμένα σημεία  $P_1, \dots, P_n$  του χώρου.



Υπολογίσω την αποθηκευμένη ενέργεια από το έργο που απαιτείται για να τοποθετηθούν τα φορτία  $q_1, q_2, \dots, q_n$  στις θέσεις τους, με αυτήν τη σειρά.

Τοποθετώ το φορτίο

$q_1 : W_1 = 0$  (δεν υπάρχουν δυναμικές)

$q_2 : W_2 = q_2 \phi_1(P_2) \rightarrow$  δυναμικό στην  $P_2$  μόνο λόγω του  $q_1$ .

$q_3 : W_3 = q_3 [\phi_1(P_3) + \phi_2(P_3)]$

$q_{n-1} : W_{n-1} = q_{n-1} [\phi_1(P_{n-1}) + \phi_2(P_{n-1}) + \dots + \phi_{n-2}(P_{n-1})]$

$q_n : W_n = q_n [\phi_1(P_n) + \phi_2(P_n) + \dots + \phi_{n-1}(P_n)]$

Συνολική ενέργεια του Η/Σ πεδίου:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i$$

$W = q \cdot V_{AB}$  μεταξύ σημείων A, B

Αν το φορτίο  $q$  έρχεται από το άπειρο (ή καλύτερα το σημείο αναφοράς των δυναμικών)

$W = q \cdot \phi_A - \phi_B$



Κάνω τον ίδιο υπολογισμό, με την αντίστροφη σειρά.

$$\text{Πρώτα το } q_n: W_n' = 0$$

$$q_{n-1}: W_{n-1}' = q_{n-1} \phi_n(r_{n-1})$$

$$q_2: W_2' = q_2 [\phi_n(r_2) + \phi_{n-1}(r_2) + \dots + \phi_3(r_2)]$$

$$q_1: W_1' = q_1 [\phi_n(r_1) + \phi_{n-1}(r_1) + \dots + \phi_2(r_1)]$$

Το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n W_i'$  θα πρέπει να δίνει την ίδια ακριβώς αποθηκευμένη ενέργεια  $W_e$

$$2W_e = \sum_{i=1}^n W_i + \sum_{i=1}^n W_i'$$

$$= \sum_{i=1}^n (W_i + W_i') \quad \cancel{\Delta} \phi_i(r_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n q_i [\phi_1(r_i) + \phi_2(r_i) + \dots + \phi_n(r_i)]$$

$\phi_i = \text{δυναμικό στη θέση } r_i$

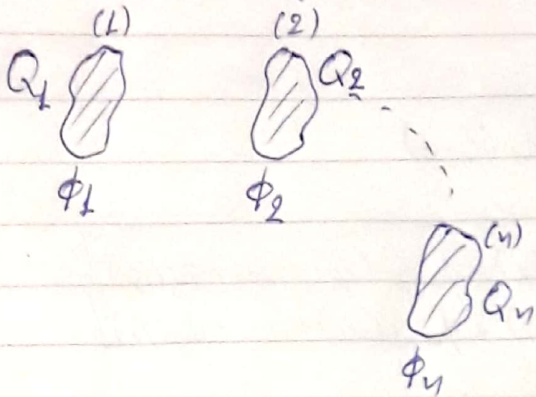
$$\text{Τελικά } \boxed{W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i}$$

Χωρικά φορτία:  $\boxed{W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \phi \rho dV}$

Επιφανειακά φορτία:  $\boxed{W_e = \frac{1}{2} \iint_S \phi \rho_s ds}$



## Σύστημα αγωγών

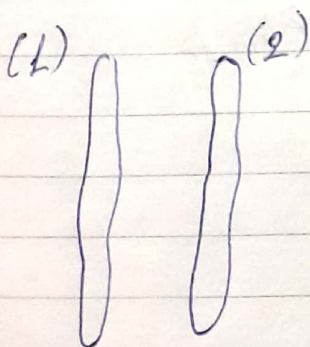


(Όλες οι επιφάνειες ενός αγωγού βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό  $\phi_i$ )

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \phi \rho_s ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \phi_i \rho_{si} ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i \left( \iint_{S_i} \rho_{si} ds \right) \rightarrow Q_i$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i$$

## Παράδειγμα: πυκνωτής



$$Q_1 = Q \quad Q_2 = -Q$$

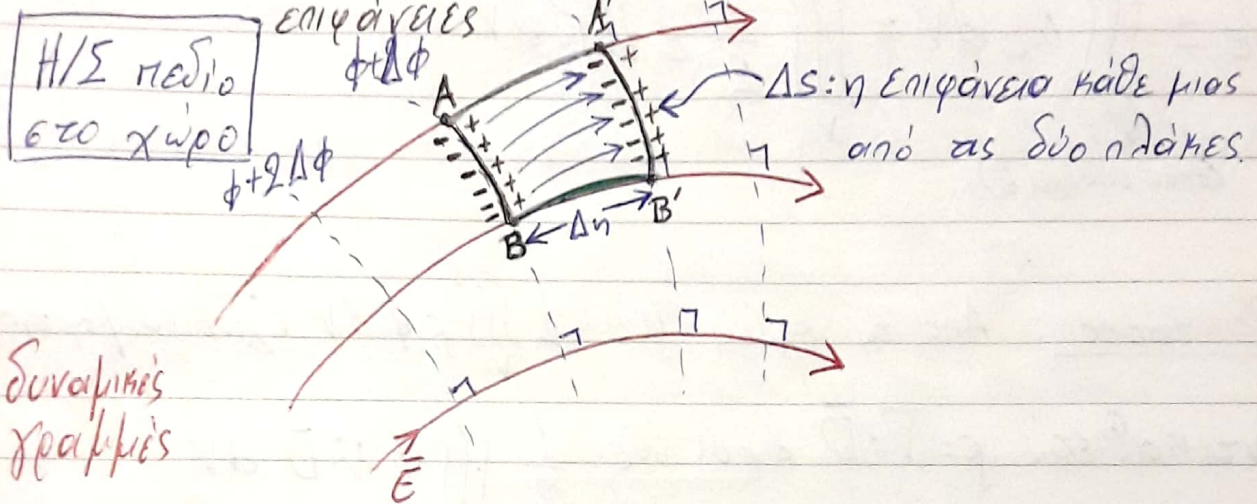
$$\phi_1 - \phi_2 = V$$

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} (Q_1 \phi_1 + Q_2 \phi_2) \\ &= \frac{1}{2} Q (\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} Q \cdot V \\ &= \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$



(β) Υπολογισμός της ενέργειας  $W_e$  από την ένταση του πεδίου  $\vec{E}$

1<sup>ος</sup> τρόπος: ποιοτικά θεωρώντας το πεδίο στο χώρο ως αλληλουχία "μικρών πυκνωτών".  
 Ισοδυναμικές  $\phi$   $\phi - \Delta\phi$   
 επιφάνειες  $\phi + \Delta\phi$



Δυναμικές γραμμές

Το  $AB$  είναι τμήμα ισοδυναμικής επιφάνειας, άρα δεν θα αλλάξει τίποτα αν το αντικαθιστούσαμε με αγωγό. Ομοίως και το  $A'B'$ . Έτσι όπως δημιουργείται ένας μικρός επιπέδος πυκνωτής (παράλληλων πλακών)

χωρητικότητας 
$$\Delta C = \epsilon \frac{\Delta S}{\Delta h}$$

και το  $\vec{E}$  είναι κατά μέτρο  $|\vec{E}| = \frac{\Delta\phi}{\Delta h}$

Ενέργεια του στοιχειώδους πυκνωτή

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= \frac{1}{2} \Delta C \cdot \Delta\phi^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\Delta S}{\Delta h} |\vec{E}|^2 \Delta h^2 = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 \Delta S \cdot \Delta h = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \cdot |\vec{E}|^2 \cdot \Delta V \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  ο όγκος του στοιχειώδους πυκνωτή



Για  $\Delta V \rightarrow 0$   $dW_e = \left( \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 \right) dV$

↓  
 χωρική πυκνότητα ενέργειας:  $w_e = \frac{dW_e}{dV}$

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 dV$$

(όπου υπάρχει  $\vec{E}$ )

2ος τρόπος: Από τη σχέση  $W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \phi dV$  (χωρικά φορτία)

Αντικαθιστώ  $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$  άρα  $W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \phi \nabla \cdot \vec{D} dV$

Θα ήθελα να εμφανιστεί το  $\vec{D}$  ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ) και  $\nabla \phi$  ( $\nabla \phi = -\vec{E}$ )

Παίρνω την ταυτότητα της διαν. ανάλυσης:

$$\nabla \cdot (\phi \vec{D}) = \nabla \phi \cdot \vec{D} + \phi \nabla \cdot \vec{D}$$

άρα  $W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \nabla \cdot (\phi \vec{D}) dV - \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \nabla \phi \cdot \vec{D} dV =$

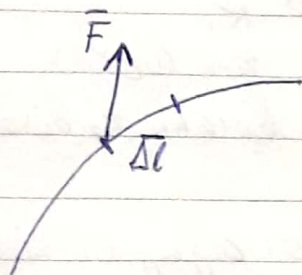
$$= \frac{1}{2} \iint_{S_{\infty}} \phi \vec{D} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \epsilon |\vec{E}|^2 dV$$



## Δυνάμεις σε συστήματα αγωγών.

Ο υπολογισμός δυνάμεων (πολύ σημαντικός σε συστήματα ηλεκτροκίνητων) γίνεται εύκολα και συστηματικά από το έργο τους άρα τελικά από την αποθηκευμένη ενέργεια του Η/Σ μεδίου (που δίνεται από απλές σχέσεις).

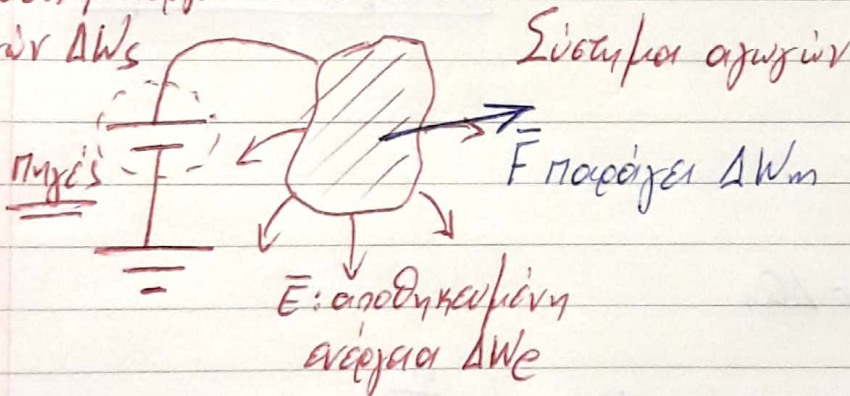
Μηχανικό έργο κατά μήκος μιας στοιχειώδους διαδρομής  $\Delta l$ .



$$\Delta W_m = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l} \text{ συνεπώς } \vec{F} = \nabla W_m$$

Πώς σχετίζεται με την αποθήκ. ενέργεια  $W_e$  του ηλ. πεδίου;  
(και αντίστοιχα με τις σχέσεις  $d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \iff \vec{E} = -\nabla\phi$ )

μεταβολή ενέργειας πηγών  $\Delta W_s$



## Αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$\Delta W_s = \Delta W_m + \Delta W_e$$

άρα  $\vec{F} = \nabla W_s - \nabla W_e$

χρησιμοποιώντας

→ υπολογίζεται από το  $\vec{E}$



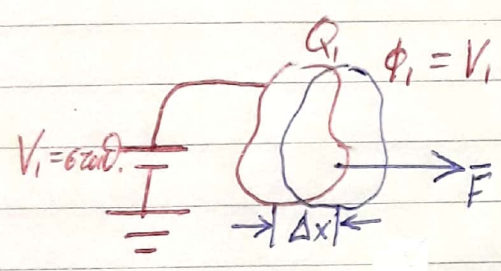
Στην πράξη το πρόβλημα ανλοποιείται. Έχουμε 2 περιπτώσεις:

(α) φορτία των αγωγών: εσταθερά δηλ. οι αγωγοί δεν συνδέονται με πηγές

άρα  $\Delta W_s = 0$   
 και  $\vec{F} = -\nabla W_e$  π.χ.  $F_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}$

αν ένας αγωγός μπορεί να μετακινηθεί π.χ. κατά  $x$ , αλλαί παραχωρίζω την  $W_e(x)$  ως προς  $x$  και βρίσκω τη δύναμη

(β) Δυναμικά των αγωγών είναι εσταθερά δηλ. οι αγωγοί είναι συνδεδεμένοι με πηγές



μεταβολή φορτίο  $\Delta Q_i$

$\frac{\Delta W_s}{*} = \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta Q_i$  ενώ  $\Delta W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta Q_i$

άρα  $\Delta W_s = 2 \Delta W_e$

$\vec{F} = \nabla (W_s - W_e) = +\nabla W_e$   $F_x = +\frac{\partial W_e}{\partial x}$

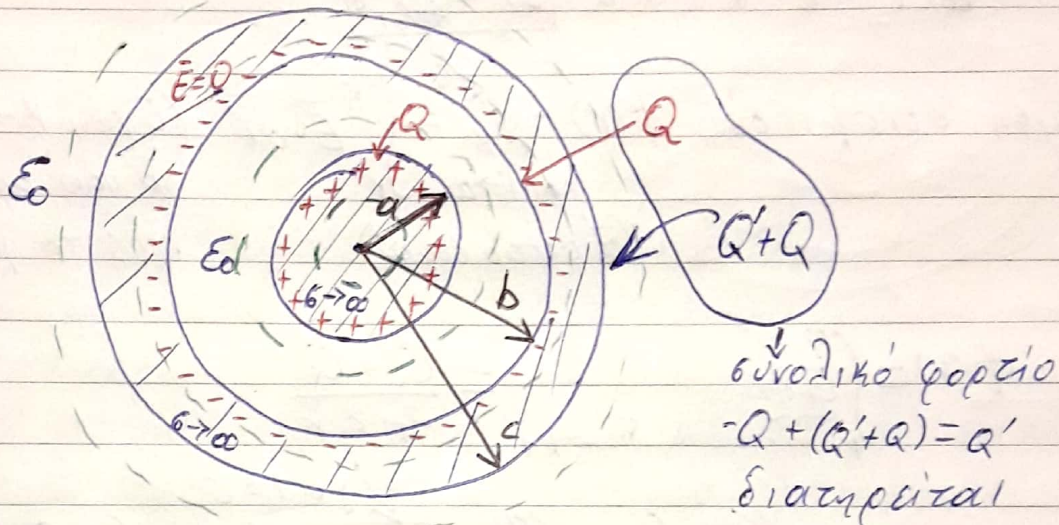
\*: ενέργεια που δίνουν οι πηγές στο σύστημα κατά τη μετακίνηση  $\Delta x$



23-11-18

[2.6] Αγωγιμή σφαίρα (ακτίνας  $a$ ) με φορτίο  $Q$   
 Αγωγίμο κέλυφος (εσωτ. ακτ.  $b$ , εξωτ. ακτ.  $c$ ) με φορτίο  $Q'$   
 (Συμπαγή & ομόκεντρα)

- Κατανομές ( $\rho$  πυκνότητες φορτίων)
- $\phi, \vec{E}$  παντού στο χώρο.
- Πώς μεταβάλλεται το  $\vec{E}$  έξω από το κέλυφος ( $r > c$ ) όταν η σφαίρα μετακινηθεί εκκεντρα.



a) - Κατανομές φορτίων: επιφανειακές

Σφαιρικός αγωγός:  $Q$  στην επιφ.  $r=a$  (τα φορτία συσσωρεύονται και επισης  $\vec{E}=0$  στο εσωτερικό)

Κέλυφος: οπωδήποτε  $-Q$  στην εσωτ. επιφ.  $r=b$  (όχι και αν συμβεί  $\vec{E}=0$  στο εσωτερικό)  $\rightarrow$  προκύπτει από ν. Gauss, από το υπόλοιπο  $Q'+Q$  στην εξωτ. επιφ.  $r=c$  επιφ. μένει στο κέλυφος

$$\rho_s(a^-) = \frac{Q}{4\pi a^2} \quad \rho_s(b^-) = \frac{-Q}{4\pi b^2} \quad \rho_s(c^-) = \frac{Q'+Q}{4\pi c^2}$$

(ομοιόμορφες λόγω συμμετρίας)



Σφαιρική συμμετρία:  $\vec{E} = E_r(r) \cdot \hat{r}$  (ακτινικό)

V. Gauss σε υποθετική επιφ. ακτίνας  $r$ .

- $r < a$   $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_r = 0$
- $a < r < b$   $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = Q \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- $b < r < c$   $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = Q - Q \Rightarrow E_r = 0$  (στο εσωτ. του κελύφους)
- $r > c$   $\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = Q - Q + Q' + Q \Rightarrow E_r = \frac{Q' + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

β) Συνθήκη δυναμικού  $\phi(r) - \phi_K^0 = \int_K^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$  (Επειδή  $K \rightarrow \infty$  βολώνει να πάω από ε'ξω προς τα μέσα)  
 και  $K \rightarrow \infty$  (7 φορές στο  $\infty$ )

•  $r > c$ :  $\phi(r) = \int_r^\infty E_r dr = \frac{Q' + Q}{4\pi\epsilon_0 r}$   
ή πιο απλή διαδρομή

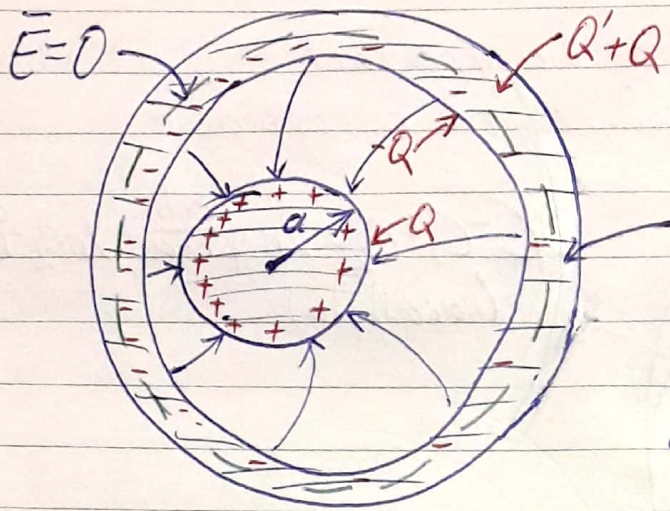
•  $b < r < c$ :  $\phi(r) = \int_r^c E_r dr + \int_c^\infty E_r dr = \frac{Q' + Q}{4\pi\epsilon_0 c}$  (σταθ. δίνει όλα τα σημεία ενός αγωγού βρίσκ. στο ίδιο δυναμικό)  
για  $r = c$

•  $a < r < b$ :  $\phi(r) = \int_r^b E_r dr + \int_b^\infty E_r dr = \int_r^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \frac{Q' + Q}{4\pi\epsilon_0 c} =$   
 $= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q' + Q}{4\pi\epsilon_0 c}$   
για  $r = b$

•  $r < a$ :  $\phi(r) = \int_r^a E_r dr + \int_a^\infty E_r dr =$   
 $= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q' + Q}{4\pi\epsilon_0 c}$  (ενίους σταθερό μέγεθος στον αγωγό)  
για  $r = a$



γ) Έκκεντρη μετακίνηση του εσωτ. αγωγού.



η εσωτερική επιφάνεια έχει διαταραχτεί.

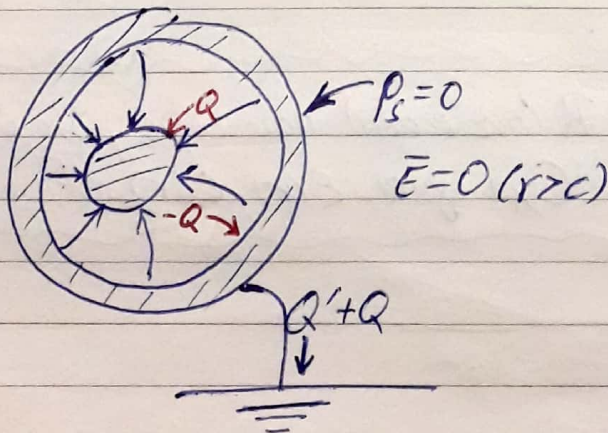
Οποιαδήποτε επιφ. Gauss και αν πάρω μέσα στον αγωγό είναι  $\vec{E}=0$ , άρα και η ροή 0, άρα και το συνολικό φορτίο.

Τα συνολικά φορτία στις επιφάνειες παραμένουν ίδια αλλά η κατανομή τους δεν είναι πλέον κατ'ανάγκη ομοιόμορφη.

Γιατί η κατανομή για  $r=a, b$  εξακολουθεί να είναι  $Q, -Q$ ; Όμως η κατανομή στην εξωτ. επιφ. εξακολουθεί να είναι ομοιόμορφη ( $\rho_s = \frac{Q'+Q}{4\pi c^2}$ ) διότι η δυναμική λόγω του

κελύφους "αποσυνδέει" τις μεταβολές στο εξωτερικό.

Για να είναι σωστή η δυναμική με την έννοια ότι έξω θα πρέπει  $\vec{E}=0$ , θα πρέπει το κέλυφος να χειωθεί.

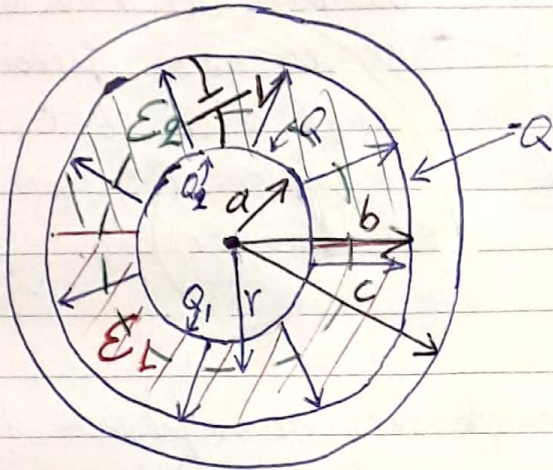




[2.4] Σφαιρικός πυκνωτής, μαζί το ήλιο με διηλεκτρικό  $\epsilon_1$   
 " " " " "  $\epsilon_2$

(η ακτινική συμμετρία διατηρείται)

Ζητούνται:  $C, \bar{E}, \rho_s$ , αποθηκευμένη ενέργεια



$$C = C_1 + C_2 = 2\pi\epsilon_1 \frac{ab}{b-a} + 2\pi\epsilon_2 \frac{ab}{b-a}$$

(παράλληλα)

1ος τρόπος: κυκλωματικά

2 ημισφαιρικούς πυκνωτές σε παράλληλη σύνδεση (ίδια  $V$ )

(Σφαιρικός πυκνωτής:  $C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}$ )

Ο ημισφαιρικός θα έχει τη μισή  $C$  (για ίδια  $V$  θα έχατο μισό  $Q$ )

$$C_{\text{ημίσφ}} = 2\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}$$

Έτσιμες σχέσεις για  $C, R$  (αντίστασης) παίρνουμε μόνο όταν  $\epsilon, \sigma$  κλπ είναι ομογενή. Όχι για  $\epsilon(r), \sigma(r)$ ...



2ος τρόπος : με υπολογισμό του  $\vec{E}$

Η ακτινική μορφή (σφαιρική συμμετρία) δεν διαταράσσεται επειδή η διαχ. επιφ. των δύο διηλεκτρικών είναι με διεύθυνση προς  $r$ .

Στη διαχ. επιφ. η  $\vec{E}_t$  είναι πάντα ευνεχής  
Εδώ, η  $\vec{E}_t$  είναι η  $E_r \cdot \hat{r}$

$$\text{Άρα } \vec{E} = E_r(r) \cdot \hat{r}$$

Προσοχή όμως! η επιφ. κατανομή του φορτίου δεν είναι ίδια στις δύο περιοχές.

στην περιοχή του  $E_1$

$$\rho_{s1}(a^-) = D_{r1}(a^+) = \epsilon_1 \cdot E_r(a^+)$$

$$\rho_{s2}(a^-) = D_{r2}(a^+) = \epsilon_2 \cdot E_r(a^+)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{s1}(a^-)}{\rho_{s2}(a^-)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{s1}(a^-) 2\pi a^2}{\rho_{s2}(a^-) 2\pi a^2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{\underbrace{Q_1 + Q_2}_{\rightarrow Q}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \\ Q_2 &= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_{s1}(a^-) &= \frac{Q_1}{2\pi a^2} \\ \rho_{s2}(a^-) &= \frac{Q_2}{2\pi a^2} \end{aligned} \right\}$$



## Υπολογισμός του $\vec{E}$ : v. Gauss

$$\vec{E} = 0 \text{ εκτός } a < r < b$$

$$\underline{a < r < b}: \iint_{S_r} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{0\lambda} \Rightarrow \underbrace{\epsilon_1 E_r}_{D_1} 2\pi r^2 + \underbrace{\epsilon_2 E_r}_{D_2} 2\pi r^2 = Q \Rightarrow$$

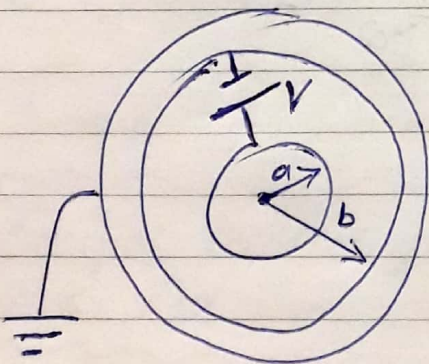
$$\Rightarrow E_r = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}$$

$$V = \int_a^b E_r dr = \dots = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{b-a}{ab}$$

$C = \frac{Q}{V}$  ακριβώς ίδια όπως με τον κυκλικωμετρικό χώρο

## 2<sup>ος</sup> τρόπος υπολογισμού του $\vec{E}$ .

Από την εξ. Laplace:  $\nabla^2 \phi = 0$  (σε χώρο χωρίς φορτία και ομογενή (έξω επιφάνεια))



με οριακές συνθήκες:  $\phi(a) = V$   
 $\phi(b) = 0$

εφαρμογές συντεταγμένων:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \phi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

$\phi(a) = V$   
 $\phi(b) = 0$



$$\dots \phi(r) = \frac{V}{b-a} \left( \frac{b}{r} - 1 \right)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} + \dots \phi(\hat{\phi}, \hat{\theta})$$

$$\boxed{E_r = \frac{V}{b-a} \frac{b}{r^2}}$$

(δεν είναι ίδιο με πριν γιατί στη θέση της εξ. Laplace θεωρούσα γνωστό το V αντί του Q).

Άρα τώρα πρέπει να υπολογίσω το Q

$$Q = Q_1 + Q_2 = \rho_{s1} 2\pi a^2 + \rho_{s2} 2\pi b^2 = D_1(a^+) 2\pi a^2 + D_2(b^+) 2\pi b^2 =$$

$$= [\epsilon_1 E_r(a^+) + \epsilon_2 E_r(b^+)] 2\pi a^2 = 2\pi a^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{V \cdot b}{(b-a)a^2} \quad \left( C = \frac{Q}{V} \text{ ακριβώς το ίδιο} \right)$$

Εργασία (ανοδηκευμένη)

1<sup>ος</sup> τρόπος:  $W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

2<sup>ος</sup> τρόπος:  $W_e = \frac{1}{2} \iiint (\epsilon |\vec{E}|^2) dV \rightarrow r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

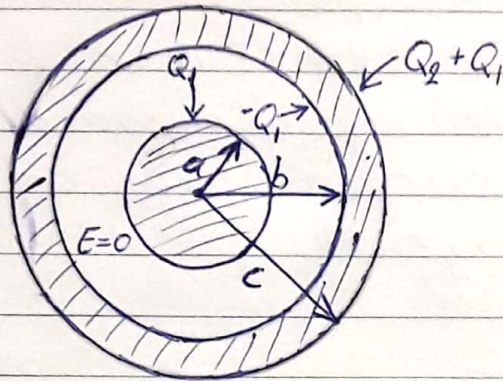
$$= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{V^2 b^2}{(b-a)^2 r^4} r^2 dr \int_0^{2\pi} \epsilon d\phi \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \dots$$



28-11-18

[2.14]

Σφαιρικός αγωγός (ακτίνας  $a$ , φορτίο  $Q_1$ )  
 Σφαιρικό κέλυφος (ομόκεντρο, εσωτερική ακτίνα  $b$ , εξωτερική ακτίνα  $c$ , φορτίο  $Q_2$ )  
 Να υπολογιστεί η ενέργεια του συστήματος.



Λύση

Στην εξωτερική επιφάνεια έχουμε φορτίο  $Q_1 + Q_2$ , διότι το συνολικό φορτίο του κελύφους πρέπει να παραμείνει  $-Q_1 + Q_1 + Q_2 = Q_2$

Από Α6κ [2.6]:

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \quad (\text{δυναμικό του αγωγού})$$

$$\phi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \quad (\text{δυναμικό του κελύφους})$$

1<sup>ος</sup> τρόπος:  $W_e = \frac{1}{2} (\phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2) = \dots$

2<sup>ος</sup> τρόπος: από το  $\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & a < r < b \\ 0, & b < r < c \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > c \end{cases}$



$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 |\vec{E}|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \int_a^b \left( \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot r^2 dr + \int_c^\infty \left( \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot r^2 dr \right\} \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \dots$$

⊛ 3<sup>ος</sup> τρόπος: Το όλο σύστημα είναι "εξομοιωμένο" ενός σφαιρικού πυκνωτή με ακτίνες  $a$  και  $b$  και φορτίο  $Q_1$  και ενός σφαιρικού αγωγού ακτίνας  $c$  και φορτίου  $Q_2$ . Άρα, η συνολική ενέργεια είναι το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών.

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_{ab}} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_c}$$

χωρητικότητα

χωρητικότητα

σφαιρ. πυκνωτή

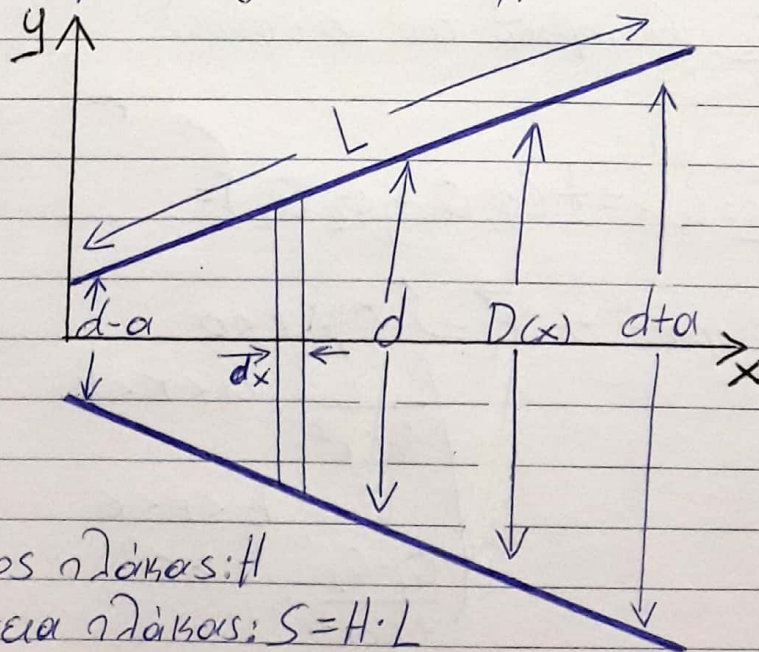
αγωγού

$$C_{ab} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{ab}{b-a} \right)$$

$$C_c = 4\pi\epsilon_0 c$$

[3]

Πυκνωτής με ηλόνια τοποθετημένες πλάκες με  $a \ll d$



Βάθος πλάκας:  $H$

Επιφάνεια πλάκας:  $S = H \cdot L$

$C = j$



Λύση:

1<sup>ος</sup> τρόπος: Στοιχειώδεις πυκνωτές επιφάνειας  $H \cdot dx$  και απόστασης  $D(x)$  σε παράλληλη σύνδεση

$$dC = \frac{\epsilon \cdot H \cdot dx}{D(x)}$$

(σχέση επιπέδου πυκνωτή)

$D(x)$ : γραμμ. συνάρτηση του  $x$

$$\left. \begin{aligned} D(0) &= d-a \\ D(L) &= d+a \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

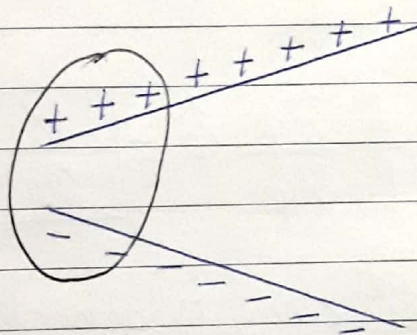
και όχι  $D(L \cdot \cos \theta)$ , διότι  $a \ll d$

$$\Rightarrow D(x) = d - a + \frac{x}{L} 2a$$

$$C = \int dC = \int_0^L \frac{\epsilon H dx}{d - a + \frac{2ax}{L}} = \frac{\epsilon H L}{2a} \ln \left( \frac{d+a}{d-a} \right) =$$

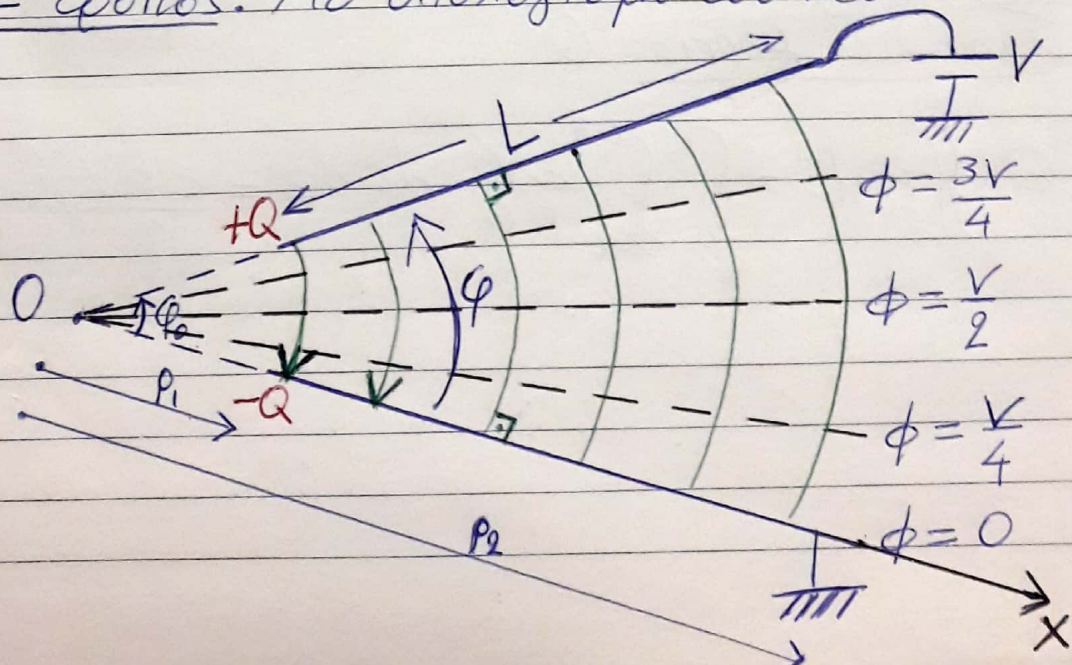
$$\frac{\epsilon H L}{2a} \ln \left( \frac{1 + \frac{a}{d}}{1 - \frac{a}{d}} \right) \stackrel{\frac{a}{d} \ll 1}{\approx} \frac{\epsilon \cdot S}{d} \left( 1 + \frac{a^2}{3d^2} + \dots \right)$$

παράλληλων πλατών υπάρχει μικρή αύξηση της  $C$



Οι πυκνότητες φορτίων είναι έντονοτερες στο στενό βήμα (μικρότερο  $D$ ), άρα αξιοποιείται περισσότερο αυτή η περιοχή

2<sup>ος</sup> τρόπος: Με υπολογισμό του πεδίου





Έχουμε κυλινδρική γεωμετρία με γραμμές του πεδίου προς  $-\hat{\varphi}$ , διότι είναι κάθετες στις πλάκες του πυκνωτή. ΔΕΝ έχουμε απόλυτη κυλινδρική συμμετρία για να εφαρμόσουμε τον ν. Gauss (Θα έπρεπε  $\vec{E} = E_r(r) \cdot \hat{r}$ ).

Λύνουμε την εξίσωση Laplace. Έτσι  $\nabla^2 \phi = 0$ .

Από τη συμμετρία  $\phi(r, \varphi, z) = \phi(\varphi)$

$$\nabla^2(\phi) \underset{\text{(κυλινδρ.)}}{=} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\iff \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \iff \boxed{\phi(\varphi) = c_1 \varphi + c_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Οριακές συνθήκες:  $\phi(0) = 0$   
 $\phi(\varphi = \varphi_0) = V$

Έτσι:  $\boxed{\phi(\varphi) = \frac{V}{\varphi_0} \varphi}$

Έτσι:  $E = -\nabla \phi \underset{\text{κυλινδρικές}}{=} -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} = \boxed{-\frac{V}{\varphi_0} \left( \frac{1}{r} \right) \hat{\varphi}}$

Πυκνότητα φορτίων (θετική πλάκα):

$$\rho_s = D \cdot n = \vec{D} \cdot \vec{n} = \vec{D} \cdot (-\hat{\varphi}) = \epsilon \vec{E} \cdot (-\hat{\varphi}) = \boxed{\frac{\epsilon V}{r \varphi_0}}$$

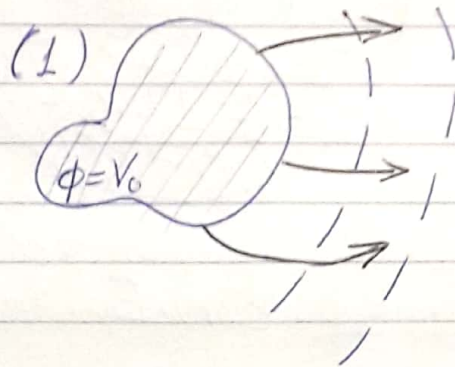
Συνολικό φορτίο:

$$Q = \iint_S \rho_s dS = \int_{r_1}^{r_2} \int_{z=0}^{z=H} \frac{\epsilon V}{r \varphi_0} dr dz = \frac{\epsilon H V}{\varphi_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



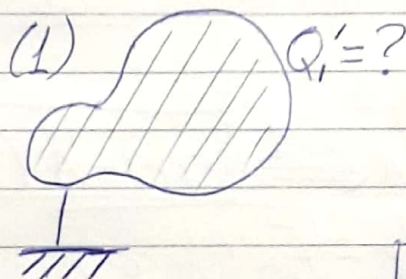
[7] Αγωγός έχει δυναμικό  $V_0$ . Σε σημείο P του χώρου το δυναμικό είναι ίσο με  $V$ . Αν στο σημείο P φέρουμε φορτίο  $q$  και χεώσουμε τον αγωγό, ποιο θα είναι το φορτίο που θα έχει.

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ  
A



$V$   
P  
(2)

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ  
B



$q$   
P  
(2)

Κατάστ. A: χωρίς τζόρο  
Κατάστ. B: με τζόρο

Λύση:

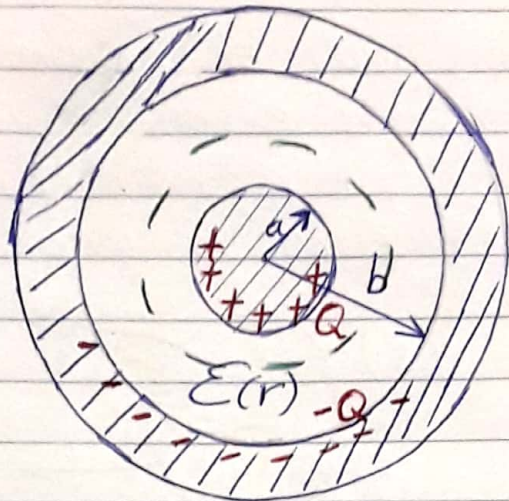
Θ. Αμοιβαιότητας (Green)

$$\sum_{i=1}^2 \phi_i \cdot Q_i' = \sum_{i=1}^2 \phi_i' \cdot Q_i \iff \phi_1 Q_1' + \phi_2 Q_2' = \phi_1' Q_1 + \phi_2' Q_2$$

$$\iff V_0 \cdot Q_1' + V \cdot q = 0 \cdot Q_1 + \phi_2' \cdot 0 \iff \boxed{Q_1' = -\frac{V \cdot q}{V_0}}$$

[5] Σ φαιρικός πυκνωτής (οικείνες  $a, b$ ) όπου θέλουμε να έχουμε σταθερό  $E = E_0$  σε όλο το χώρο  $a < r < b$  με κατάλληλη μεταβολή της  $E_r(r)$  και  $E(a) = A$ .  
(γνωστό)





Επειδή  $E_r(r)$ ,  
έχουμε απόλυτη  
σφαιρική συμ-  
μετρία.

Έστω  $Q, -Q$  τα φορτία. Αν' τον ν. Gauss  
για  $a < r < b$ :  $E(r) \cdot E_r \cdot 4\pi r^2 = Q \Leftrightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (1)

Για να είναι  $|E_r| = E_0 = \text{σταθ}$  θα πρέπει:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{a}{r^2}$$

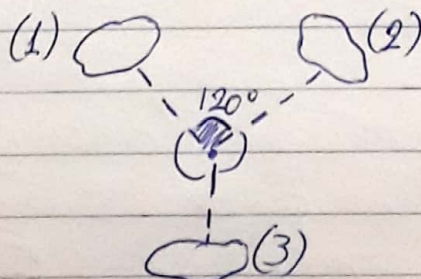
Έτσι:  $E(a) = A \xleftrightarrow{E(r) = \frac{a}{r^2}} E(r) = A \left(\frac{a}{r}\right)^2$

$$V = \int_a^b E_r dr = E_0 (b-a)$$

$$(1) \Rightarrow Q = A \left(\frac{a}{r}\right)^2 E_0 4\pi r^2 = A 4\pi E_0 a^2$$

$$\text{Άρα: } C = \frac{Q}{V} = \frac{A 4\pi E_0 a^2}{E_0 (b-a)} = \frac{4\pi A a^2}{b-a}$$

[9] 3 όμοιοι αγώγιμοι σε σφαιρική μετρία μεταξύ τους



• Κατάσταση Α: Ο αγώγιμος (1) συνδέεται με πηγή τάσης  $V$  και αποκτά φορτίο  $Q_1$  ( $Q_2 = Q_3 = 0$ ).

• Κατάσταση Β: Η ίδια πηγή συνδέεται στον (2) και αυτός αποκτά φορτίο  $Q_2$  ( $Q_3 = 0$ ).

• Κατάσταση Γ: Η ίδια πηγή συνδέεται στον (3) και αυτός αποκτά φορτίο  $Q_3$ .  
 $Q_3 = ?$  (Αν  $Q_1, Q_2$  γνωστά).



Λύση:

Στο Θ. αμοιβαιότητας δεν έχουμε τρόπο να περιγράψουμε την πληροφορία της ευμετρίας. Βολεύει η χρήση συντελεστών δυναμικού (σε κάθε κατάσταση το φορτίο είναι γνωστό ή ζητείται).

Έτσι:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 + P_{13} Q_3 \\ \phi_2 &= P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 + P_{23} Q_3 \\ \phi_3 &= P_{31} Q_1 + P_{32} Q_2 + P_{33} Q_3 \end{aligned} \right\}$$

Συνδέουν όλα τα  $Q$  με όλα τα  $\phi$ . Τα  $P_{ij}$  εξαρτώνται μόνο απ' τη γεωμετρία των αγωγών και τη σχετική τους θέση.

Λόγω ευμετρίας:  $P_{11} = P_{22} = P_{33} = P_s$  (self)

και:  $P_{12} = P_{23} = P_{31} = P_m$  (mutual)

$P_{12} = P_{21}$  (λόγω αμοιβαιότητας)

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= P_s Q_1 + P_m Q_2 + P_m Q_3 \\ \phi_2 &= P_m Q_1 + P_s Q_2 + P_m Q_3 \\ \phi_3 &= P_m Q_1 + P_m Q_2 + P_s Q_3 \end{aligned} \right\}$$

A:  $V = P_s Q_1 + P_m \cdot 0 + P_m \cdot 0 \Leftrightarrow V = P_s \cdot Q_1 \Leftrightarrow P_s = \frac{V}{Q_1}$

B:  $V = P_m Q_1 + P_s Q_2 + P_m \cdot 0 \Leftrightarrow V = P_m Q_1 + P_s Q_2 \Leftrightarrow$   
 $P_m = \frac{V - P_s Q_2}{Q_1} = \frac{V(Q_1 - Q_2)}{Q_1^2}$

Έτσι:  $\phi_3 = P_m Q_1 + P_m Q_2 + P_s Q_3 \Leftrightarrow Q_3 = \frac{Q_2^2}{Q_1}$

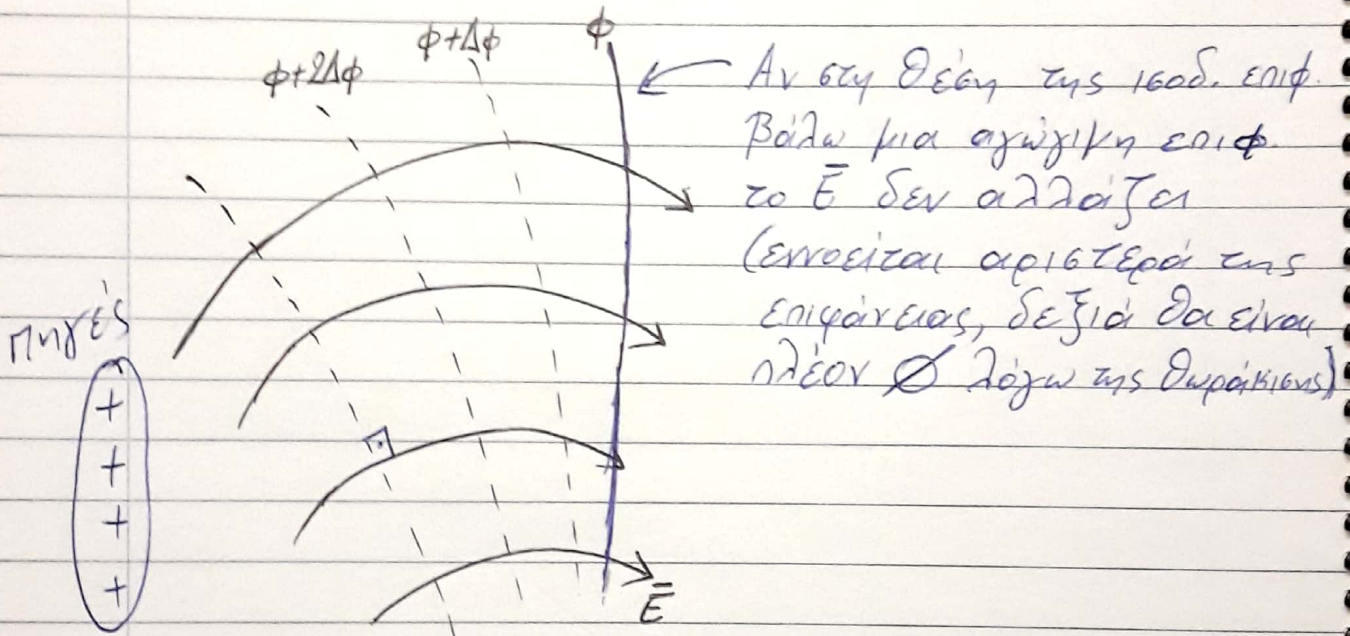


30-11-18

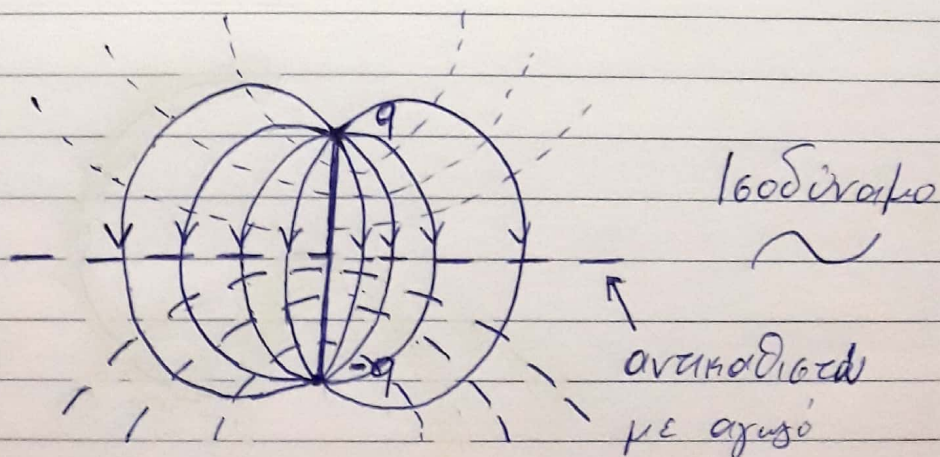
# Η μέθοδος των ειδώλων (μέθοδος ηλεκτρικού κατοπτρισμού)

Αρχή της ισοδυναμίας στο ηλεκροστατικό πεδίο  
(equivalence principle)

Αν σε κάποιο Η/Σ πεδίο αντικαταστήσουμε μια ισοδυναμική επιφάνεια με αγώγιμη, το πεδίο δεν θα αλλάξει.  
(δεν διαταράσσεται η μορφή του πεδίου)

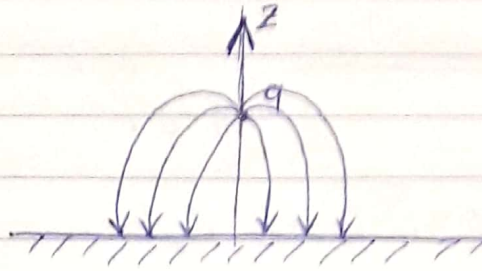


Παράδειγμα: ηλεκτρικό δίπολο





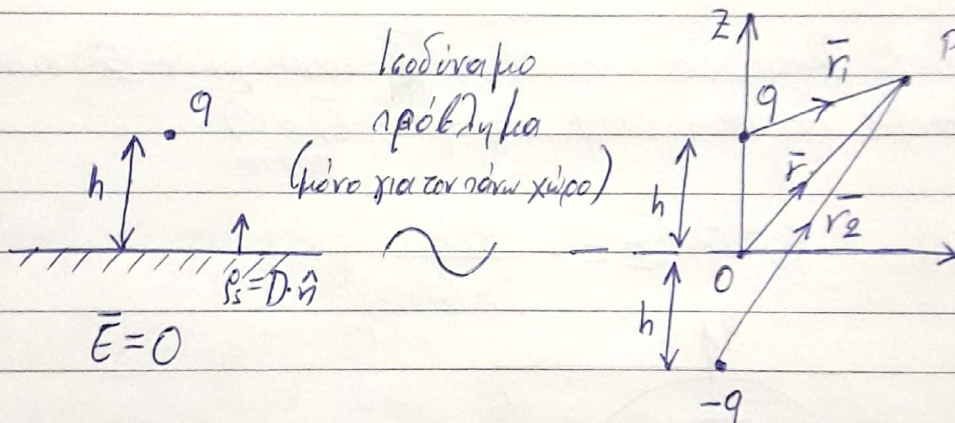
Ισοδύναμο



Η ισοδυναμία ισχύει  
μόνο για  $z \geq 0$   
διότι για  $z < 0$   
είναι  $\vec{E} = 0$

Η μέθοδος των ειδώλων εφαρμόζεται όταν έχουμε φορτία κοντά σε αχώριμες επιφάνειες και συνίσταται στον προσδιορισμό (εάν είναι εφικτό) υποθετικών φορτίων (ή ειδώλων) έτσι ώστε η αχώριμη επιφάνεια να παραμείνει ισοδυναμική.

1<sup>η</sup> περίπτωση: καταπολεμικός επιπέδου



$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

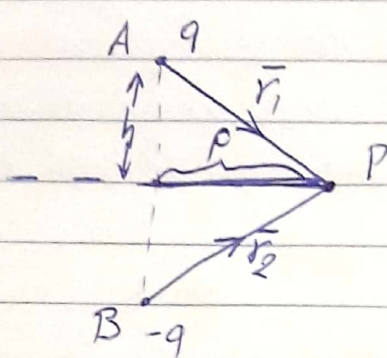
$$\vec{E}(r) = \frac{q \cdot \vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{(-q) \cdot \vec{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3}$$



Ενδιαφέρον πρόβλημα: υπολογισμός της  $\rho_s$  στο αχώρητο επίπεδο (ground)

$$\rho_s = \vec{D} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \cdot E_z$$

Πάρω στο επίπεδο ( $z=0$ ):

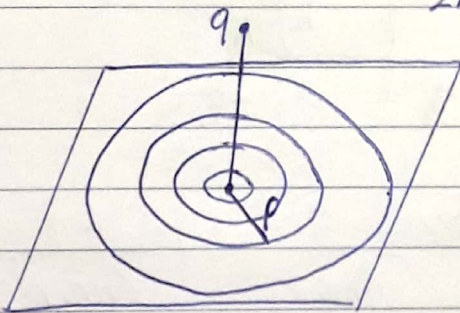


$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + h^2} \\ &= \frac{q \cdot 2h \cdot (-\hat{z})}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{AP} - \vec{BP} = \vec{AP} + \vec{PB} = \vec{AB} = 2h(-\hat{z})$$

Όπως (όπως θα έπρεπε) το  $\vec{E}$  έχει μόνο  $\hat{z}$  συνιστώσα (ξέρουμε ότι στην επιφ. αχώρου  $\vec{E}_t = 0$  πάντα)

$$\text{Επομένως } \rho_s = \epsilon_0 \cdot E_z = - \frac{q \cdot h}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$



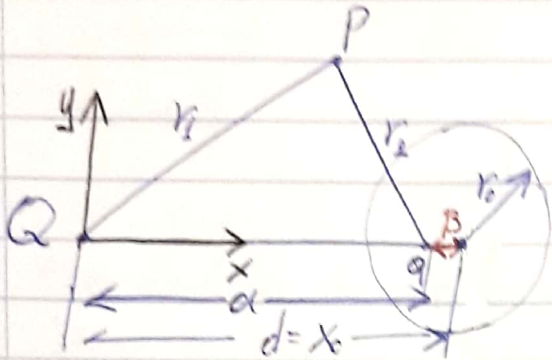
Συνολικό φορτίο στο επίπεδο:

$$Q_{\text{ολ}} = \iint \rho_s ds = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{-q \cdot h}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} d\rho d\varphi = \dots = -q$$



[12] (2<sup>η</sup> περίπτωση: κατασκευές εσφαιρών)

(α) Δύο ετερόσημα φορτία  $Q, q$  ( $Qq < 0$ , αλλά και  $|Q| > |q|$ )  
 Να δείξει ότι υπάρχει εσφαιρική ισοδ. επιφ. με  
 δυναμικό 0.



$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right)$$

Ισοδ. επιφ. με  $\phi=0$ : Αναζητώ όλα τα σημεία

$$\text{με } \phi(P)=0 \iff \frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = 0 \implies \frac{r_1}{r_2} = -\frac{Q}{q} = k > 1$$

Αναζητώ το γεωμ. τόπο των σημείων P:  $r_1 = k \cdot r_2$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \\ r_1 &= k \cdot r_2 \end{aligned} \right\} \implies \dots \implies \left( x - \frac{k^2}{k^2-1} a \right)^2 + y^2 + z^2 = \left( \frac{ak}{k^2-1} \right)^2$$

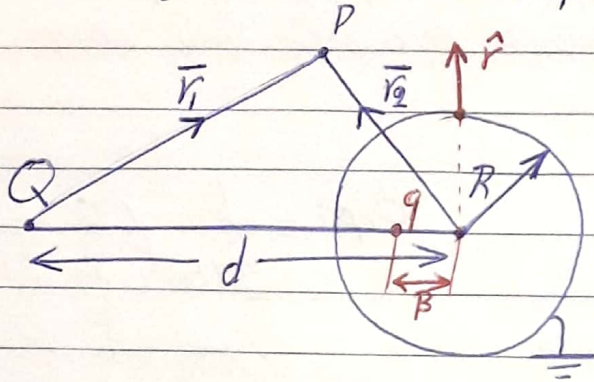
Εξ. Σφαιρών! (Ανολλώνια Σφαιρα) (Ανολλώνια Σφαιρα)

$$\left. \begin{aligned} \text{Κέντρο: } x_0 &= \frac{k^2}{k^2-1} a \\ \text{Ακτίνα: } r_0 &= \frac{ak}{k^2-1} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\left. \begin{aligned} \implies d = x_0 = k r_0 = -\frac{Q}{q} r_0 \\ \beta = d - a = \dots = \frac{a}{k^2-1} = \frac{r_0}{k} \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\beta \cdot d = r_0^2}$$



(β) Έχουμε φορτίο  $Q$  σε απόσταση  $d$  από το κέντρο  
αγωγικής <sup>γλεικέρης</sup> σφαίρας ακτίνας  $R$ .  
Να βρεθεί το ισοδύναμο πρόβλημα (το είδωλο και η θέση)



Ισοδύναμο πρόβλημα: είδωλο  $q$ :

$$d = -\frac{Q}{q} R \Rightarrow \boxed{q = -\frac{Q R}{d}}$$

Θέση  
(απόσταση από κέντρο)

$$\boxed{\beta = \frac{R^2}{d}}$$

Τις θεωρούμε γνωστές

(γ)  $\vec{E} = ?$   $\rho_s = ?$

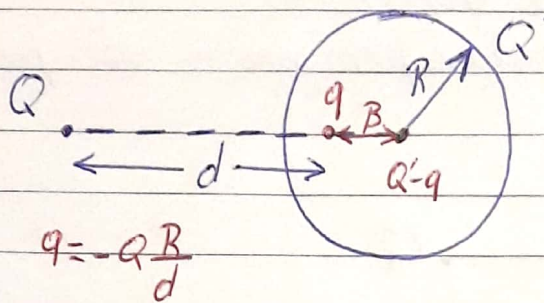
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \vec{r}_2 \quad \text{with } q = -\frac{QR}{d}$$

$$\rho_s = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{r} \Big|_s$$

$$Q_{\text{ολοκλήρωμα}} = \iint_S \rho_s ds = \dots = q$$



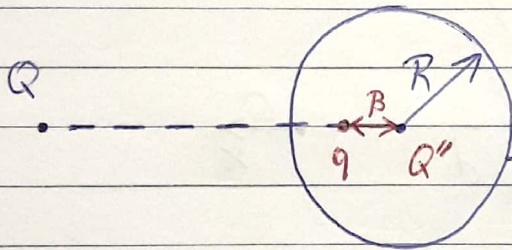
(5) Αν η σφαίρα είναι αρχικά φορτισμένη με φορτίο  $Q'$  ποιο είναι το ισοδύναμο;



Έχω και δεύτερο είδωλο που θα το τοποθετήσω αναγκαστικά στο κέντρο της σφαίρας (ώστε αυτή να παραμένει ισοδυναμική) και τέτοιο ώστε το συνολικό φορτίο να μένει ίδιο.

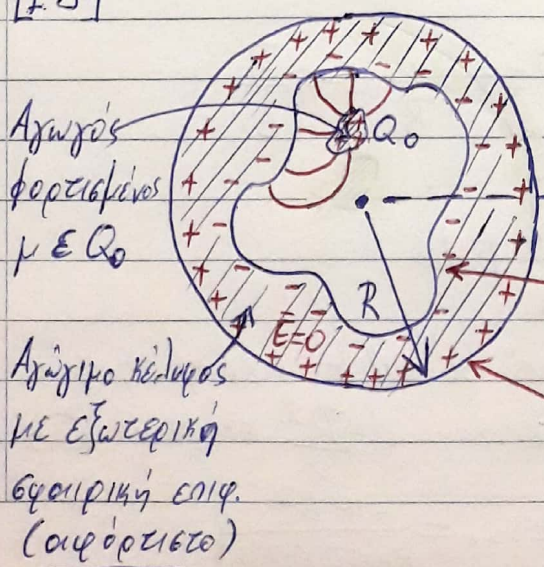
Άρα επιπλέον είδωλο  $Q'-q$  στο κέντρο της σφαίρας (ώστε το φορτίο να παραμένει  $Q'$ )

(ε) Αν η σφαίρα δεν είναι γεωδυναμικό  $Q$  αλλά π.χ. συνδεσμένη με πηγή τάσης  $V$ ;



Προσέσω κατάλληλο φορτίο  $Q''$  στο κέντρο της (ώστε να είναι ισοδυναμική) τέτοια ώστε να έχει το επιθυμητό δυναμικό. Άρα  $\phi = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 R} = V = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 R} = V \Rightarrow Q'' = V \cdot 4\pi\epsilon_0 R$

[18]



Ποιο είναι το ισοδ. πρόβλημα εξωτερικά της σφαίρας;

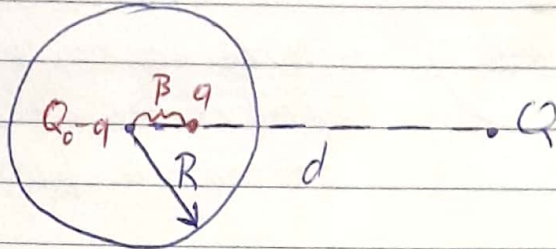
Συνολικό φορτίο  $-Q_0$  στην εσωτ. επιφ. του κελύφους.  
Το υπόλοιπο φορτίο  $Q_0$  κατανοείται στην εξωτ. επιφ.



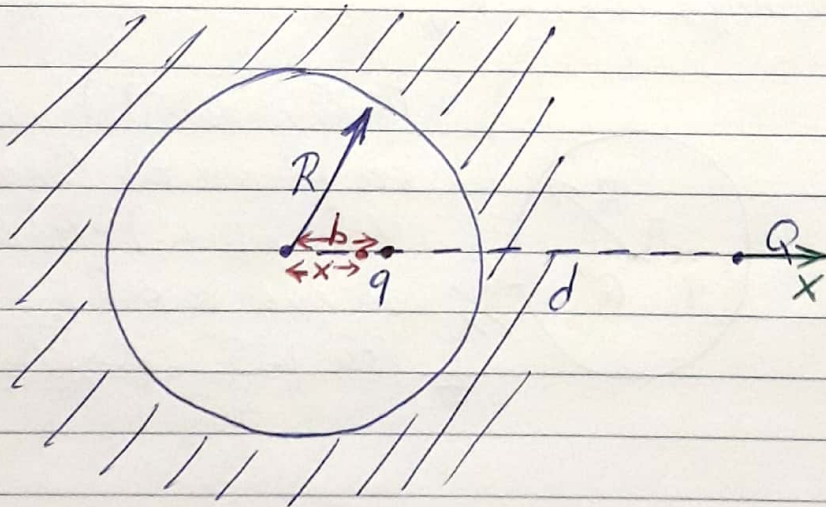
Καθ. πρόβλημα  
για έξω κέντρο

βλ. ασκ. 12  
περίπτωση (δ)

Σφαίρα φορτισμένη με φορτίο  $Q$   
Το πεδίο έξω είναι ανακυκλωμένο από το πεδίο μέσα



[20] Φορτίο  $q$  μέσα σε σφαιρικό κέλυφος.  
Ζητείται η δύναμη που ασκείται στο  $q$   
και το έργο για τη μεταφορά στο κέντρο



Είδωλο:  $d = \frac{R^2}{b}$

$Q = -q \frac{d}{R} = -q \frac{R}{b}$

$\vec{F} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 (d-b)^2} \hat{x}$

$W = \int_b^0 F dx$

Αν το  $q$  είναι σε απόσταση  $x$  από το κέντρο,  
τότε το  $Q$  είναι σε απόσταση  $d = \frac{R^2}{x}$  και είναι  $Q = -q \frac{R^2}{x}$

$F = \frac{q^2 \frac{R^2}{x}}{4\pi\epsilon_0 (\frac{R^2}{x} - x)^2}$

$W = \dots = \frac{-q^2 b^2}{8\pi\epsilon_0 R (R^2 - b^2)}$







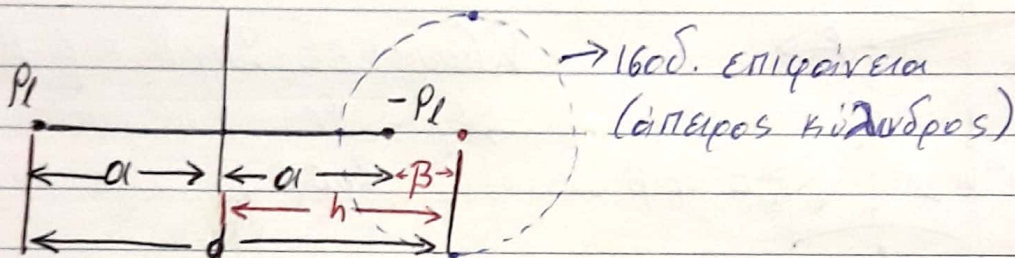
Ισοδυναμικές επιφάνειες:  $\phi = \phi_0$  (σταθ)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \phi_0 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = k = e^{\frac{2\pi\epsilon\phi_0}{\rho_1}} = \text{σταθ}$$

και στο επίπεδο  $xy$  ο γεωμ. τόπος των επιφανιών για τα οποία  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = k$  είναι κύκλος (Απολλώνιος κύκλος)

$$\rho_2 = k \rho_1 \Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = k^2 [(x-a)^2 + y^2] \Rightarrow \dots \text{προκύπτει κύκλος}$$

με ακτίνα  $R = \frac{2ka}{k^2-1}$  και κέντρο  $(h, 0)$  όπου  $h = a \frac{k^2+1}{k^2-1}$



Το κέντρο του κύκλου απέχει από το κοντινό φορτίο απόσταση:  $\beta = h - a = \frac{2a}{k^2-1}$

και από το μακρινό απόσταση:  $d = h + a = \frac{2k^2 a}{k^2-1}$   $\Rightarrow \beta d = \frac{4k^2 a^2}{(k^2-1)^2} = R^2$

Κατοπτρικός (είδωλο) για την περίπτωση άπειρου γραμμικού φορτίου δίπλα σε αγωγικό κύλινδρο

\*  
\*  
\*

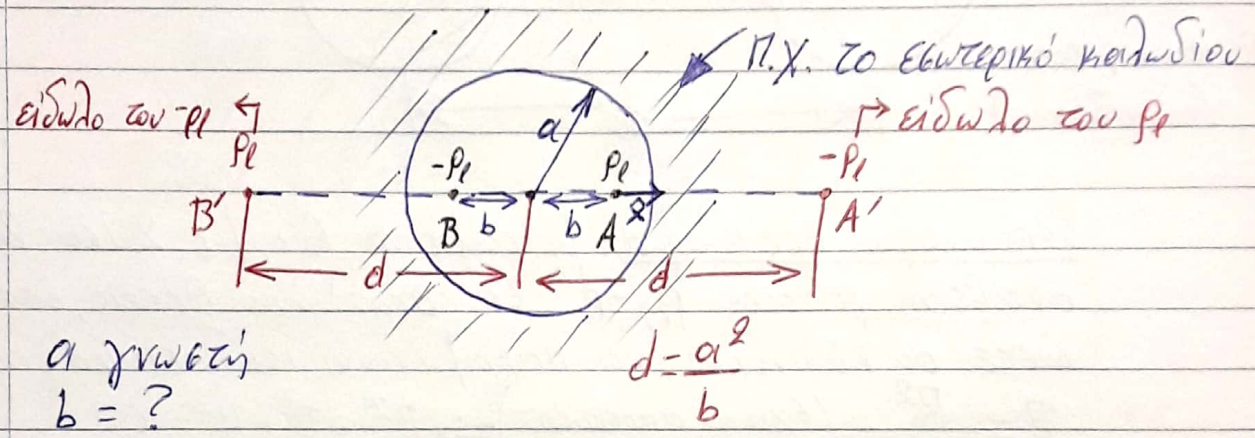
Είδωλο  $-\rho_1$  και σε απόσταση  $\beta = \frac{R^2}{d}$  από το κέντρο του αγωγικού κυλίνδρου



Μοιάζει πολύ με τον καταπριισμό σφαίρας:  $\beta = \frac{R^2}{d}$  και στις δύο περιπτώσεις.

Αλλά στον κύλινδρο τα είδη είναι  $-p_1$ , στη σφαίρα είναι μικρότερο και επιπλέον όλες οι ισοδ. επιφ. είναι κύκλοι (κύλινδροι)

[15] Δύο ίσα και αντίθετα γραμμ. φορτία στο εσωτερικό άπειρου κυλινδρικού σωλήνα. Ποια η θέση τους (συμμετρική) ώστε να ισορροπούν;



Το ισοδύναμο πρόβλημα έχει 4 γραμμικά φορτία και το αγώγιμο κέλυφος παραμένει ισοδ. επιφάνεια.

Π.χ. στο φορτίο  $p_1$  (στη θέση A)  
 ασκείται δύναμη  $\vec{F} = p_1 \vec{E}(A)$   
 (ανά μονάδα μήκους)

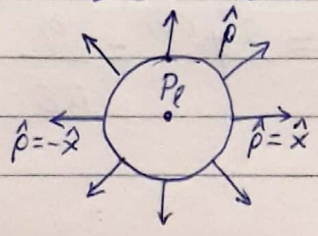
$$\vec{E}(A) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0(B'A)} \hat{x} + \frac{-p_1}{2\pi\epsilon_0(BA)} \hat{x} + \frac{-p_1}{2\pi\epsilon_0(AA')} (-\hat{x}) =$$

(υπερθεση των άλλων τριών) (είδη του  $-p_1$ ) (το  $-p_1$ ) (είδη του  $p_1$ )

$$= \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d+b} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{d-b} \right)$$

(Πεδίο γραμμικού φορτίου)

$$\vec{E} = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\rho}$$



Για  $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{E}(A) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow b^4 + 4a^2b^2 - a^4 = 0$   
 $\Rightarrow b = a\sqrt{5-2}$







Χωρητικότητα (ανά μονάδα μήκους)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 4R^2}}{2R}}$$

$(F/m)$

Σε σημείο P το διζονα x ανάμεσα στους κυλίνδρους

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{(PK)} \hat{x} + \frac{-Q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{(PA)} (-\hat{x}) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon} \left( \frac{1}{\frac{a}{2} - \beta + x} + \frac{1}{\frac{a}{2} - \beta - x} \right) \hat{x} \end{aligned}$$

Δύναμη μεταξύ των 2 αγωγών

1<sup>ος</sup> τρόπος: Αρκεί να βρω τη δύναμη που ασκείται σε ένα από τα δύο φορτία π.χ. στο  $-Q$  (εξαιτίας του  $Q$ ):

$$\vec{F} = (-Q) \vec{E}(P) = (-Q) \frac{Q}{2\pi\epsilon(a-2\beta)} \hat{x} = \dots = \frac{-Q^2}{2\pi\epsilon \sqrt{a^2 - 4R^2}} \hat{x}$$

$(N/m)$

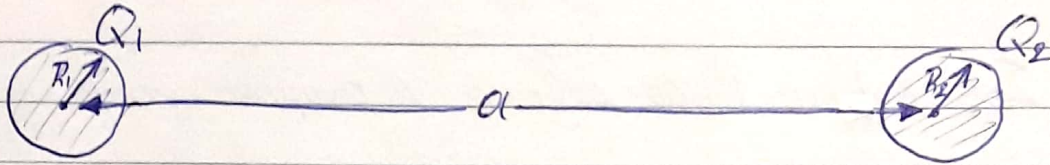
2<sup>ος</sup> τρόπος: Από την παραγωγή της ενέργειας ως προς την απόσταση των 2 αγωγών (διότι η  $\vec{F}$  τείνει να την μεταβάλει)

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial a} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial a} = \dots \text{ (βρήκα το ίδιο)}$$

Θεωρούμε  
 $V = \text{σταθ.}$



[19] 2 σφαίρες  $R_1, R_2$  (αγωγιμες) σε απόσταση μεταξύ τους  $a > R_1, R_2$   
 Συνδέονται με αγωγικό νήμα και το συνολικό φορτίο τους είναι  $Q$ .  
 $F = ?$



Επειδή  $a > R_1, R_2$  η μια σφαίρα "βλέπει" την άλλη ως σημειακό φορτίο και η κατανομή των φορτίων σε κάθε σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν ομοιόμορφη.

### Υπέρθεση

Συνολικό που οφείλεται στο φορτίο της ίδιας

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &\sim \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \\ \phi_2 &\sim \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \phi \text{ που οφείλεται στο } Q_2 \\ \text{(είναι πολύ μακριά, φαίνεται ως σημειακό)} \end{array}$$

Σύνδεση με αγωγικό νήμα:

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \boxed{Q_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{a} \right) = Q_2 \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Q_1 &= \frac{R_1(a - R_2)}{(R_1 + R_2)a - 2R_1R_2} Q \\ Q_2 &= \frac{R_2(a - R_1)}{(R_1 + R_2)a - 2R_1R_2} Q \end{aligned}}$$



1<sup>ος</sup> τρόπος:  $F \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{a^2}$  (τα  $Q_1, Q_2$  φοινορται  
ως επιλεκτικά)

2<sup>ος</sup> τρόπος:  $F = - \frac{\partial W_e}{\partial a}$

$W_e = \frac{1}{2} (\phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2)$

(είναι και ζαμωών):

Ίδιο αποτέλεσμα

$F \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}$  ( $\lambda = \frac{R_1}{R_2}$ )



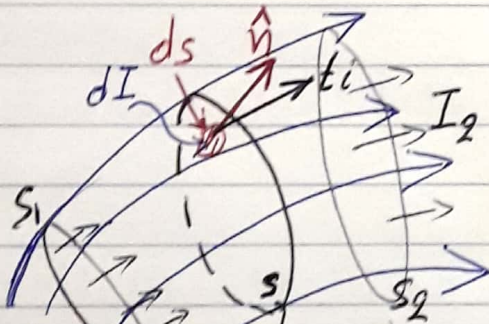
7-12-18

# Η/Σ Πεδίο Ροής Μονικών Ρευμάτων

Υπάρχει απόλυτη αντιστοιχία με το Η/Σ πεδίο φορτίων:  
ισχύουν οι ίδιοι (ή αντιστοιχεί) νόμοι & μεθοδολογίες.

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος:  $I = \frac{dQ}{dt}$

Η έννοια της πυκνότητας ρεύματος: περιγράφει τη ροή ρεύματος σε γημειακό (τοπικό) επίπεδο.  
(Μεγαλύτερη ή μικρότερη "πυκνότητα ροής φορτίων" σε διαφορετικά γημεία του χώρου)



Ροή  
 Ρεύματος  $I_1 = I_2$   $S_1 > S_2$  επιφάνεια κείσα από την οποία υπάρχει ροή ρεύματος.  
 $dI$  ρεύμα (A) που περνά από την  $ds$   
 $\hat{n}$  είναι το κάθετο μοναδιαίο στην  $ds$   
 $\hat{t}_i$  " " εφαπτομενικό μοναδιαίο προς τη ροή του ρεύματος

## Πυκνότητα ρεύματος (ορισμός)

$$\vec{J} = \frac{dI}{ds} \hat{t}_i \leftarrow \text{κατεύθυνση ροής ρεύματος}$$

(A/m<sup>2</sup>) (ρεύμα ανά μονάδα ρεύματος)



Συνολικό ρεύμα:

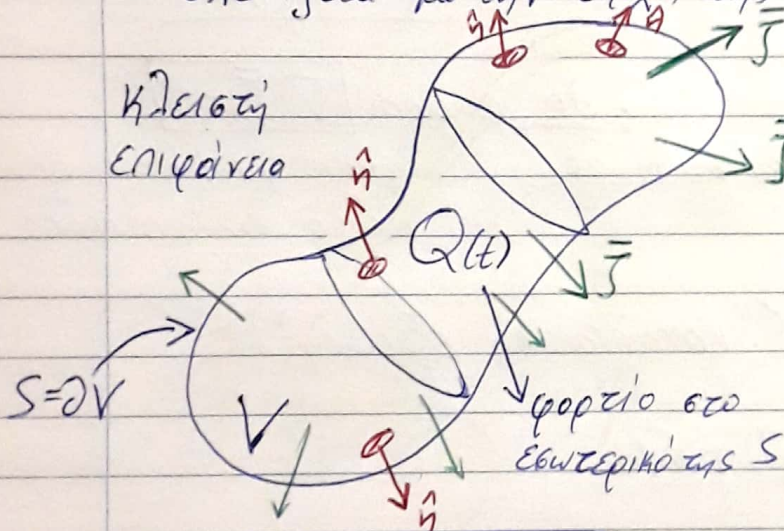
Στοιχειώδες ρεύμα από την  $ds$ :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{s} = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

η εξίσωση της συνέχειας (continuity condition)

↳ σχετίζεται με την αρχή της διατήρησης των φορτίων.



Έστω π.χ. πλεονάζοντα φορτία που διαρρέουν ως ρεύμα έξω από την επιφάνεια

$$\frac{dQ(t)}{dt} < 0$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{dQ}{dt}$$

↑  
συνολικό ρεύμα που εξέρχεται από την S

↑  
προβολή στη είσοδο

Q: Δεν είναι το φορτίο που περνά από την επιφάνεια αλλά αυτό που είναι μέσα στην επιφ.

Αρχή Διατήρησης του φορτίου



Σε τοπικό (επιφανειακό) επίπεδο:

$$Q = \iiint_V \rho dV$$

↑  
χωρική φορτία στον όγκο V

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{O. Gauss}} \iiint_V \nabla \cdot \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left( \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \xrightarrow{\forall V} \boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

εξ. συνέχειας

Στατικά πεδία :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  άρα  $\boxed{\nabla \cdot \vec{j} = 0}$   
(ρεύματα σε μόνιμη κατάσταση) η πυκν. ρεύματος είναι πεδίο εωληνοειδές.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{"καταστατική εξίσωση"})$$

↑   ↑   ↑  
πυκν. υλικό ένταση ηλ. πεδίου  
ηλ. ροής

Ποια είναι η αντίστοιχη σχέση στο πεδίο ροής;

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

νόμος Ohm (σε τοπικό επίπεδο)

$\sigma$ : (ειδική) αγωγιμότητα υλικού

π.χ.

Μέταλλα:  $> 10^7 \text{ S/m}$

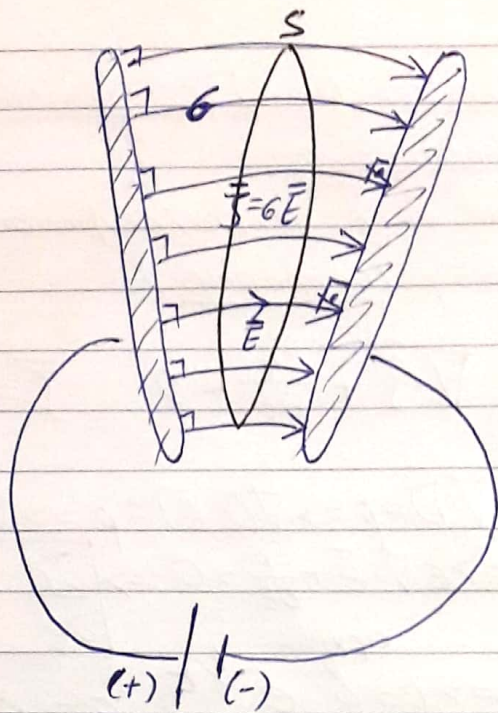
Cu:  $5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$

Νερό: θαλασσίνο:  $4 \text{ S/m}$

πόσι μω:  $10^{-3} \text{ S/m}$

Διηλεκτρικοί: Γυαλί  $10^{-12} \text{ S/m}$ , λάδι  $10^{-15} \text{ S/m}$



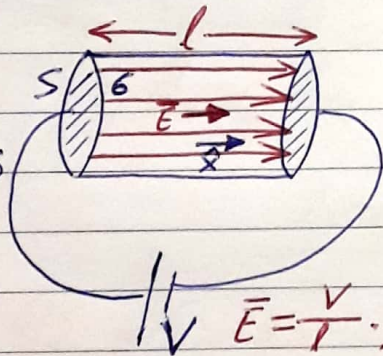


Δύο ηλεκτρόδια ( $\sigma \rightarrow \infty$ )

Η ηλεκτρική αντίσταση

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_{(+)}^{(-)} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Απόδοσ  
αντίστασης



$$R = \frac{V}{\sigma \frac{V}{\rho} S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{S}$$

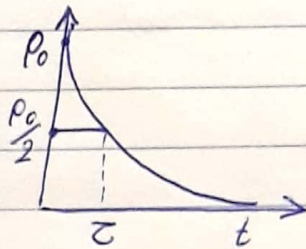
$$\rho = \frac{l}{\sigma (\frac{S}{m})} \quad \begin{matrix} \text{(ΕΙΔΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ)} \\ \text{(}\Omega \cdot \text{m)} \end{matrix}$$



Χρόνος χαλάρωσης (relaxation time) σε υλικό με  
αγωγιμότητα (και διηλεκτρικότητα)  
 (χρόνος που χρειάζεται ώστε φορτία/ρεύματα να φτάσουν  
 στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας)

$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$   
 $\nabla \cdot D = \rho \Rightarrow \nabla(\epsilon \cdot \vec{E}) = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$   
 $\sigma \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \right] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \rho = \rho_0 \cdot e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$

$\rho_0$  αρχική κατάσταση  
 $\tau$  χρόνος χαλάρωσης



Πρακτικά σε χρόνο 3-4  $\tau$  τα φορτία βρίσκονται στη μόνιμη κατάσταση.

Χρόνος χαλάρωσης ( $\tau$ )

- Μέταλλα:  $\sim 10^{-19} s$
- νερό (θαλασσινό):  $10^{-10} s$
- νερό (αποσταχμένο):  $10^{-6} s$
- Γυαλί:  $50 s$
- $SiO_2$ :  $10$  μέρες

Εξίσωση (διαφορική) του πεδίου ροής: εξίσ. Laplace

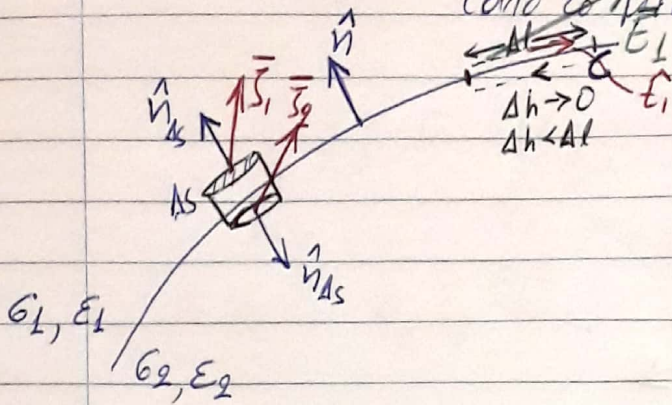
$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \xrightarrow{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}, \vec{E} = -\nabla \phi} \left[ \nabla(\sigma \cdot \nabla \phi) = 0 \right] \xrightarrow{\substack{\text{ευνήθως} \\ \sigma = \text{const.}}} \left[ \nabla^2 \phi = 0 \right]$

στατικό:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$



Οριστικές συνθήκες (για ομογενείς: ομογενείς) - interface conditions

(ανά το μήκος 2 προς το 1)



Ασφρόβιδο του  $\vec{E}$ :  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{t1} = E_{t2}}$  εφαπτ. συνιστώσα  $\vec{E}$  συνεχής

$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{n1} \Delta s - \int_{n2} \Delta s = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{J_{n1} = J_{n2}}$  κάθετη συνιστώσα του  $\vec{J}$  συνεχής  
 $\Downarrow$   
 $\epsilon_1 \cdot E_{n1} = \epsilon_2 \cdot E_{n2}$  (κάθετη συνιστώσα του  $\vec{E}$  ασυνεχής)

Αναλογίες Η/Σ μεδίων

Η/Σ πεδίο φορτίων

$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$   
 πυκν. ηλ. ροής

$N = \iiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$   
 ηλ. ροή

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{in}$   
 v. Gauss

$\vec{E} = -\nabla \phi$

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

$C = \frac{Q}{V}$

Η/Σ πεδίο ροής μόνιμων ρεμάτων

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$   
 πυκν. ρεύματος

$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$   
 ηλ. ροή

$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = I$  < λαμβάνει από την επιφ. \* το ανηγτ. του v. Gauss

$\vec{E} = -\nabla \phi$

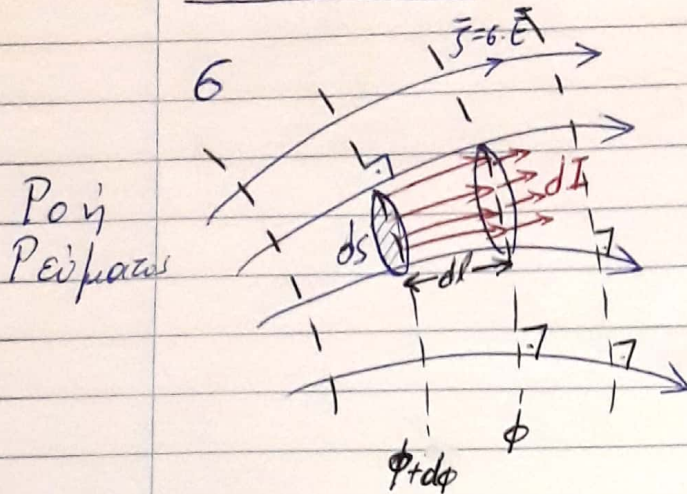
$\nabla \cdot \vec{J} = 0$

$\nabla^2 \phi = 0$

$\frac{I}{V} = \frac{1}{R}$



Νόμος Joule (απώλειες θερμότητας λόγω αγωγιμότητας)



Στο μικρό κύλινδρο  $ds \times dl$  έχω  $dI = \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot ds$   
 ( $\vec{J} \parallel d\vec{s}$  γιατί το πήρα ανάμεσα σε δυο γραμμές κ' ισοδυναμ. επιφ)  
 Πτώση τάσης  $dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl = (\phi + d\phi) - \phi = d\phi$   
 Έχως που καταναλώνεται (απώλειες Joule) στο μικρό κύλινδρο:  
 $dP = d\phi \cdot dI = E \cdot dl \cdot J \cdot ds = E \cdot J \cdot ds \cdot dl = E \cdot J \cdot dV$   
 (ρ = v · I)

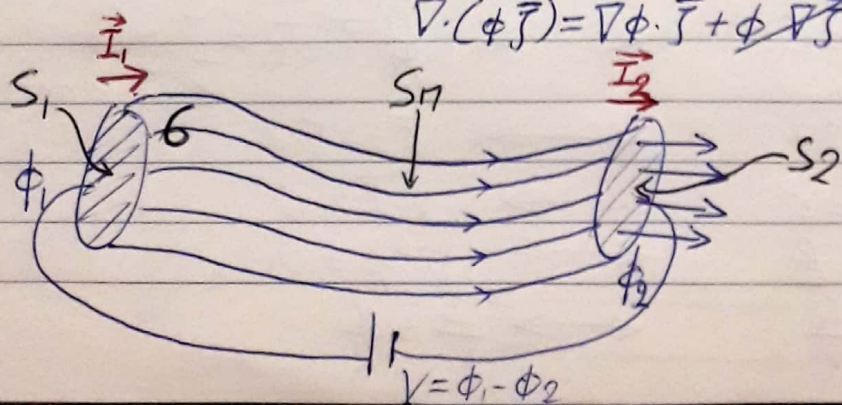
Πυκν. απωλειών Joule ανά μονάδα όγκου:  $p_J = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}$

Απώλειες Joule σε όγκο V:

$$P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \stackrel{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}}{=} \iiint_V \sigma \cdot |\vec{E}|^2 dV$$

$$P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV \stackrel{\vec{E} = -\nabla\phi}{=} - \iiint_V \nabla\phi \cdot \vec{J} dV$$

κοιτάζει να προκύπτει από το  $\nabla \cdot (\phi \vec{J}) = \nabla\phi \cdot \vec{J} + \phi \nabla \cdot \vec{J} \stackrel{\nabla \cdot \vec{J} = 0}{=}$





$$P = - \iiint_V \nabla(\phi \vec{J}) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iint_{S_1 + S_2 + S_n} \phi \cdot \vec{J} \cdot \vec{dS} =$$

$$= - \iint_{S_1} \phi \vec{J} \cdot \vec{dS} - \iint_{S_n} \phi \vec{J} \cdot \vec{dS} - \iint_{S_2} \phi \vec{J} \cdot \vec{dS} =$$

$$= \phi_1 \vec{J}_1 - \phi_2 \vec{J}_2 \stackrel{I_1 = I_2}{=} V \cdot I$$

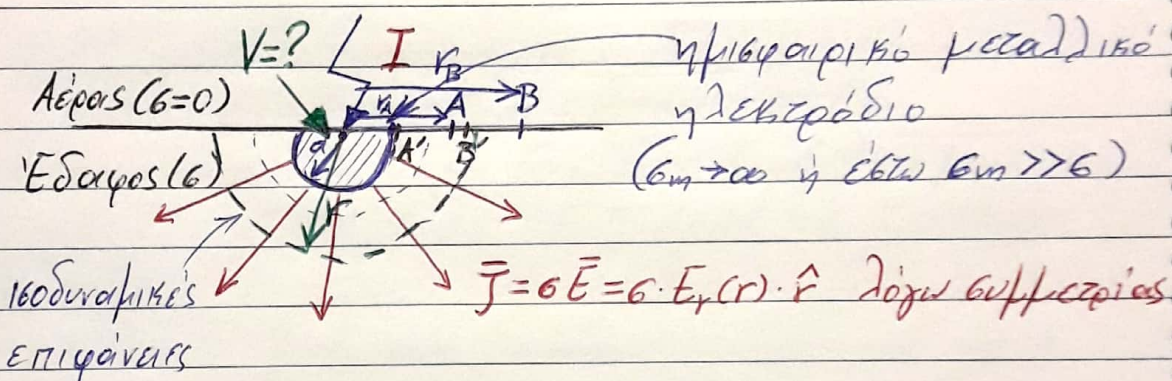


12-12-18

## Γειώσεις

Μεταλλικά ηλεκτρόδια κατάλληλων σχήματος για την επίτευξη χαμηλής αντίστασης γείωσης (ή "αντίστασης διάβασης" όπως ονομάζεται)  
 (εξαρτάται από το σχήμα/γεωμετρία του γειώτη αλλά σε μεγάλο βαθμό και από την αγωγιμότητα του εδάφους)

(i) Μία απλή περίπτωση: ημισφαιρικός γειώτης (απλή στην ανάλυση αλλά όχι ιδιαίτερα πρακτική)



Το αντίστοιχο του ν. Gauss:

Παίρνω ημισφαιρική επιφάνεια ακτίνας r.

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \Rightarrow J_r(r) \cdot 2\pi r^2 = I$$

↑  
εξ ουτι 4 διοτι είναι ημισφαιρική !!!

Άρα  $J_r(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$        $E_r(r) = \frac{J_r(r)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$

Δυναμικό του ηλεκτροδίου (ως προς το  $\infty$ )

$$V = V_\infty^0 + \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^\infty E_r dr = \frac{I}{2\pi\sigma a}$$



Αντίσταση διόδου (γείωσης)

$$R_s = \frac{V}{I} = \frac{L}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Γενική απαίτηση:  $R_s \leq 10$

Βηματική τάση

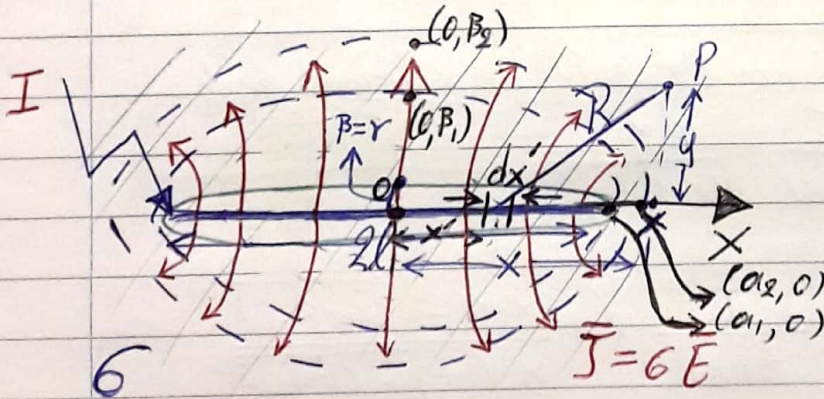
$V_{AB}$  μεταξύ 2 σημείων  $(AB) = 75 \text{ cm}$

$(A'B') \rightarrow$  μέγιστη βηματική τάση

Στην περίπτωση αυτή  $V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B E_r dr = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

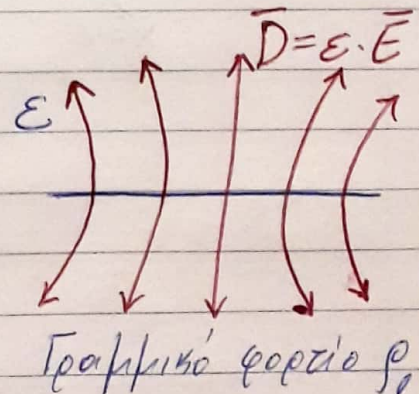
(ii) Γραμμικοί γείωτες (οι πιο καθιερωμένες γείωτες βασίζονται σε γραμμικούς αγωγούς εντός του εδάφους)

Αγωγός μήκους  $2l$  εντός του εδάφους



Γραμμική πηγή που διαχέει ευνοϊκό ρεύμα  $I$  στο έδαφος

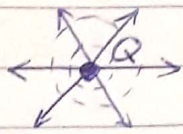
Αντιδράσει Η/Σ πεδία φορτίων





Χρειάζομαστε την αρχή της υπέρθεσης

Η/Σ πεδίο  
φορτίων

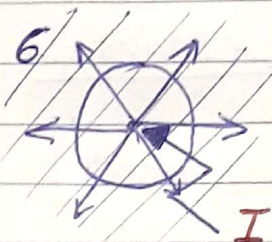


$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Σημειακό  
φορτίο

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

Η/Σ πεδίο  
ρεύματων



$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\epsilon} = \frac{I}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Σημειακή πηγή  
ρεύματος

$$\phi = \frac{I}{4\pi\epsilon r}$$

Κάθε στοιχειώδες τμήμα  $dz'$  της γραμμικής πηγής διαχέει  
στον περιβάλλοντα χώρο (έδαφος)  
ρεύμα  $dI = \frac{I}{2l} dx'$  (ομοιόμορφη)

Κάθε  $dx'$  μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακή πηγή:

$$d\phi = \frac{dI}{4\pi\epsilon R} = \frac{I}{8\pi\epsilon l} \frac{dx'}{\sqrt{(x'-x)^2 + y^2}}$$

$$\phi(x, y, z) = \int_{x'=-l}^{x'=l} d\phi = \frac{I}{8\pi\epsilon l} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$



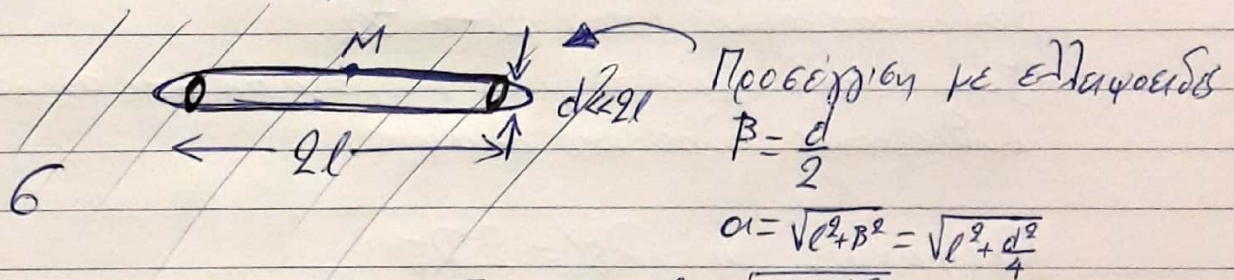
## Ισοδυναμικές επιφάνειες:

$$\phi = \epsilon \sigma \alpha \theta \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\underbrace{a^2 - l^2}_{\beta^2}} = 1 \quad \text{ελλείψεις}$$

με εστίες τα  $(\pm l, 0)$  (σε 3D: ελλειφοειδή)

Με βάση τη θεωρία της γραμμικής πηγής αναλύουμε κάθε σωληνωτό γειωτή προσεγγίζοντας τον ως λωπή ελλειφοειδής με μικρό ημιάξονα ( $\beta$ ) όσο η ακτίνα του σωληνωτού αγωγού.

(α) Σωληνωτός αγωγός βυθισμένος εξ ολοκλήρου στο έδαφος.



$$\phi = \phi(x=0, y=\beta = \frac{d}{2}) = \frac{I}{8\pi\epsilon l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}{-l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

$$R_s = \frac{\phi}{I} = \frac{1}{8\pi\epsilon l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}{-l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

αντίσταση  
δράσεως (γείωσης)

Συνήθως  $l \gg d$ :

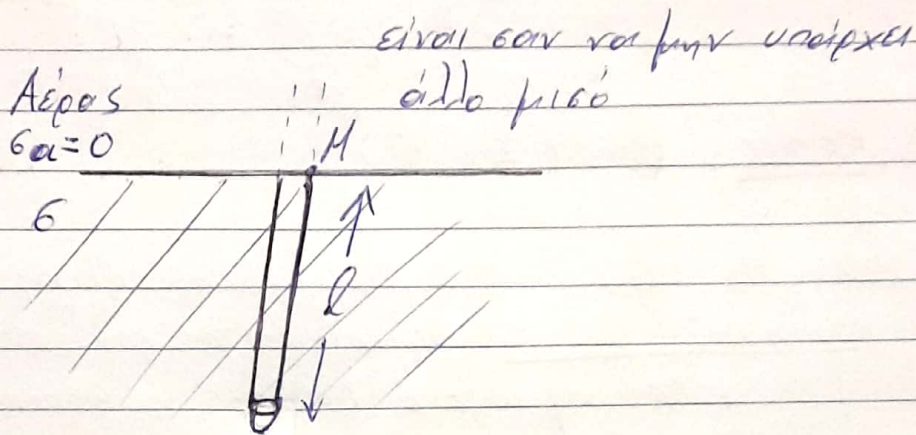
$$\sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}} = l \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{d}{2l}\right)^2}_{\ll 1}} \approx l \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2l}\right)^2 \right] = l + \frac{d^2}{8l}$$

$$R_s \approx \frac{1}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{4l}{d}$$

πολύ καλή προσέγγιση  
για  $l \gg d$



(β) Σωληνωτός γαιώτης βυθισμένος κατακόρυφα από την επιφ. του εδάφους



Προσέγγιση με ημιελλειψοειδές

Χρησιμοποιώ ακριβώς τις προηγούμενες σχέσεις (με το ίδιο  $l$ )

βάζοντας όμως όπου  $I \rightarrow I/2$

(Ξέρω ότι διαχέει το μισό ρεύμα από ότι αν ήταν  $2l$  βυθισμένος όλος στο έδαφος)

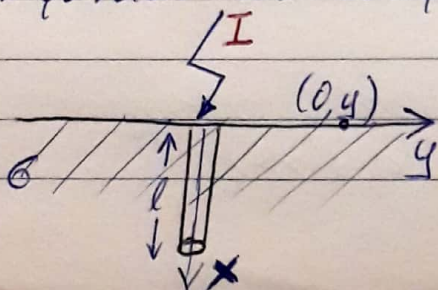
Προφανώς η  $R_{\delta'} = 2R_{\delta}$

$$R_{\delta'} = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}{-l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{4l}{d}$$

Συνήθως, για να επιτύχουμε επιθυμητή  $R_{\delta}$  χρησιμοποιούμε περισσότερους από έναν σωλήνες.

Χρειαζόμαστε και μια σχέση για τη μέση της αλληλεπίδρασης τους.

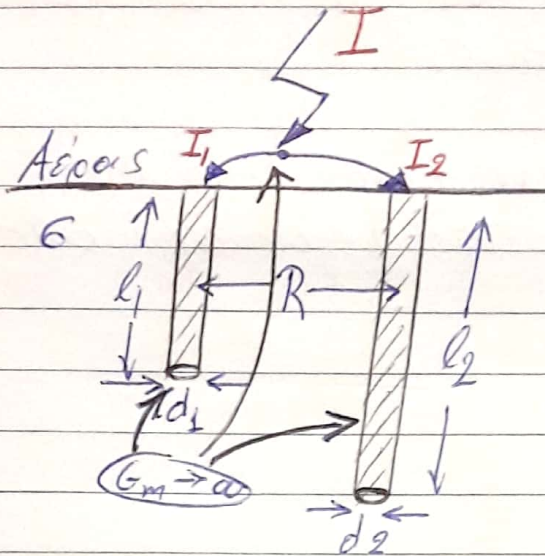
Σχέση του δυναμικού σωληνωτού γαιώτη σε κάθε σημείο της επιφάνειας του εδάφους



$$\phi(0, y) = \frac{I}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{-l + \sqrt{l^2 + y^2}}$$



Παράδειγμα: 2 κατακόρυφοι εωληγνστοί χείωτες σε παράλληλη σύνδεση.



Το δυναμικό σε κάθε χείωση είναι υπέρθεση 2 όρων (ένας από τον ίδιο και ένας από τον άλλο) λόγω των ρεύματων ταν ίδιου λόγω των ρεύματων του άλλου

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{I_1}{2\pi\epsilon l_1} \ln \frac{4l_1}{d_1} + \frac{I_2}{4\pi\epsilon l_2} \ln \frac{l_2 + \sqrt{l_2^2 + R^2}}{-l_2 + \sqrt{l_2^2 + R^2}} \\ \phi_2 &= \frac{I_1}{4\pi\epsilon l_1} \ln \frac{l_1 + \sqrt{l_1^2 + R^2}}{-l_1 + \sqrt{l_1^2 + R^2}} + \frac{I_2}{2\pi\epsilon l_2} \ln \frac{4l_2}{d_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ \phi_2 &= R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{aligned} \right\} R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} \text{ γνωστά}$$

$\phi_1 = \phi_2$  (σύνδεση σε κοινό επίπεδο)  $\Rightarrow$

$$(R_{11} - R_{21}) I_1 = (R_{22} - R_{12}) I_2 \Rightarrow I_1 + I_2 = I$$

$I_1, I_2$  γνωστά  
 $\phi_1, \phi_2$  γνωστά

$$R_S = \frac{\phi_1}{I_1 + I_2}$$



Είναι εωστό να πούμε ότι  $R_S = R_{S_1} // R_{S_2}$  ;

Όχι, διότι υπάρχει και η αλληλεπίδραση των αγωγών μεταξύ τους.

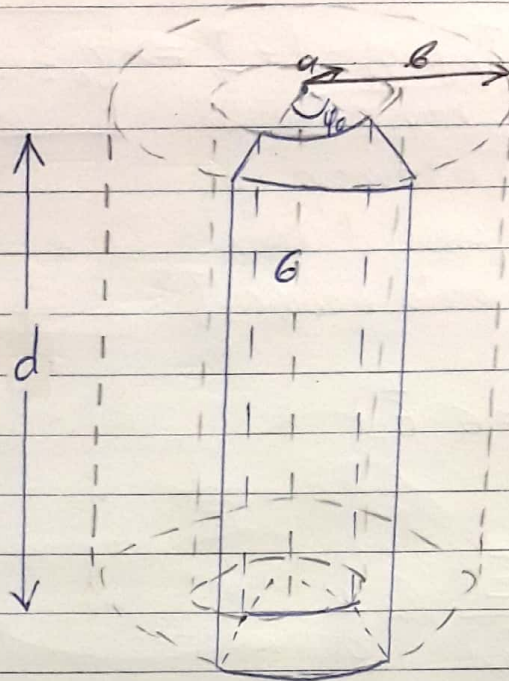
Όμως αυτή μπορεί να είναι μια καλή προσέγγιση όταν το  $R$  είναι πολύ μεγαλύτερο από τα  $l_1, l_2$ .



14-12-18

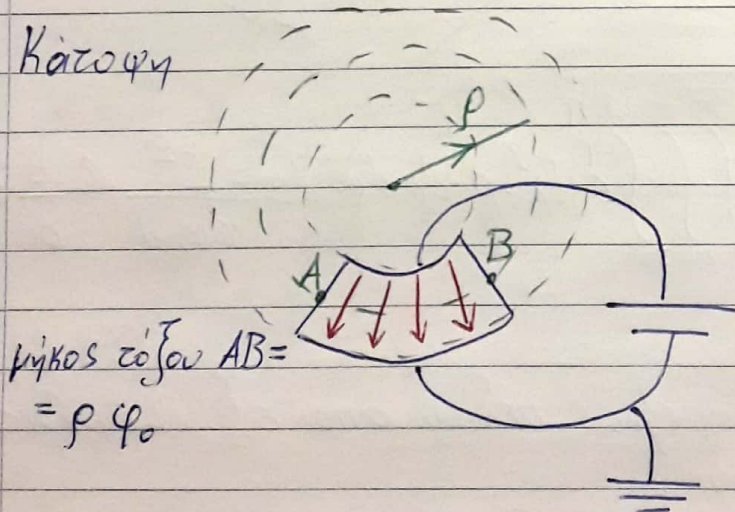
Πεδίο ροής - Αερίαις (Νέο φυλλάδιο)

[5] Υπολογισμός αντίστασης (κυλινδρικός διακώλιος χωνιακού τμήμα)



(α) Ηλεκτρόδια για  $\rho = a$  ( $\phi = V$ )  
 $\rho = b$  ( $\phi = 0$ )

Κατοψη



μήκος τμήμα  $AB =$   
 $= \rho \phi_0$



1<sup>ος</sup> τρόπος: Ακτινικό πεδίο (κυλινδρική συμμετρία)

$$\vec{J} = J_\rho(\rho) \cdot \hat{\rho}$$

Το αντίστοιχο του V. Gauss:

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \Rightarrow \underbrace{J_\rho \rho \varphi_0 \cdot d}_{\text{επιφ. του κυλίνδρου}} = I \Rightarrow \boxed{J_\rho = \frac{I}{\varphi_0 \cdot d \cdot \rho}}$$

εικτίνας  $\rho$  και  
ύψους  $d$  στην  
οποία υπάρχει  $J$

$$E_\rho = \frac{J_\rho}{\epsilon} \quad (\vec{J} = \epsilon \cdot \vec{E})$$

$$V = \int_a^b E_\rho d\rho = \frac{I}{\epsilon \varphi_0 d} \ln \frac{b}{a}$$

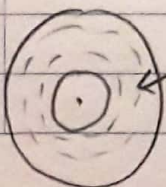
$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\epsilon \cdot \varphi_0 \cdot d} \ln \frac{b}{a}$$

Απώλειες Joule:

$$P = \iiint \epsilon \cdot |\vec{E}|^2 dv = \int_{\rho=a}^b \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \int_{z=0}^d \epsilon \cdot E_\rho^2 \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi dz = \frac{I^2}{\epsilon \varphi_0 d} \ln \frac{b}{a} = I^2 \cdot R$$

2<sup>ος</sup> τρόπος: Υπολογισμός πεδίου από εξ. Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \xrightarrow[\varphi(\rho)]{\text{κυλινδρικές συντ.}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0 \Rightarrow \phi = c_1 \ln \rho + c_2 \quad \left. \begin{array}{l} \phi(a) = V \\ \phi(b) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



160δυναμικές  
επιφάνειες

$$\phi(a) = V$$

$$\phi(b) = 0$$



$$\Rightarrow \phi = V \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}}$$

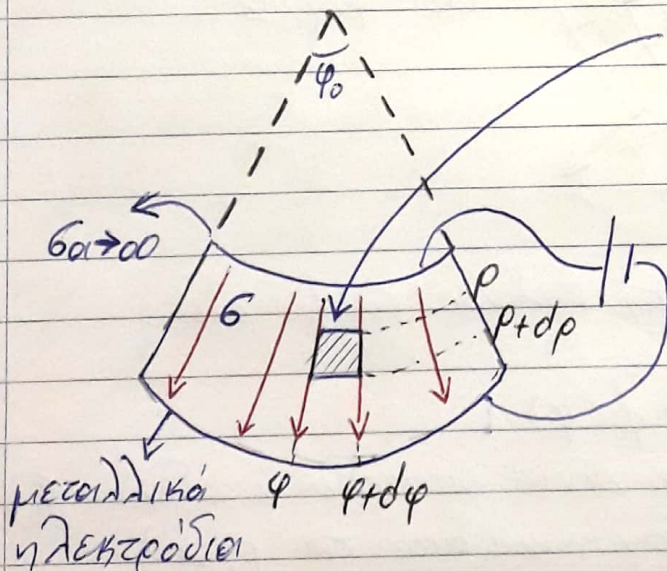
$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\hat{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int \rho \phi \cdot d$$

$$R = \frac{V}{I} = \text{ίδιο με πριν}$$

3ος τρόπος: χωρίς υπολογισμό του πεδίου  
(στοιχειώδεις αντιστάσεις σε σειρά/παράλληλα)



στοιχειώδης απόσταση (γραμμική)  
μεταξύ:  $\rho, \rho+dp$   
 $\phi, \phi+dp$  ( $R = \frac{1}{\sigma S}$ )  
 $z, z+dz$   
 $G = \sigma \frac{S}{l}$

Το μικρότερο τμήμα έχει στοιχειώδη αγωγιμότητα:

$$d^3 G = \sigma \frac{\rho d\phi dz}{dp}$$

Τα μικρά τμήματα  $dz$  είναι μεταξύ τους παράλληλα.  
Μια "κοιλία" επιφάνειας  $d\rho \times \rho d\phi$  και ύψους  $d$ .

$$\text{έχει } d^2 G = \int_{z=0}^d d^3 G = \sigma d \frac{\rho d\phi}{dp}$$



Και τα σημεία κατά  $d\rho$  είναι μεταξύ τους παράλληλα άρα:

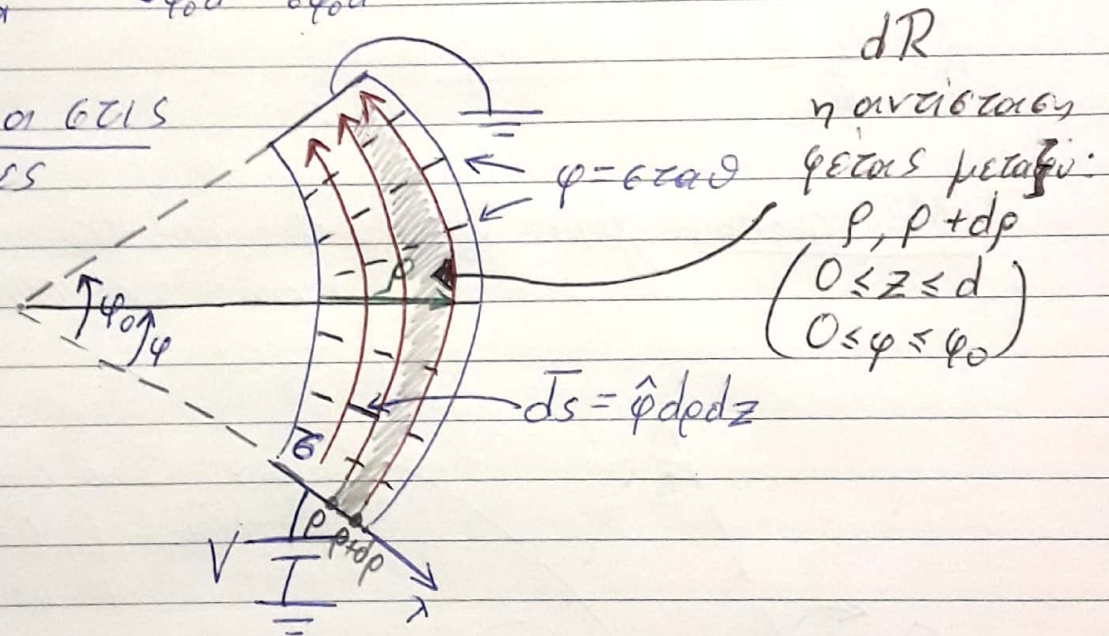
$$dG = \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} d^2G = G d\varphi_0 \frac{\rho}{d\rho} \left( \begin{array}{l} \text{η "φέτα" μεταξύ} \\ z=0 \text{ και } d \\ \varphi=0 \text{ " } \varphi_0 \\ \rho \text{ " } \rho+d\rho \end{array} \right)$$

$$\frac{dR}{(4dG)} = \frac{1}{6\varphi_0 d} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$R = \int_{\rho=a}^b dR = \frac{1}{6\varphi_0 d} = \frac{1}{6\varphi_0 d} \ln \frac{b}{a} \quad \text{όπως και πριν}$$

β) Ηλεκτροδυναμικές επιφάνειες

$\varphi=0$  κ'  $\varphi=\varphi_0$   
 $\phi(a)=V$   $\phi(\varphi_0)=0$



Δεν έχουμε απόλυτη κυλινδρ. συμμετρία

Εξ. Laplace  $\phi = \phi(\varphi)$

(δίνει οι 1600. επιφ. είναι επίπεδα σταθερού  $\varphi$ , άρα το  $\phi$  δεν εξαρτάται από τα  $\rho, z$ )

$$\nabla^2 \phi = 0 \xrightarrow{\text{κυλινδρ.}} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow \phi = c_1 \varphi + c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(0) = V \\ \phi(\varphi_0) = 0 \end{array} \right\} \phi(\varphi) = \frac{V}{\varphi_0} (\varphi_0 - \varphi)$$



$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\varphi} = \frac{V}{\varphi_0 \rho} \hat{\varphi}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{V \cdot \sigma}{\varphi_0 \rho} \hat{\varphi}$$

$$I = \iiint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{z=0}^d \int_{\rho=a}^b J_{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \, \rho \, d\rho \, dz = \frac{\sigma \cdot V d}{\varphi_0} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\varphi_0}{\sigma \cdot d} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}$$

Β' τρόπος : Στοιχειώδεις Αντιστάσεις σε βίπαι/παράλληλες

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{\rho \varphi_0}{\rho \cdot d} \leftarrow \text{μήκος φέρας (αξία)}$$

$$\leftarrow \text{επιφ. φέρας (}\rho \text{ επί όλο το ύψος } d\text{)}$$

$$(R = \frac{1}{\sigma} \frac{\rho}{s})$$

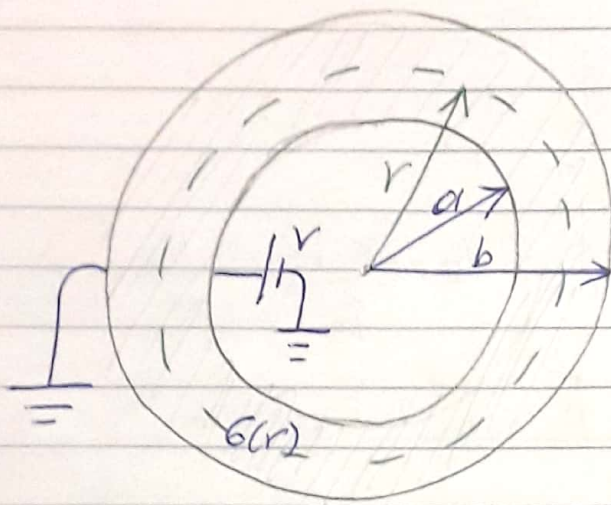
Παράλληλη σύνδεση

$$dG = \sigma \frac{d}{\rho \varphi_0} \rho \, d\rho$$

$$G = \int_{\rho=a}^b dG = \frac{\sigma \cdot d}{\varphi_0} \ln \frac{b}{a} \quad \text{το ίδιο με τον άλλο τρόπο}$$



[7] Σφαιρικό κέλυφος  $a, b$ : η διαφορική χωρική πυκνότητα  
 $\epsilon(r) = \epsilon_0 \frac{r}{a}$



1<sup>ος</sup> τρόπος:  $\vec{J} = J_r(r) \cdot \hat{r}$

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \Rightarrow J_r \cdot 4\pi r^2 = I \Rightarrow J_r = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{J_r}{\epsilon(r)} = \frac{I \cdot a}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{I \cdot a}{8\pi \cdot \epsilon_0} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{a}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

2<sup>ος</sup> τρόπος: Από εξ. Laplace

Προσοχή: Όταν  $\epsilon$  δεν είναι ομοιόμορφο, η εξ. Laplace είναι λίγο διαφορετική.



$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \xrightarrow{J = \sigma \cdot \vec{E} = -\sigma \nabla \phi} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \phi \text{ είναι } \phi(r) \quad \nabla \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \hat{r} \\ \sigma \nabla \phi &= \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \hat{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r)$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sigma(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \phi(r) = -C_1 \frac{\sigma \epsilon_0}{2r^2} + C_2 \right. \left. \begin{array}{l} \phi(a) = V \\ \phi(b) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \dots \text{ ίδιο με πριν}$$

3<sup>ος</sup> τρόπος: κέντρος μεταξύ  $r$  και  $r+dr$

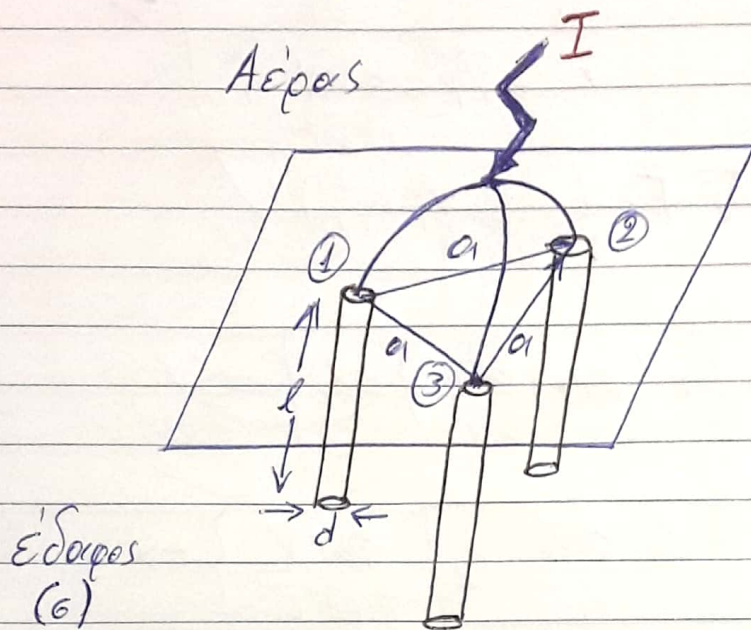
$$dR = \frac{1}{\sigma(r)} \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \int dR = \dots \text{ ίδιο με πριν}$$

(σε βεβαιότητα)



[12] Σύστημα 3 όμοιων σωληνωτών γραμμών σε  
ισόπλευρο τρίγωνο.



Το δυναμικό κάθε γραμμής οφείλεται (με υπέρθεση)  
όσοι ρεύματα και των φασών

$$V_1 = \underbrace{\frac{I_1}{2\pi\epsilon l_1} \ln \frac{4l_1}{d}}_{\lambda\acute{o}\gamma\omega I_1} + \frac{I_2}{4\pi\epsilon l_2} \ln \frac{l_2 + \sqrt{l_2^2 + a^2}}{-l_2 + \sqrt{l_2^2 + a^2}} + \frac{I_3}{4\pi\epsilon l_3} \ln \frac{l_3 + \sqrt{l_3^2 + a^2}}{-l_3 + \sqrt{l_3^2 + a^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= R_s I_1 + R_m I_2 + R_m I_3 \\ V_2 &= R_m I_1 + R_s I_2 + R_m I_3 \\ V_3 &= R_m I_1 + R_m I_2 + R_s I_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (R_m \text{ ίσες διοτι} \\ & l_1 = l_2 = l_3 \\ & d_1 = d_2 = d_3 \\ & \text{και ανεξάρτητες } a) \end{aligned}$$



Συνδέονται στο ίδιο συνολικό  $V_1 = V_2 = V_3 \Rightarrow I_1 = I_2 = I_3 = \frac{I}{3}$   
αλλά αλληλ. μεταξύ τους και λόγω της αλληλ. επίθεσης

$$V = R_s \frac{I}{3} + R_m \frac{I}{3} + R_m \frac{I}{3} = \frac{R_s + 2R_m}{3} I$$

$$R_s = \frac{V}{I} = \frac{R_s + 2R_m}{3}$$

Αντίστροφα  
γνώσεις

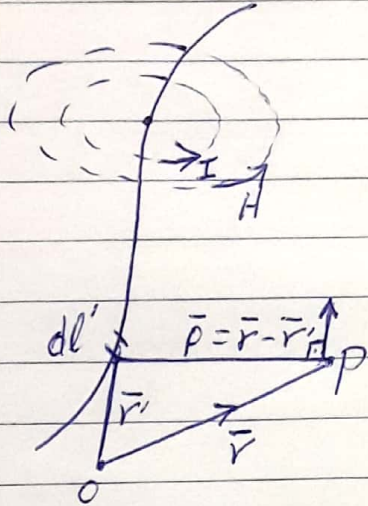


19-12-18

Μαγνητοστατικό Πεδίο

Προκαλείται από κινούμενα φορτία (ρεύματα) - ΔΕΝ υπάρχουν μαγνητικά φορτία

$\vec{H}$ : ένταση του μαγνητικού πεδίου (A/m)



Νόμος Biot-Savart

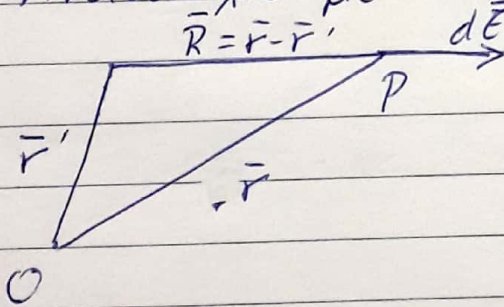
$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

Επιπέδο παρατήρησης

$$d\vec{H} \perp d\vec{l}'$$

$$d\vec{H} \perp \vec{R}'$$

Αντιστοιχία με Ν. Coulomb



$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

(αν ήταν γραμμικό)  
 $dQ = \rho_l dl'$



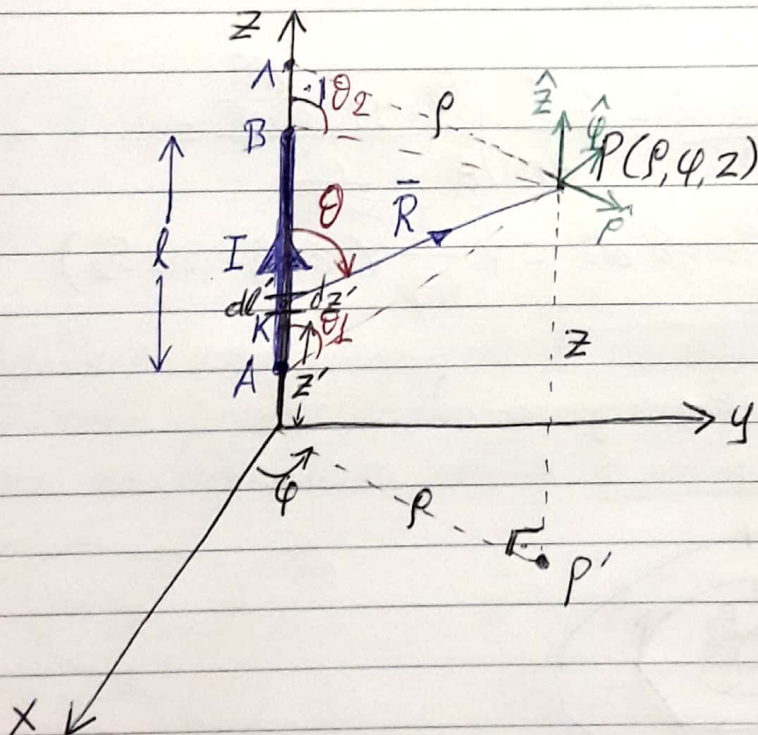
Ομοιότητα: Νόμος αντίστροφου τετραγώνων

Διαφορά: Το  $d\vec{E} \parallel \vec{R}$  (ακτινικό)  
 ενώ  $d\vec{H}$  είναι κάθετο και στο ρεύμα  
 αλλά και στη δίοση της ακτίνας

Γενική Έκφραση Biot-Savart:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{\text{αγωγός}} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

Παράδειγμα: ευθύγραμμος αγωγός (πεπερασμένου μήκους)



$$d\vec{l}' = \hat{z} dz'$$

$$\vec{R} = \overline{KA} + \overline{AP} = (z - z')\hat{z} + \rho\hat{\rho}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

$$d\vec{l}' \times \vec{R} = dz' \hat{z} \times [(z - z')\hat{z} + \rho\hat{\rho}] = \rho dz' \hat{\phi}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{z_A}^{z_B} \frac{\rho dz' \hat{\phi}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \text{Εύκολο} = \rho dz' \hat{\phi}$$

$$\hat{z} \times \hat{z} = 0 \quad \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$$



2<sup>ος</sup> τρόπος: Θα παραλήξω σε ευκολότερο αποτέλεσμα αν αντί της  $z'$  χρησιμοποιήσω ως μεταβλητή ορθογώνιας τη  $\theta$  (εξήκολα).

$$\tan \theta = \frac{\rho}{z-z'} \Rightarrow z-z' = \frac{\rho}{\tan \theta}$$

$$dz' = \rho \frac{-1}{\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \Rightarrow$$

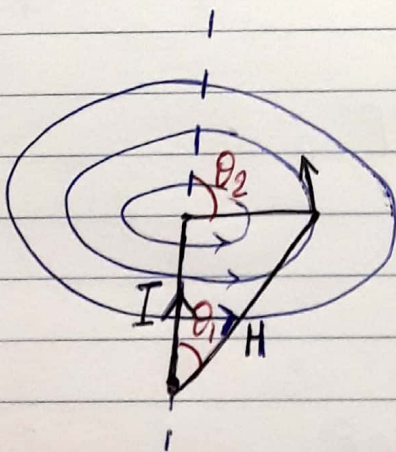
$$\Rightarrow \boxed{dz' = \rho \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}}$$

και επίσης

$$\sin \theta = \frac{\rho}{R} \Rightarrow R = \frac{\rho}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{\rho dz' \hat{\varphi}}{R^3} = \hat{\varphi} \frac{I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho \rho \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}}{\frac{\rho^3}{\sin^3 \theta}} = \\ &= \hat{\varphi} \frac{I}{4\pi \rho} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \hat{\varphi} \frac{I}{4\pi \rho} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

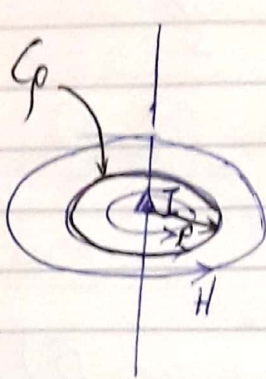
Τύπος (θεωρείται γνωστός)



$$\vec{H} = \hat{\varphi} \frac{I}{4\pi \rho} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



$\vec{H}$  άπαρου εσφύγραμμου ρεύματος



$$\vec{H} = \hat{\varphi} \frac{I}{2\pi r}$$

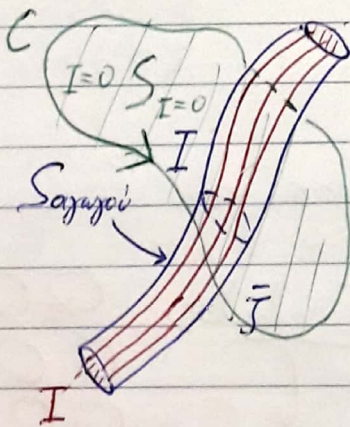
(για  $\theta_1 \rightarrow 0$   
 $\theta_2 \rightarrow \pi$ )

Είναι το μαγν. πεδίο αστροβίδας;

Όχι! π.χ. σε κύκλο ακτίνας  $r$   
(κόμβος στο σχήμα και σφόνδυλος)

$$\oint_{C_r} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi r} \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} r d\varphi = I \neq 0$$

Αποδεικνύεται (θεωρητικά & πειραματικά) ότι για οποιαδήποτε μορφή ρεύμα και οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που το περικλείει ισχύει ο νόμος του Ampère:



$$I = \iint_{S_{\text{αγωγού}}} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_{C=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_{S_{\text{αγωγού}}} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

Διάρρημα (που διαπερνά μια επιφάνεια)  
→ Μαγνητοχειρτική δύναμη (ΜΕΔ)



$$\oint_{C=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\text{Θ. Stokes}} \iint_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \forall S$$

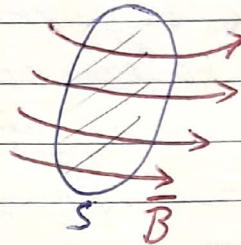
$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \text{ v. Ampère (αυξιακή μορφή)}$$

### Μαγνητική Επαγωγή:

Όπως και στο Η/Σ πεδίο (δίνω μετατόπιση  $\vec{D}$ ) υπάρχει και εδώ μέγεθος που εκφράζει την πυκνότητα μαγν. ροής:  
 $\vec{B}$  (μαγνητική επαγωγή)

### Μαγνητική ροή

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



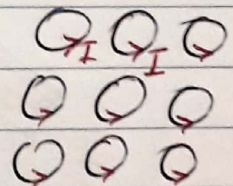
Καταστατική εξίσωση (εξίσωση που περιλαμβάνει την επίδραση του υλικού)

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \left( \begin{array}{l} \text{αντίστοιχη ως } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{array} \right)$$

μαγνητική διαπερατότητα  
 (magnetic permeability)

Το  $\mu$  "εμπυκνώνει" όλη την αντίδραση του υλικού σε ένα εξωτ. μαγνητικό μέδιο.

(Δημιουργούνται μικρά μαγνητικά δίπολα)



↓  
 μικροί βρόχοι ρεύματος σε μοριακό επίπεδο



Τα περισσότερα υλικά δεν έχουν μαγνητικές ιδιότητες.  
 $\mu \approx \mu_0 \rightarrow$  μαγν. διαπερατότητα του κενού  
 $\mu_r \approx 1$

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}}$$

$$\boxed{\mu = \mu_0 \cdot \mu_r}$$

$\rightarrow$  σχετική μαγνητική διαπερατότητα

### Εξαιρέση

- Κάποια κράματα μετάλλων  
 π.χ. Fe:  $\mu_r \gg 1$  (π.χ. 1000)
- Φερριτες

### Αναλογίες Πεδίων

#### H/S (σφαιρικών)

#### M/Σ

Αερόβιο \*  
 $\nabla \times \vec{E} = 0$  ή  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

v. Ampère  
 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$  ή  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$   
 $N = \iint \vec{D} \cdot d\vec{s}$  ηλ. ροή

$\vec{B} = \mu \vec{H}$   
 $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  μαγν. ροή

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$   
 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$  (v. Gauss)

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$  (v. Gauss)  
 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  \* Σωληνοειδής  
 (ή αβήνιο)

Ενέργεια ηλ. πεδίου  
 $W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 dV$

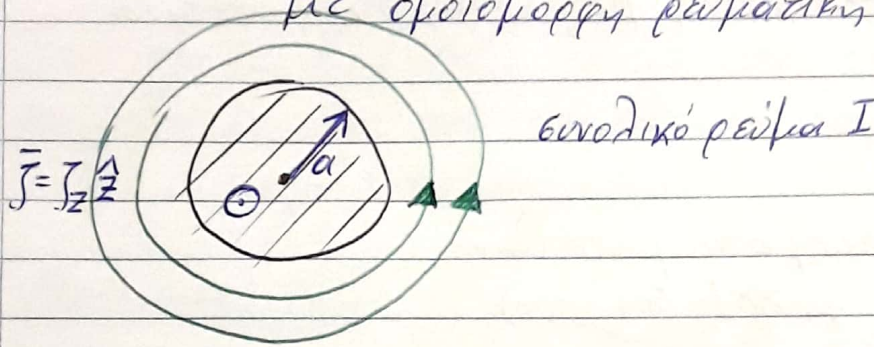
Ενέργεια μαγν. πεδίου  
 $W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 dV$



Επίλυση απλών προβλημάτων του Μ/Σ με το v. Ampère

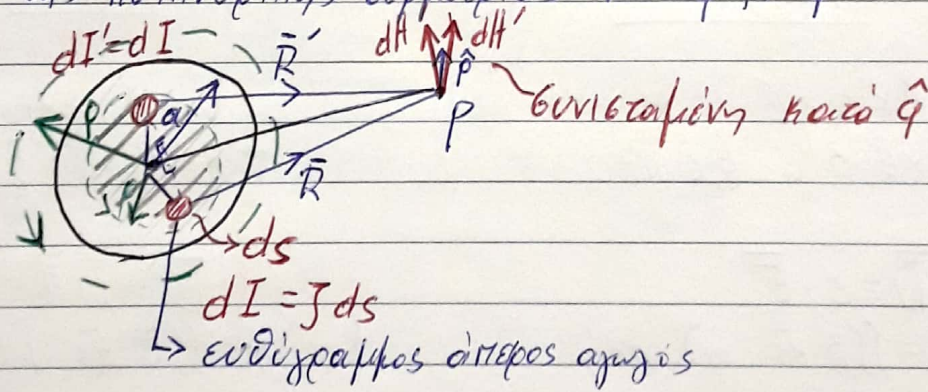
- Σε κατάλληλα επιλεγμένη καρδιά που περικλείει τον αγωγό
- Απαιτείται απόλυτη κυλινδρική ή επίπεδη εξμετρία.

Παράδειγμα: Αγωγός κυλινδρικής διατομής άπειρου μήκους με ομοιόμορφη ρεύματική κατανομή.



$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \quad (\text{καλή προσέγγιση στις χαμηλές συχνότητες})$$

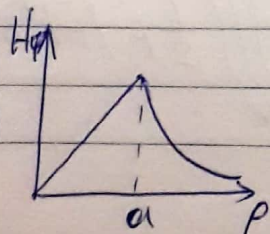
Λόγω της κυλινδρικής εξμετρίας:  $\vec{H} = H_\phi(\rho) \cdot \hat{\phi}$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

(i)  $\rho > a$ :  $H_\phi \cdot 2\pi\rho = I \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi a^2} \rho$

(ii)  $\rho < a$ :  $H_\phi \cdot 2\pi\rho = \underbrace{J_2 \pi \rho^2}_{\text{όχι } \pi a^2} \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi a^2} \rho$



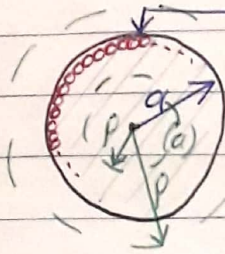
μόνο το μέρος του ρεύματος εντός της καρδιάς



21-12-18

(ii) Ο ίδιος αγωγός σε υψηλές συχνότητες

Υπάρχει (Πεδίο II) το επιδερμικό φαινόμενο:  
 Το ρεύμα συγκεντρώνεται σε στρώση σχεδόν μηδενικού πάχους στην επιφάνεια (πρακτικά  $\approx \mu\text{m}$ )



Επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος  
 (β)  $\vec{J}_s = \hat{z} \frac{I}{2\pi a}$  (ομοιόμορφη)  
 (ή  $\vec{K}$ )

$I$   
 (Α)

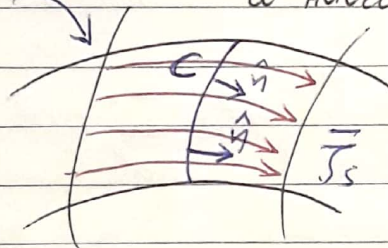
$\vec{J}_s$   
 (Α/μ)

$\vec{J}$   
 (Α/μ<sup>2</sup>)

$$I = \int_C \vec{J}_s \cdot \hat{n} \cdot dl$$

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

φύλλο ρεύματος  
 (επιφάνεια)

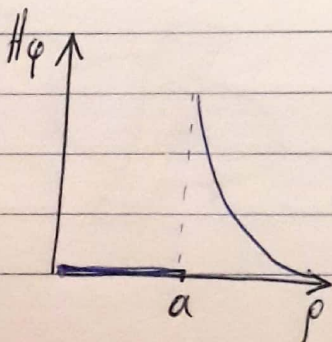


το κούτσουλο στην κατεύθυνση αλλά εντός της επιφάνειας που ρέει το ρεύμα.

V. Ampère:  $\vec{H} = H_\phi(\rho) \cdot \hat{\phi}$  λόγω κυλινδρικής συμμετρίας

(α)  $\rho < a$  :  $H_\phi \cdot 2\pi\rho = 0 \Rightarrow H_\phi = 0$

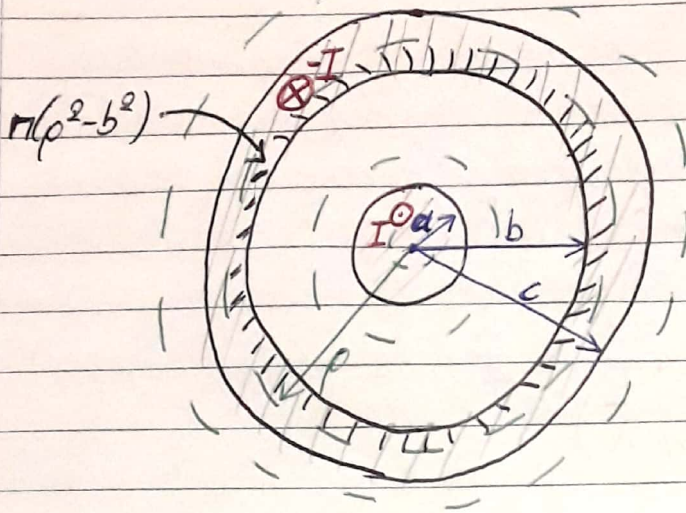
(β)  $\rho > a$  :  $H_\phi \cdot 2\pi\rho = I \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$



Όταν έχουμε  $\vec{J}_s$  υπάρχει ασυνέχεια του  $\vec{H}$



(iii) Ομοαξονικό καλώδιο



Ομοιογενής ρευμ. κατανομή:

- Στον εσωτ. αγωγό:  $\vec{J}_{in} = \hat{z} \frac{I}{\pi a^2}$
- Στο περίβλημα:  $\vec{J}_{ext} = -\hat{z} \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \underline{r < a} : H\varphi 2\pi r &= J_{in} \pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \\ \bullet \underline{a < r < b} : H\varphi 2\pi r &= I \\ \bullet \underline{b < r < c} : H\varphi 2\pi r &= I + J_{ext} \pi(r^2 - b^2) \\ \bullet \underline{r > c} : H\varphi 2\pi r &= \underline{I - I = 0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{H} = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!  
 είναι το <sup>συνολικό</sup> ρεύμα που περικλείει  
 κάθε φορά ο κύκλος ακτίνας  $r$







## Δυναμικά Μ/Σ πεδίων

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \neq 0 \quad \text{όχι ασφρόβιλο}$$

(γενικά)

Άρα κανονικά δεν ορίζεται κάποιο βαθμωτό δυναμικό.

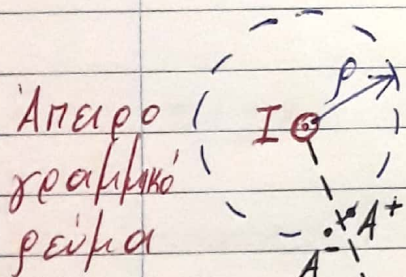
Όμως σε περιοχές που δεν υπάρχει ρεύμα  $\nabla \times \vec{H} = 0$

Άρα θα μπορούσε να οριστεί  $\vec{H} = \nabla \Phi_m$

↑

Μαγνητικό Βαθμωτό Δυναμικό

Αλλά προσοχή!!! Δεν πρέπει να κυκλώσουμε ρεύμα  
δίνει τότε το  $\Phi_m$  γίνεται πολυώνημο.



Άπειρο  
γραμμικό  
ρεύμα

"φράγμα" (τομή)  
που δεν επιτρέπεται  
να το διασχίσω

$$\vec{H} = \nabla \Phi_m \Rightarrow \int_{A^+}^{A^-} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi_m^{A^-} - \Phi_m^{A^+} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_m^{A^-} = \Phi_m^{A^+} + \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \Phi_m^{A^+} + I$$

Δύο σημεία πολύ κοντά μεταξύ τους έχουν  $\Phi_m$  που διαφέρει κατά  $I$   
Πολύ περιορισμένη η χρήση του  $\Phi_m$



## Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό

έλλειψη

μαγν. φορτίων

Μ/Σ πεδίο: όχι αετρόβιδο είναι όμως εωληνοειδές:  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$(\vec{B} = \mu \cdot \vec{H})$$

↑  
μαγν. επαγωγής

άρα το  $\vec{B}$  μπορεί να εκφραστεί ως  
εστρώση ενός μαγν. διαν. δυναμικού  $\vec{A}$ .

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{γνωστή ταυτότητα της διαν. ανάλυσης: } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0)$$

Σημεία του  $\vec{A}$ : μπορεί να συσχετιστεί με τα ρεύματα με πιο απλό  
τρόπο σε σχέση με το v. Biot-Savart, ουσιαστικά είναι "λογιστικό" μέγεθος

Πρόβλημα: Δεν είναι μοναδικό!

Αν  $\vec{A}$  είναι ένα αποδεκτό δυναμικό ( $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ )

τότε και κάθε  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \leftarrow$  αυθαίρεση συνάρτησης

είναι επίσης δυναμικό:  $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \vec{B}$

Για να το κάνουμε μοναδικό επιβάλλουμε μια  
"κατάλληλη" φυθμιστική συνθήκη (gauge conditions)

Στα προβλήματα στατικών πεδίων ή πεδίων χαμηλών συχνοτήτων,

η κατάλληλότερη συνθήκη είναι η Coulomb gauge:  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

Εξίσωση του  $\vec{A}$ :  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{A}) = \vec{J}}$   
v. Ampère

Διαν. ταυτότητα:  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

Παίρνω Coulomb gauge  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  γιατί βολεύει (απλοποιεί την εξίσωση)  
και επίσης  $\mu = \text{σταθ}$  (έστω ανά περιοχή).

Προκύπτει η εξ. Poisson (διανυσματική):  $\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}}$

Αντιστοιχία με Η/Σ πεδίο

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \iff \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

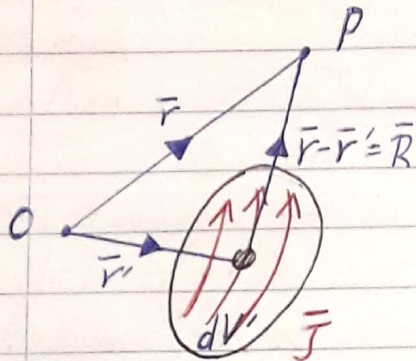
(εξ. Poisson)

$$(d\phi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R})$$



Αναλύω στις 3 διαστάσεις:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{και ανεξάρτητα} \\ \text{με το Η/Σ πεδίο} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \\ A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \\ A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

(όγκος ανηγών)

Δίνει το  $\bar{A}$  ως υπέρθεση των  $\vec{J}$   
Είναι ουβλαστική η "λύση" της:  $\nabla^2 \bar{A} = -\mu \vec{J}$

Το  $\bar{A}$  "είναι" να ακολουθεί το  $\vec{J}$

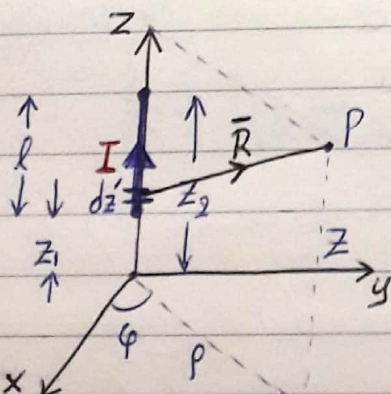
Εξάγωγή του v. Biot-Savart από v. Ampère:

$$\nabla \times \bar{H} = \vec{J} \Rightarrow \dots \Rightarrow \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \nabla \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dV'$$

και με εφαρμογή της ταυτότητας  $\nabla \times (\phi \vec{F}) = \nabla \phi \times \vec{F} + \phi \cdot \nabla \times \vec{F}$   
προκύπτει ο v. Biot-Savart.

Παράδειγμα: Γραμμικό πεπερασμένο ρεύμα (το είδαμε με v. Biot-Savart)  
- Υπολογισμός του  $\bar{A}$  και μετά  $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$  (πιο εύκολο)



$$\bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\text{αναίετοιχη μορφή για γραμμικό ρεύμα})$$

(Το  $\vec{J} \cdot d\vec{s}$  με τη διπλή ολοκλήρωση έγινε  $I$ )  
( $dV = ds \cdot dl$ )

$$\bar{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\hat{z} dz'}{R} = \hat{z} \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} = \dots \quad (\text{αιπλό})$$

$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$  και καταλήγουμε στο ίδιο.

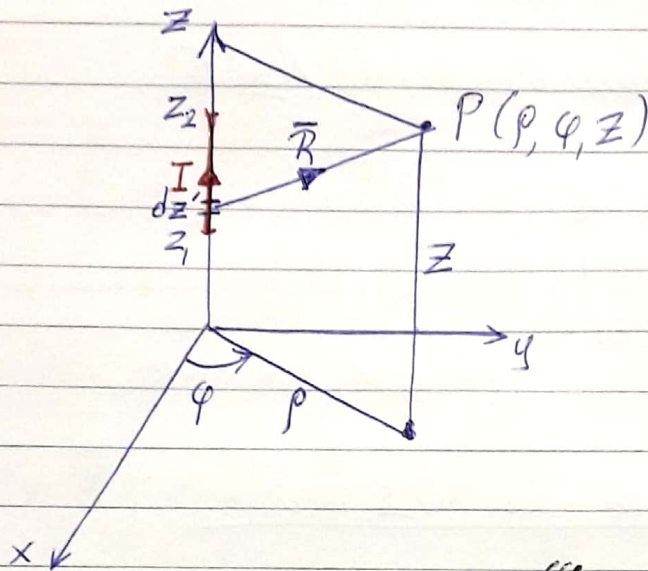
Γενικά, ο υπολογισμός του  $\bar{A}$  και μετά του πεδίου από τη  $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$  είναι πιο εύκολος από v. Biot-Savart.



11-1-19

$\vec{A}$  (μαγν. διαρ. δυναμικό): εύχρηστο "λογιστικό" μέγεθος διότι συνδέεται με πιο απλό και άμεσο τρόπο με το ρεύμα ("τείνει" να ακολουθεί το ρεύμα)

Παράδειγμα: πεδίο ενός πεπερασμένου ρεύματος



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\hat{z} dz'}{R}$$

με  $\int$  για ρεύμ. κατανομή  $\vec{J}$   
 ↓  
 για γραμμικό ρεύμα  $I$

(πιο απλό από  
 v. Biot-Savart)

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z'-z)^2}} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{z-z_1 + \sqrt{\rho^2 + (z-z_1)^2}}{z-z_2 + \sqrt{\rho^2 + (z-z_2)^2}}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \dots = -\hat{\phi} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \dots$$

(κυλινδρικές) το ίδιο που βρήκαμε με v. Biot-Savart

Άπειρο ρεύμα:  $z_1 \rightarrow -\infty$ ,  $z_2 \rightarrow +\infty$

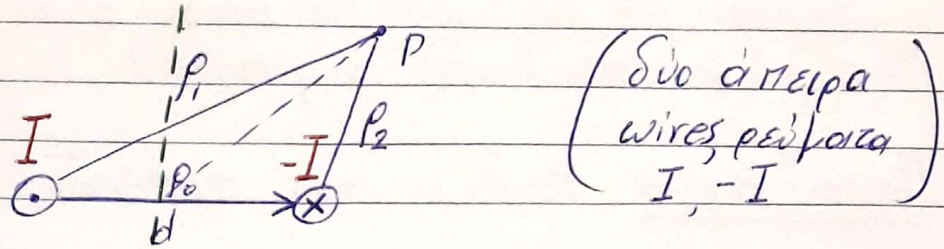
Το ολοκλήρωμα αποκλίνει!!!

Μπορώ να υπολογίσω το  $\vec{A}$  από το  $\vec{B}$   
 ενός άπειρου ρεύματος  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + C}$$



Μαγνητικό διαν. δυναμικό διεύρκασης γραμμής



Έπιπεδο αναφοράς  $A_z = 0$

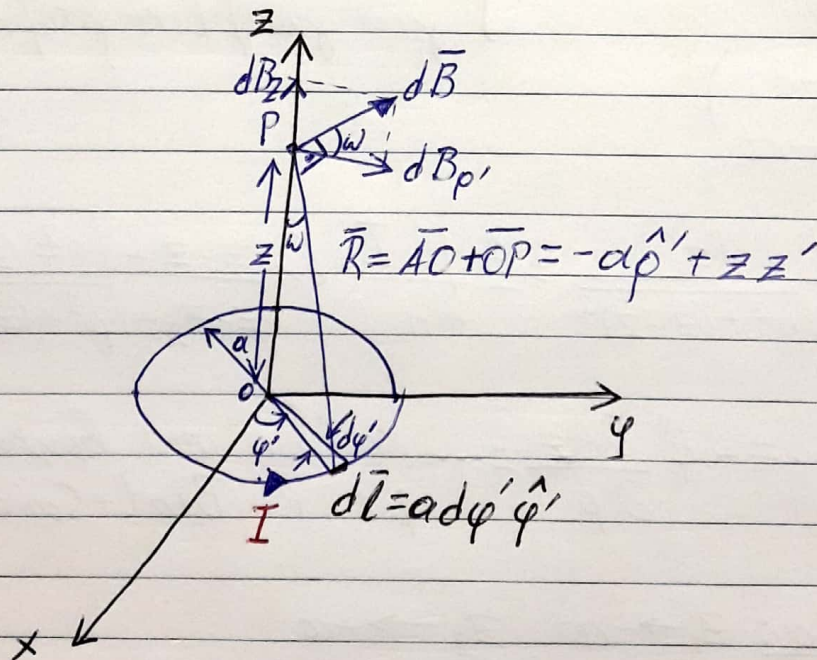
Εύκολα προκύπτει:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Ά άπειρης διεύρκασης γραμμής

Αλλά προβλήματα του ΜΙΣ πεδίου

1. Κυκλικός βρόχος ρεύματος: υπολογισμός πεδίου πάνω στον άξονα.



Δεν έχουμε κάποια πλήρη κυλινδρ. συμμετρία για εφαρμογή Ampère.



N. Biot-Savart:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$

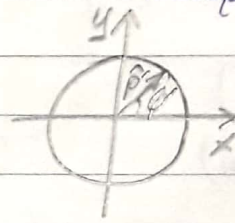
Οι  $d\vec{B}_\rho'$  αλληλοακυρώνονται.

Μένουν μόνο οι  $dB_z = dB \sin\omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' R}{R^3} \frac{a}{R} =$   
 $= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \frac{d\varphi'}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2+z^2)^{3/2}}$$

Γενικός τρόπος: για δακτύλιο όχι πλήρη (π.χ. ημικύκλιο, τεταρτοκύκλιο)

$$d\vec{l}' \times \vec{R} = a d\varphi' \hat{\varphi}' \times (-a\hat{\rho}' + z\hat{z}) = a^2 d\varphi' \hat{z} + a \cdot z d\varphi' \cdot \hat{\rho}'$$



Εξαρτάται από το  $\varphi'$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho}' \times \hat{\varphi}' &= \hat{z} \\ \hat{\varphi}' \times \hat{z} &= \hat{\rho}' \\ \hat{z} \times \hat{\rho}' &= \hat{\varphi}' \end{aligned} \right\} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} d\varphi' \hat{z} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{\rho}' d\varphi'$$

$$\hat{\rho}' = \cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y}$$

Άρα:

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2}{4\pi (a^2+z^2)^{3/2}} \int_{\varphi_{\text{αρχ}}}^{\varphi_{\text{τελ}}} d\varphi'$$

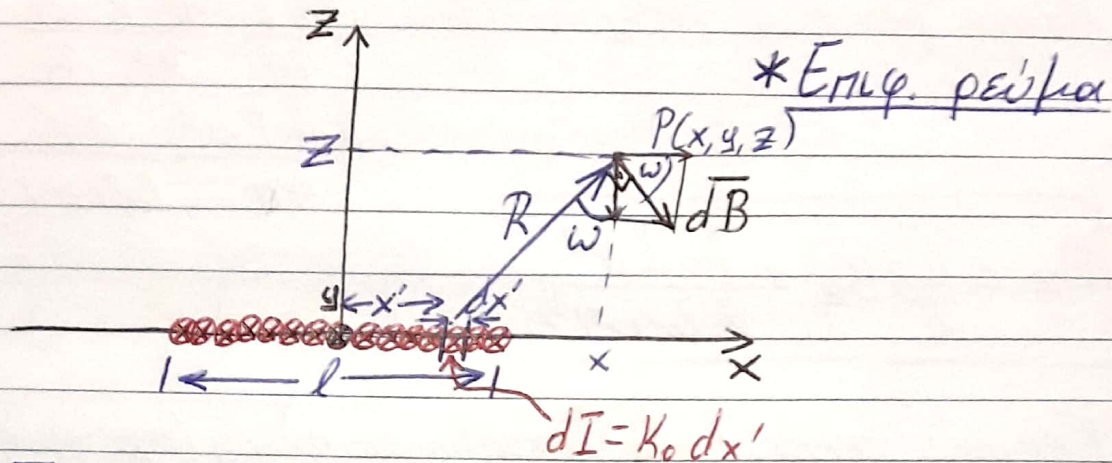
$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{a \cdot z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \int_{\varphi_{\text{αρχ}}}^{\varphi_{\text{τελ}}} \cos\varphi' d\varphi'$$

$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{a \cdot z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \int_{\varphi_{\text{αρχ}}}^{\varphi_{\text{τελ}}} \sin\varphi' d\varphi'$$



## 2. Αγωγιμή λωπίδα (current sheet) πεπερασμένου πλάτους

(Άπειρο πλάτος: είχαμε πλήρως επίπεδη ευγένεια  $\rightarrow$   
 $\rightarrow v.$  Ampère)



$$\vec{J}_s = K_0 \hat{y} \quad \left(-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

( $\vec{K}$ )

(A/m)

Συνολ. ρεύμα  $I = \int_{-l/2}^{l/2} (K_0 \hat{y}) \cdot \hat{y} dx = K_0 \cdot l \Rightarrow K_0 = \frac{I}{l}$

Αναλύω το επιφ. ρεύμα ως σύνθεση στοιχειωδών γραμμικών ρευμάτων & χρησιμοποιώ την έτοιμη λύση

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \rho} \hat{\phi}$$

$$dB_x = dB \cos \omega = \frac{\mu_0 K_0 dx'}{2\pi R} \frac{z}{R} = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \frac{z dx'}{z^2 + (x-x')^2}$$

γραμμ. ρεύμα

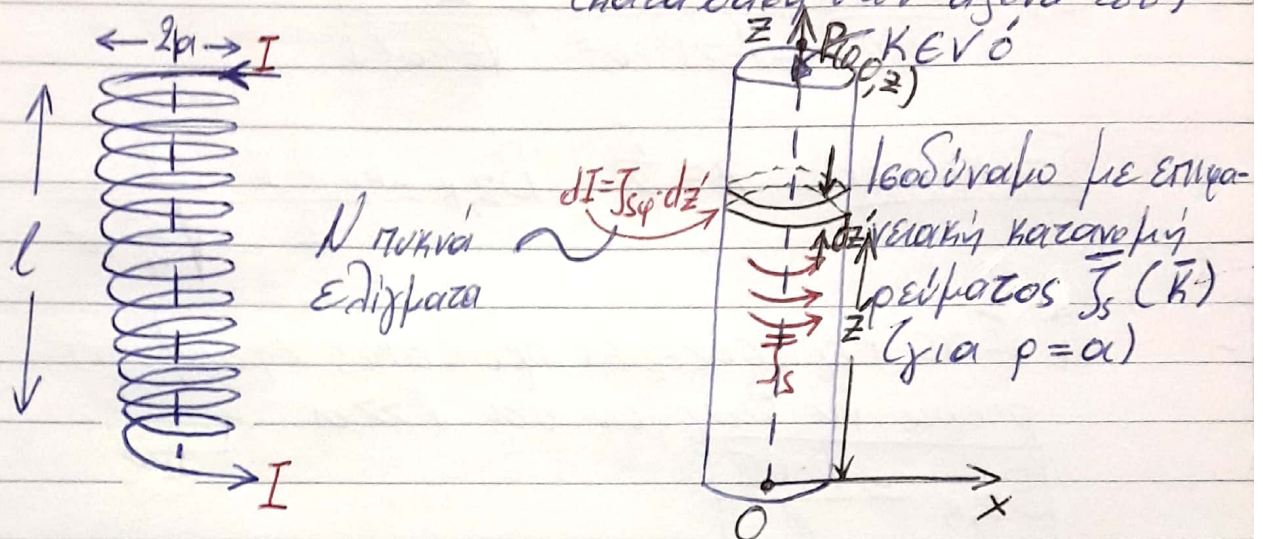
$$dB_z = dB \sin \omega = \dots = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \frac{(x-x') dx'}{z^2 + (x-x')^2}$$



$$B_x = \int dB_x \quad \left(-\frac{l}{2} \leq x' \leq \frac{l}{2}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Για } l \rightarrow \infty \\ \text{προκύπτει η λύση} \\ \text{που βρήκαμε με} \\ \text{V. Ampère} \end{array}\right)$$

$$B_z = \int dB_z$$

3. Σωληνοειδές πηνίο : υπολογισμός του πεδίου στο εσωτερ.  
(κατά βάση στον άξονά του)



Αν ολοκληρώσω την  $\vec{J}_s$  σε αυτήν την τομή θα πρέπει να πάρω το συνολικό ρεύμα που περνά από αυτήν την τομή και είναι  $N \cdot I$

$$\text{άρα } J_s \varphi l = N \cdot I \Rightarrow \vec{J}_s = \frac{N}{l} I \cdot \hat{\varphi}$$

↳ η: τωδιχματα ανά μονάδα μήκους.

Θεωρώ το σωληνοειδές ως επαλληλία απειροστών βρόχων ύψους  $dz'$  με ρεύμα  $dI = \frac{N \cdot I}{l} dz'$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



$$\text{άρα } dB_z = \frac{\mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \cdot dz' \cdot a^2}{2[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$B_z = \int_{z'=0}^l dB_z$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} \left[ \frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2 + a^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]$$

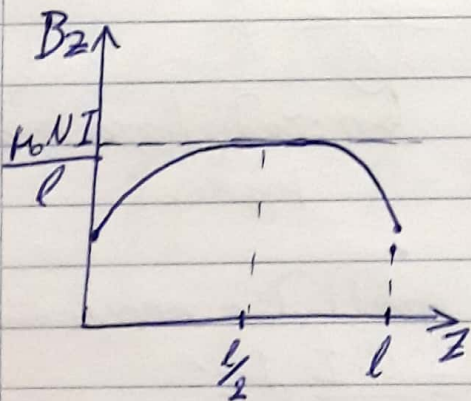
Στο κέντρο:  $z = \frac{l}{2}$   $B_{z,k} = \frac{\mu_0 N \cdot I}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}}$

\* Στις περιπτώσεις πρακτικές εφαρμογές  
 \* μπορού να θεωρήσω ότι  $l \gg a$

$$B_{z,k} \approx \frac{\mu_0 N I}{l}$$

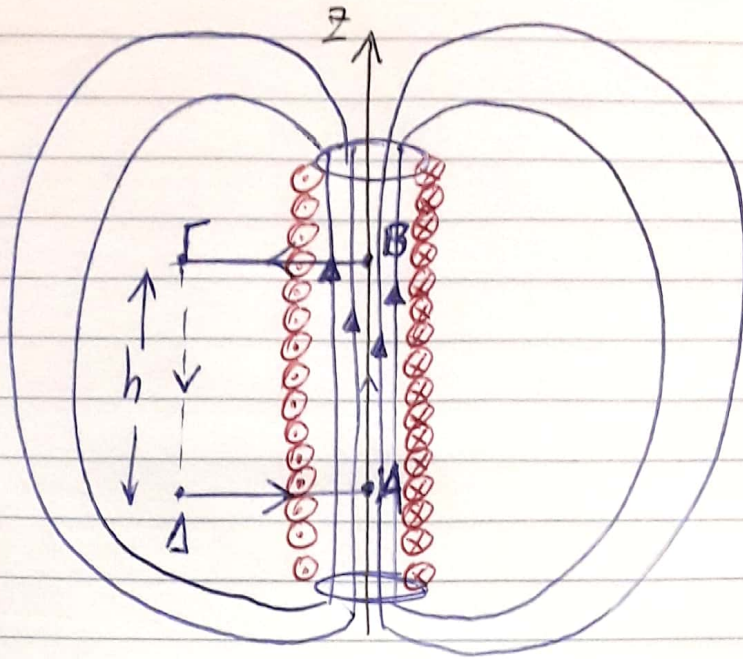
Στα άκρα:  $z = 0$  ή  $l$

$$B_{z, \text{άκρα}} \approx \frac{\mu_0 N I}{2l}$$



γενικά στο εσωτερικό του  
 σωληνοειδούς μπορούμε να  
 πούμε ότι  $B \approx \mu_0 n I$ .  
 (ακόμα και όταν είμαστε  
 off axis - εκτός άξονα)





Άπειρο μήκος  
 $\vec{B} = \hat{z} \mu_0 n I$

Αυτό προκύπτει και από v. Ampère

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{ολ}} \Rightarrow$$

$$\int_A^B H_z \hat{z} \cdot \hat{z} dz + \int_B^{\Gamma} H_z \hat{z} \cdot \hat{x} dx + \int_{\Gamma}^{\Delta} 0 dz + \int_{\Delta}^A \dots =$$

$$\downarrow = NI = n \cdot h \cdot I \Rightarrow$$

$$H_z \cdot h = n h \cdot I \Rightarrow$$

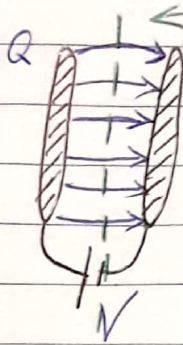
$$\boxed{H_z = n \cdot I} \quad \underline{\text{το ίδιο!}}$$



16-1-2019

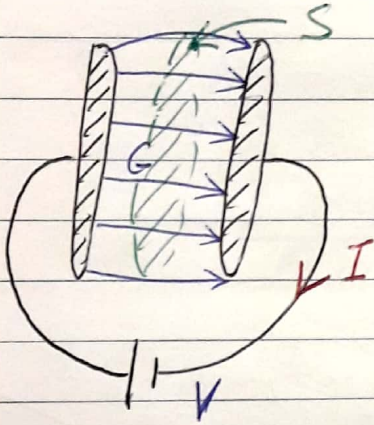
## Η έννοια της αυτεπαγωγής (inductance)

### Η/Σ πεδίο φορτίων



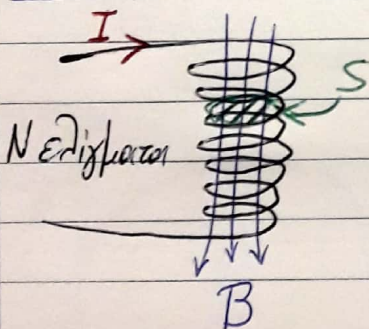
$C = \frac{Q}{V} = \frac{\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}}{V}$   
 ↳ είναι ηλ. ποί! (is electric charge!)

### Η/Σ πεδίο ρεύματων



$R = \frac{V}{I} = \frac{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}}{I}$   
 ↳ είναι ποί ρεύματος! (is current!)

### Μαγνητικό πεδίο



Μαγν. ποί  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Άρα θα ορίσουμε την αυτεπαγωγή ως λόγο μαγν. ποί  $\Phi$  προς ρεύμα

Για να γίνει βωτά, ορίσω την πεπλεγμένη ποί (flux linkage)

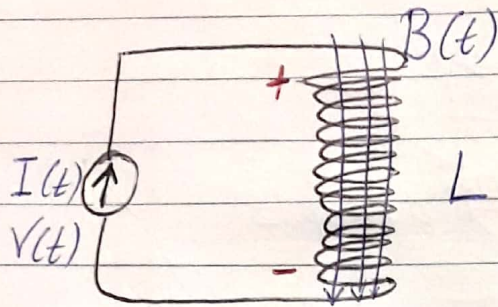
$\Psi = N\Phi$

Αυτεπαγωγή:  $L = \frac{\Psi}{I}$



# Αιτιολόγηση (από κυκλωρ. θεωρία)

## Πηνίο



$$V(t) = -L \frac{dI}{dt} = - \frac{d\psi}{dt} \rightarrow \begin{matrix} N \cdot \phi \\ \text{συνολική (πεπλεγμένη)} \\ \text{μαγν. ροή.} \end{matrix}$$

## Νόμος Η/Μ επαγωγής (Faraday)

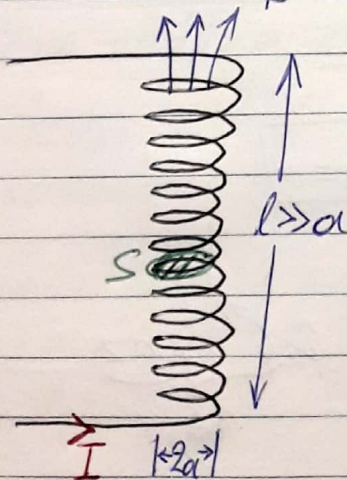
Οι επικέρους ΗΕΑ στα τυλιχμάτα αδροίζονται.

Αυτός είναι ο λόγος που παίρνω των πεπλεγμένη μαγν. ροή.

## Παραδείγματα

### 1. Σωληνοειδές πηνίο

B (σχεδόν ομογενής στο εσωτερικό)



$$B \approx \frac{\mu \cdot N \cdot I}{l}$$

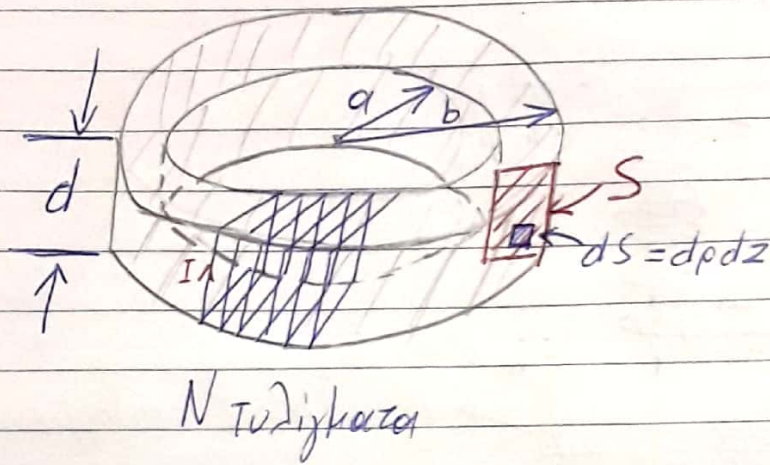
$$\psi = N \cdot \phi = NBS = N \frac{\mu \cdot N \cdot I}{l} \pi a^2$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 \pi a^2}{l}$$

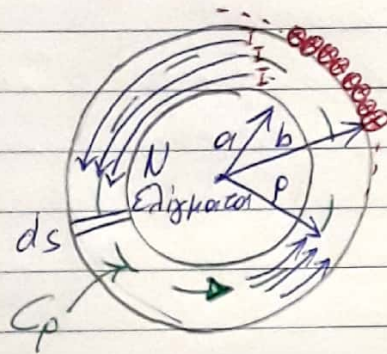
- (μπορεί να αυξηθεί)
- με σιδηρομαγνητικό πυρήνα ( $\mu_r > 1000$ )
  - με μεγάλο αριθμό τυλιγμάτων



## 2. Δακτυλιοειδές πηνίο



### Κύριση



Λόγω συμμετρίας  
 $\vec{H} = H_\phi(\rho) \cdot \hat{\phi}$

N. Ampère γύρω  $C_\rho$  ( $a < \rho < b$ ):

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = N \cdot I \Rightarrow \boxed{H_\phi = \frac{N \cdot I}{2\pi\rho}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \rho < a : H_\phi \cdot 2\pi\rho = 0 \\ \cdot \rho > b : H_\phi \cdot 2\pi\rho = N \cdot I - N \cdot I = 0 \end{array} \right\} \boxed{H_\phi = 0}$$

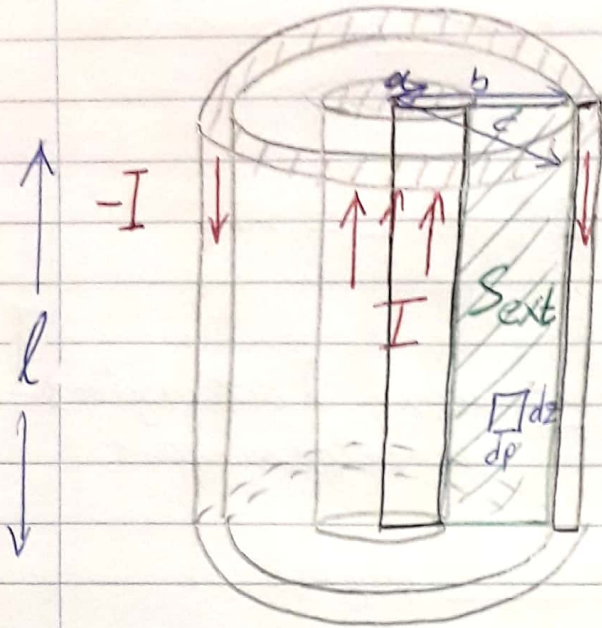
$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{z=0}^d \int_{\rho=a}^b \frac{\mu_0 k_0 N \cdot I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \underbrace{d\rho dz}_{d\vec{s}}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 k_0 N \cdot I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{Άρα: } L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \boxed{\frac{\mu_0 k_0 N^2 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}$$



### 3. Αυτεπαγωγή ομογενούς καλωδίου (ανά μονάδα μήκους)



Στις χαμηλές συχνότητες η κατανομή του ρεύματος είναι ομοιόμορφη.

Μεθιο (v. Ampère)

- $\rho < a$  :  $H\varphi = \frac{I}{2\pi a^2} \rho$
- $a < \rho < b$  :  $H\varphi = \frac{I}{2\pi \rho}$
- ...
- $\rho > c$  :  $H\varphi = 0$

Υπάρχει μαγν. ροή κυρίως μεταξύ των αγωγών του καλωδίου, στον αέρα (εξωτερική) αλλά και μέσα στους αγωγούς (εσωτερική)

Άρα υπάρχει εξωτερική και εσωτερική αυτεπαγωγή (απόστροφα)

$$L_{ext} = \frac{\Psi_{ext}}{I} = \frac{\Phi_{ext}}{I} = \frac{\iint_{S_{ext}} \vec{B} \cdot d\vec{s}}{I} = \frac{\int_{z=0}^l \int_{\rho=a}^b \frac{\mu \cdot I}{2\pi \rho} \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \cdot \rho d\rho dz}{I} = \frac{\mu \cdot l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

(αέρα)

(ανά μονάδα μήκους):

$$\frac{L_{ext}}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Για την εσωτ. αυτεπαγωγή είναι  $N < 1$ !

Διότι η  $d\psi$  από ένα στοιχειώδες  $ds = \rho \cdot d\rho \cdot dz$  δεν προκαλείται από όλο το ρεύμα αλλά ένα μέρος αυτού:  $d\psi_{int} = \left( \frac{I_p(\rho)}{I} \right) d\psi$

$$L_{int}(\rho < a) = \frac{\Psi_{int}}{I} = \frac{\int d\psi_{int}}{I} = \frac{\int_0^l \int_0^a \frac{3\pi\rho^2}{8\pi a^2} \frac{\mu \cdot I \rho}{2\pi a^2} d\rho dz}{I} = \dots = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

$$N < 1 \leftarrow \frac{I_p(\rho)}{I} \frac{d\psi}{\vec{B} \cdot d\vec{s}}$$

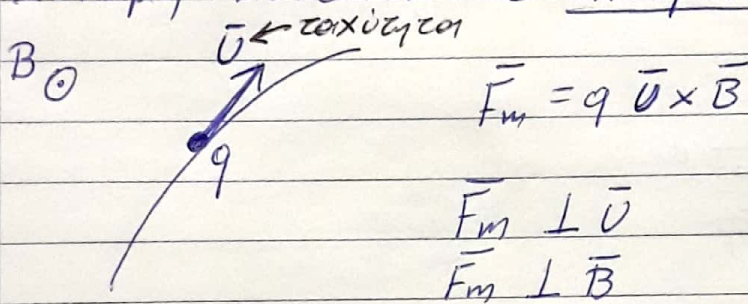


\* Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του  $L$   
 (ειδικά για την περίπτωση  $L_{int}$ )  $\rightarrow$  αυτό θα  
 μέσω της ενέργειας: χρῆ για  $L_{int}$

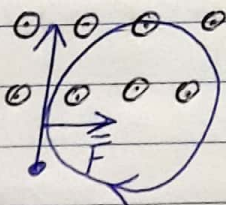
$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 dV = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow L = \dots$$

Δυνάμεις του μαγν. πεδίου: αρχή λειτουργίας της  
 ηλεκτροκίνησης

Δύναμη Lorentz: σε κινούμενο φορτίο

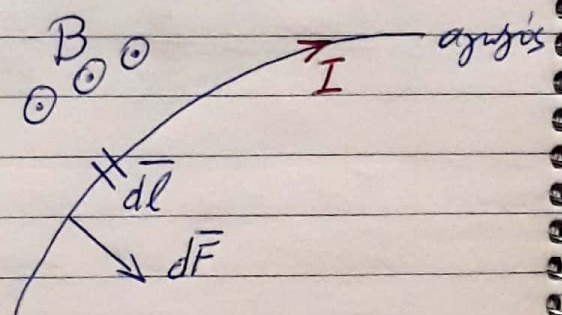


π.χ. Β ομογενής



Δύναμη σε ρεύμα (Laplace)

Αποδεικνύεται ότι  $d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$   
 $d\vec{F}_m \perp d\vec{l}$   
 $d\vec{F}_m \perp \vec{B}$

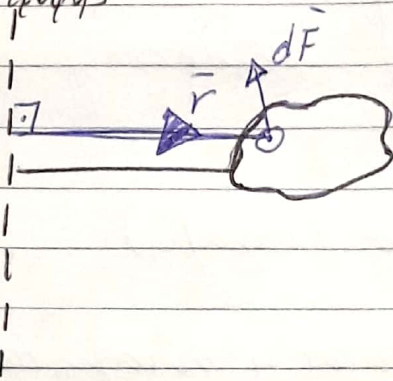




$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

Ενδιαφερόμαστε κυρίως για τη ροπή

αξονας  
περιστροφής

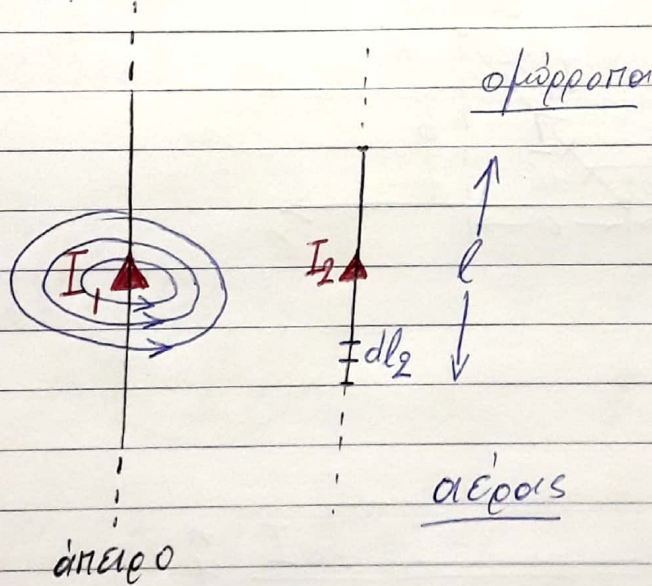


$$d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\boxed{T = \int \vec{r} \times d\vec{F}}^*$$

και όχι  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

Παράδειγμα: παράλληλα ρεύματα



Ζητείται η  $\vec{F}$  που ασκεί το μαγν. πεδίο του  $I_1$  σε μήκος  $l$  του  $I_2$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\phi}$$



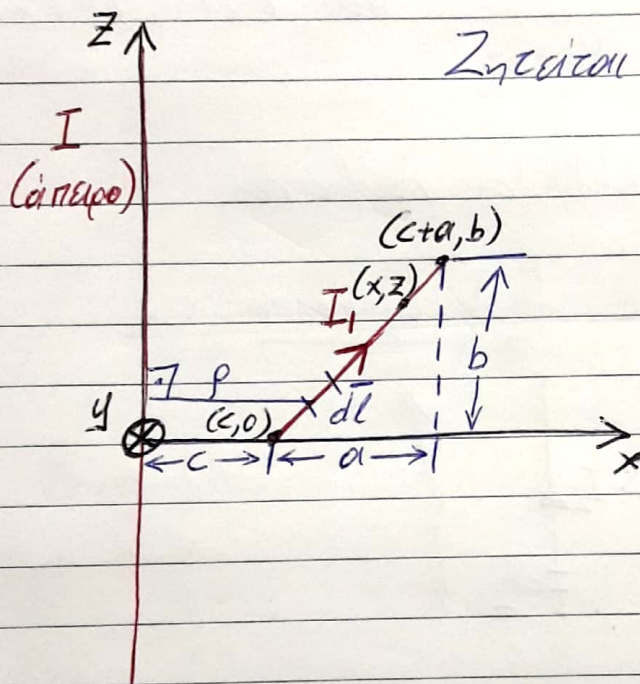
$$\begin{aligned} \hat{z} \times \hat{\phi} &= \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \times \hat{z} &= -\hat{\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 \cdot (dl_2 \cdot \hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad \underline{\hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{\rho}} \\ &= -\hat{\rho} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = -\hat{\rho} \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}} \quad \text{ελκτική}$$

Άσκηση: Κεντρικό ρεύμα (δύναμη)

Ζητείται η δύναμη πάνω στο  $I_1$ .



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad \text{επειδή είμαστε στο επίπεδο xz} \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y}$$

$$d\vec{l}_1 = dx \cdot \hat{x} + \cancel{dy \cdot \hat{y}} + dz \cdot \hat{z}$$

Τα  $dx, dz$  χειρίζονται και πρώτα να βρω πώς, αν χράσω την εξίσωση της ευθείας του  $I_1$ :

$$\frac{z-0}{b-0} = \frac{x-c}{(c+a)-c} \Rightarrow \boxed{z = \frac{b}{a}(x-c)} \quad \boxed{dz = \frac{b}{a} dx}$$



$$d\vec{l}_1 = dx (\hat{x} + \frac{b}{a} \hat{z})$$

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B} = I_1 dx (\hat{x} + \frac{b}{a} \hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} \hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi x} (\hat{z} - \frac{b}{a} \hat{x})$$

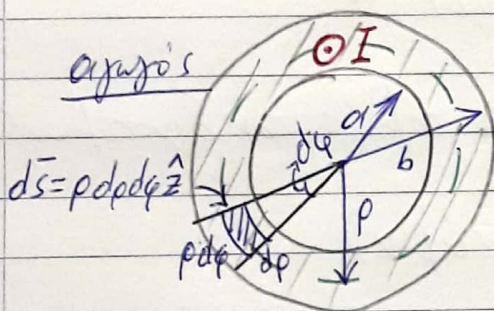
$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

$$F = \int d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} (\hat{z} - \frac{b}{a} \hat{x}) \int_c^{c+a} \frac{dx}{x} = \dots$$

[7.6] (βιβλίο, άλυτες)

Κυλινδρικός αγωγός εσωτ. ακτίνας  $a$  και εξωτ.  $b$



Συνολικό ρεύμα  $I$   
 πυκν. ρεύματος (μη ομοιόμορη)  
 $\vec{J} = J_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \hat{z}$   
 $\downarrow$   
 ?

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{\rho=a}^b \int_{\phi=0}^{2\pi} J_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \rho d\rho d\phi \Rightarrow J_0 = \frac{2I a^2}{\pi (b^4 - a^4)}$$

V. Ampère: λόγω συμμετρίας  $\vec{H} = H_\phi(\rho) \hat{\phi}$

- $\rho < a$   $H_\phi \cdot 2\pi\rho = 0$  είναι κενό το ρεύμα που περιλαμβάνει
- $a < \rho < b$   $H_\phi \cdot 2\pi\rho = \int_a^\rho \int_0^{2\pi} J_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \rho d\rho d\phi \Rightarrow$  η κατάνοξη

$$\Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{\rho^4 - a^4}{b^4 - a^4}$$

- $\rho > b$   $H_\phi \cdot 2\pi\rho = I \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$

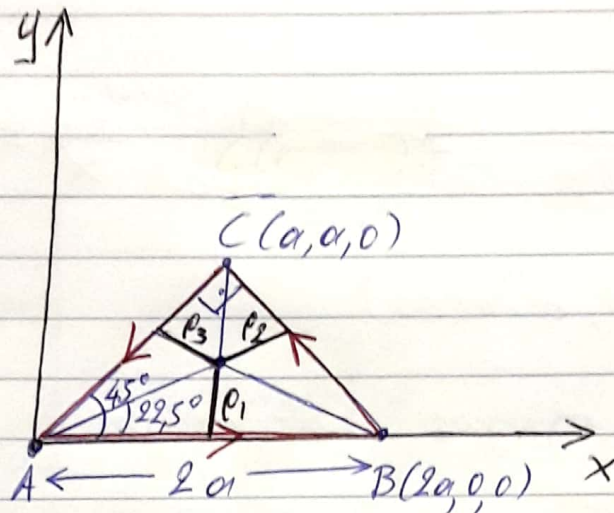


Ενέργεια ανά μονάδα μήκους στο εσωτ. αγωγού :

$$W_m = \int_{z=0}^{\ell} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{2} \mu |H|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \dots = \int_a^b \frac{(\rho^4 - a^4)^2}{\rho} d\rho$$

(η Εν. ανά μονάδα μήκους είναι το  $W_m/\ell$ )

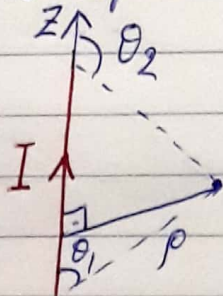
[7.8]



Τριγωνικός  
βρόχος  
ρεύματος

Να βρεθεί το  $H$  στο οριζόντιο επίπεδο των διχοτόμων (επιπέδου)

Έτσιμος κύματος (πεπερ. ρεύμα)



$$H_{\varphi} = \frac{I}{4\pi\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

και για τα 3 το  $H_{\varphi}$  είναι  $H_z$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = a \cdot \tan \frac{\pi}{8}$$

	$\theta_1$	$\theta_2$
AB	$\pi/8$	$\pi - \pi/8$
BC	$\pi/8$	$\pi - \pi/4$
CA	$\pi/4$	$\pi - \pi/8$