

Preverjanje znanja Biofizika 2014, fizikalni problem, Ime in priimek:

Opisujemo sistem elektronov, ki so ujeti med dvema zelo razsežnima ravnima ploskvama. Ploskvi, ki ležita v yz ravnini, sta pozitivno nabiti s površinsko gostoto naboja $\sigma \geq 0$. Prosto energijo tega sistema zapišemo kot

$$F = \alpha \int_0^d n^{5/3} A dx + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^d E^2 A dx \quad (1)$$

kjer je $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js Planckova konstanta, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg masa elektrona, n gostota števila elektronov, A površina nabitih ploskev, d razdalja med nabitima ploskvama, E jakost električnega polja, ki ima od 0 različno komponento v smeri osi x , ϵ_0 pa influenčna konstanta, $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ As/Vm. Zanima nas, kakšna je ravnovesna porazdelitev gostote števila elektronov $n(x)$ in kakšno je električno polje $E(x)$, pri različnih izbranih razdaljah med ploskvama in različnih površinskih gostotah naboja. Kot primere izberemo $\sigma = 0,01$ As/m², $0,1$ As/m², 1 As/m² ter $d = 10$ nm, 1 nm in $0,1$ nm.

Namig: V ravnovesnem stanju je prosta energija minimalna. Minimum proste energije poiščemo s pogojem, da funkcija

$$\mathcal{L} = \alpha n^{5/3}(x) + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x) - \lambda(x) \left(\epsilon_0 \frac{\partial E(x)}{\partial x} + e_0 n(x) \right) - \Lambda n(x), \quad (2)$$

kjer je e_0 osnovni naboj $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As, λ neznana funkcija in Λ neznana konstanta, zadosti sistemu enačb:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial E}{\partial x})} \right) = 0, \quad (3)$$

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (4)$$

kjer je ϕ električni potencial,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} = 0, \quad (5)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} + n e_0 = 0 \quad (6)$$

in

$$\int_0^d n(x) dx = \frac{2\sigma}{e_0}. \quad (7)$$

Upoštevamo tudi, da je zaradi simetrije električno polje v sredini med ploskvama enako 0,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x = d/2) = 0 \quad (8)$$

in velja ob ploskvi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x = 0) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (9)$$

Iz enačb (3) in (4) dobimo zvezo med $\lambda(x)$ in $\phi(x)$. Iz enačb (4)-(6) izpeljemo diferencialno enačbo za potencial ϕ . Pri rešitvi upoštevamo pogoja (8) in (9). Iz enačbe (7) določimo konstanto Λ . Predvidevamo, da ta sistem nima analitične rešitve in ga je zato potrebno rešiti numerično ali pa najti približno rešitev. Če Vam je kdo pomagal pri reševanju, navedite imena sodelavk in sodelavcev. Navedite tudi pisne vire in internetne strani, ki ste jih uporabili.