MATEMATIK A-NIVEAU

Differentialligninger af 1. orden

Beviser

Bevis af panserformlen

$$y' = ay \quad \Leftrightarrow \quad y = c \cdot e^{ax}$$

$$y' = b - ay \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

$$y' + ay = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-ax} \cdot \int h(x) \cdot e^{ax}\, dx$$

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx$$

$$y' = a \cdot y \cdot (m - y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{m}{1 + c \cdot e^{-a \cdot m \cdot x}}$$

Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

MATEMATIK A NIVEAU
Differentialligninger

I dette kapitel bevises differentialligningerne af typerne:

$$y' = ay$$
$$y' = b - ay$$
$$y' + ay = h(x)$$
$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$
$$y' = a \cdot y \cdot (m - y)$$

Disse differenialligninger bevises via forskellige metoder, herunder separation af de variable og ved hjælp af panserformlen. Alle ligningerne er differentialligninger af første orden.

For anvendelse af dokumentet, anbefales det, at man prøver at løse opgaven først, inden man anvender løsningerne.

Anders Jørgensen & Mark Kddafi
2016

Differentialligninger

Bevis af panserformlen.

Differentialligningen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Som har den fuldstændige løsning. (Panserformlen)

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}$$

Bevis

Da $e^{A(x)}$ indgår i løsningsformlen, anvendes den i differentialligningen.

$$e^{A(x)} \cdot y' + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y = e^{A(x)} \cdot b(x)$$

Det ses nu, at venstre led

$$e^{A(x)} \cdot y' + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y$$

Faktisk er produktreglen. Dette omskrives.

$$e^{A(x)} \cdot y' + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y = \left(e^{A(x)} \cdot y\right)'$$

Fordi differentieres dette fås venstresiden. Hermed integreres der på begge sider.

$$e^{A(x)} \cdot y = \int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx + c$$

Men da differentialregning og integralregning er hinandens modsætning, har man

$$e^{A(x)} \cdot y = \int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx + c$$

Så isoleres y ved division af $e^{A(x)}$. Altså er

$$\frac{e^{A(x)} \cdot y}{e^{A(x)}} = \frac{\int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx}{e^{A(x)}} + \frac{c}{e^{A(x)}}$$

Man reducerer og anvender reglen $\frac{1}{k^n} = k^{-n}$

$$y = \int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx \cdot e^{-A(x)} + c \cdot e^{-A(x)}$$

Som er panserformlen.

Q.E.D.

Differentialligninger

Differentialligningen fra **sætning 1**

$$y' = ay$$

Har den fulde løsning som er

$$y = c \cdot e^{ax}$$

Hvis man kigger godt efter, kan man se, at $y = f(x), \quad c = b, \quad e^a = a, \quad x = x$, så har man faktisk

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Som er en eksponentiel model.

Bevis

Beviset udføres ved separation af de variable. Bemærk, at $y' = \frac{dy}{dx}$. Det er det samme.

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

Vi separere således at y er på venstre side og x er på højre side.

$$\frac{dy}{dx} \cdot dx = ay \cdot dx \Leftrightarrow dy = ay \cdot dx$$

Så skal man have y på venstre side.

$$dy = ay \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot dy = ay \cdot \frac{1}{y} \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot dy = a \cdot dx$$

Så kan man integrere på begge sider.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a \, dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = ax + c \Leftrightarrow \ln|y| + c = ax + c$$

Da c på venstre side og c på højre side er et tal, kan man blot rykke c fra venstre over til højre.

$$\ln|y| = ax + c$$

Så skal man isolere for y

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{ax+c}$$

Anvend potensregneregel.

$$|y| = e^{ax} \cdot e^c \Leftrightarrow |y| = c \cdot e^{ax}, \qquad to\ udfald:$$

$$\boldsymbol{y < 0}, \qquad y = -c \cdot \mathrm{e}^{-ax}, \qquad \boldsymbol{y > 0}, \qquad y = c \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

Q.E.D.

Differentialligningen fra **sætning 2**

$$y' = b - ay$$

Som har den fuldstændige løsning.

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Bevis

$$y' = b - ay \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = b - ay \Leftrightarrow dy = b - ay \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{b - ay} dy = dx$$

Så har man separeret y'erne og x'erne. Så skal man anvende integrale.

$$\int \frac{1}{b - ay} dy = \int 1 \, dx$$

Så integreres højresiden først. Når det er gjort, anvendes substitution ved integration for venstresiden.

$$\int \frac{1}{b - ay} dy = x + c$$

Her er $t = b - ay$, den differentieres $dt = -a \cdot dy \Leftrightarrow \frac{-1}{a} dt = dy$ så indsættes den tilbage i integralet.

$$\int \frac{1}{t} \cdot \frac{-1}{a} dt = x + c$$

Da $\frac{-1}{a}$ er en konstant, kan den sættes udenfor integralet. Så har man

$$\frac{-1}{a} \cdot \int \frac{1}{t} dt = x + c \Leftrightarrow \frac{-1}{a} \cdot \ln|t| + c = x + c \Leftrightarrow \ln|t| = -a \cdot (x + c) \Leftrightarrow \ln|t| = -ax + c$$

Igen valgte man at sætte c fra venstre over på højre side, pga. c blot er et tal. $\frac{-1}{a}$ blev ganget over på højre side. Nu indsættes t i $\ln|t|$ og der isoleres for y.

$$\ln|b - ay| = -ax + c \Leftrightarrow e^{\ln|b-ay|} = e^{-ax+c} \Leftrightarrow |b - ay| = e^{-ax+c} \Leftrightarrow |b - ay| = e^{-ax} \cdot e^{c} \Leftrightarrow$$
$$|b - ay| = c \cdot e^{-ax}$$

Så isoleres der for y.

$$|b - ay| = c \cdot e^{-ax} \Leftrightarrow |-ay| = -b + c \cdot e^{-ax} \Leftrightarrow |y| = \frac{-b}{-a} + c \cdot e^{-ax} \Leftrightarrow |y| = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Dvs. her er $|y|$, så to udfald. Nemlig når $y > 0$ og $y < 0$.

$$\boldsymbol{y > 0}, \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}, \quad \boldsymbol{y < 0}, \quad y = -\frac{b}{a} - c \cdot e^{-ax}$$

Q.E.D.

Differentialligningen fra **sætning 2** med *panserformlen.*

$$y' = b - ay$$

Som har den fuldstændige løsning.

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Bevis

Først omskrives differentialligningen

$$y' = b - ay \Leftrightarrow y' + ay = b$$

Så har man panserformlen

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}$$

Her er $a(x) = a$ samt $A(x) = ax$, $b(x) = b$ altså er man klar. Man ganger først med $e^{A(x)}$, som er e^{ax}

$$e^{ax} \cdot y' + e^{ax} \cdot ay = e^{ax} \cdot b$$

Her indsætter man så sine oplysninger i panserformlen.

$$y = e^{-ax} \cdot \int b \cdot e^{ax}\, dx + c \cdot e^{ax}$$

Derved integrerer man.

$$y = e^{-ax} \cdot b \int e^{ax}\, dx + c \cdot e^{ax} \Leftrightarrow y = e^{-ax} \cdot b \cdot \frac{e^{ax}}{a} + c \cdot e^{ax} \Leftrightarrow y = e^{-ax} \cdot \frac{b \cdot e^{ax}}{a} + c \cdot e^{ax} \Leftrightarrow$$

Her går $e^{-ax} \cdot e^{ax}$ ud med hinanden, pga. regneregel for potensfunktioner

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$$

Q.E.D.

Differentialligningen fra **sætning 3**

$$y' + ay = h(x)$$

Som har den fuldstændige løsning.

$$y = e^{-ax} \cdot \int h(x) \cdot e^{ax}\, dx$$

Bevis

Vi starter med at gange e^{ax} ind.

$$e^{ax} \cdot y' + e^{ax} \cdot ay = e^{ax} \cdot h(x)$$

Så har man at $e^{ax} = a \cdot e^{ax}$ så kan man indsætte det i differentialligningen

$$e^{ax} \cdot y' + (e^{ax})'y = e^{ax} \cdot h(x)$$

Her anvendes produktreglen, så har man på venstresiden

$$(e^{ax} \cdot y)' = e^{ax} \cdot h(x)$$

Så anvender man integralet på begge sider.

$$\int (e^{ax} \cdot y)' dx = \int e^{ax} \cdot h(x) dx \Leftrightarrow e^{ax} \cdot y = \int e^{ax} \cdot h(x)\, dx$$

Så divideres der med e^{ax} for at isolere y. Så har man

$$e^{ax} \cdot y = \int e^{ax} \cdot h(x)\, dx \Leftrightarrow \frac{e^{ax} \cdot y}{e^{ax}} = \frac{\int e^{ax} \cdot h(x)\, dx}{e^{ax}} \Leftrightarrow y = \int e^{ax} \cdot h(x)\, dx \cdot e^{-ax}$$

Bemærk, at $\frac{1}{k^n} = k^{-n}$ blev anvendt.

Q.E.D.

Differentialligningen fra **sætning 4** (Den tages først, så bevis for den homogene er lettere)

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Som har den fuldstændige løsning.

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, dx$$

Bevis (inhomogen version)

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Vi starter med at gange $e^{A(x)}$ ind.

$$e^{A(x)} \cdot y' + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y = e^{A(x)} \cdot b(x)$$

Man kan se, at venstresiden er et produkt, altså

$$(e^{A(x)} \cdot y)'$$

Fordi differentieres dette fås venstresiden. Så integreres der på begge sider, men da der står y' går integralet ud med mærket. Altså har man

$$e^{A(x)} \cdot y = \int e^{A(x)} \cdot b(x) \, dx$$

Så er konstanten skrevet på. Endelig dividere man med $e^{A(x)}$ på begge sider

$$\frac{e^{A(x)} \cdot y}{e^{A(x)}} = \frac{\int e^{A(x)} \cdot b(x) \, dx}{e^{A(x)}}$$

En regneregel siger, at $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, så er løsningen til differentialligningen

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x) \, dx$$

Q.E.D.

Differentialligningen **sætning 4** (homogen version)

$$y' + a(x) \cdot y = 0$$

Som er den fuldstændige løsning.

$$y = c \cdot e^{-A(x)}$$

Bevis (homogen version - panserformlen)

Da der blev bevist før, for den inhomogene version (sætning 4), kan man anvende løsningen vha. panserformlen, så den skrives nedenfor:

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, dx + c \cdot e^{-A(x)}$$

Her er $b(x) = 0$, så hermed er beviset

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int 0 \cdot e^{A(x)} \, dx + c \cdot e^{-A(x)} \Leftrightarrow$$
$$y = c \cdot e^{-A(x)}$$

Q.E.D.

Differentialligningen fra **sætning 5A logistisk vækst**

$$y' = a \cdot y \cdot (m - y)$$

Beviset er velegnet til spørgsmålet: 14

$$y = \frac{m}{1 + c \cdot e^{-a \cdot m \cdot x}}$$

Som er den fuldstændige løsning.

Bevis

Man kan anvende separation af de variable her.

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (m - y) \Leftrightarrow dy = a \cdot y \cdot (m - y) \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{y \cdot (m - y)} dy = a \cdot dx$$

Så anvender man integralet

$$\int \frac{1}{y \cdot (m - y)} dy = \int a \, dx$$

Højresiden løses først

$$\int \frac{1}{y \cdot (m - y)} dy = a \cdot x + c$$

Her omskrives venstresiden til følgende

$$\int \frac{\frac{1}{m}}{y} + \frac{\frac{1}{m}}{m - y} dy = a \cdot x + c$$

Så sætter man $\frac{1}{m}$ uden for integralet, altså har man

$$\frac{1}{m} \cdot \int \frac{1}{y} + \frac{1}{m - y} dy = a \cdot x + c$$

Så rykker man m på højresiden, så har man

$$\int \frac{1}{y} + \frac{1}{m - y} dy = m \cdot (a \cdot x + c) \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} + \frac{1}{m - y} dy = m \cdot a \cdot x + c \Leftrightarrow$$

Så anvender man regnereglen for integralet ved sum.

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{m - y} dy = m \cdot a \cdot x + c \Leftrightarrow \ln|y| + \int \frac{1}{m - y} dy = m \cdot a \cdot x + c$$

Så anvendes substitution ved integration. Her er

$$t = m - y \Leftrightarrow dt = -1 \cdot dy \Leftrightarrow \frac{1}{-1} dt = dy \Leftrightarrow -1dt = dy$$

Så er integralet

$$\ln|y| + \int \frac{1}{t} \cdot (-1) dt = m \cdot a \cdot x + c \Leftrightarrow \ln|y| - \int \frac{1}{t} dt = m \cdot a \cdot x + c$$

Fortsættes næste side

Så har man nedenstående. Bemærk, at $t = m - y$ indsættes tilbage.

$$\ln|y| - \ln|t| = m \cdot a \cdot x + c \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|m - y| = m \cdot a \cdot x + c$$

Her anvendes en logaritmeregneregel for at isolere y.

$$\ln\left|\frac{y}{m - y}\right| = m \cdot a \cdot x + c$$

Så isoleres y.

$$e^{\ln\left|\frac{y}{m-y}\right|} = e^{m \cdot a \cdot x + c} \Leftrightarrow \frac{y}{m - y} = e^{m \cdot a \cdot x} \cdot e^{c} \Leftrightarrow \frac{y}{m - y} = c \cdot e^{m \cdot a \cdot x}$$

Man antager så, at $m - y > 0$ og $y > 0$, så y ligger mellem 0 og m.

$$\frac{y}{m - y} = c \cdot e^{m \cdot a \cdot x} \Leftrightarrow \frac{m - y}{y} = c \cdot e^{-m \cdot a \cdot x}$$

Fordi her byttede man om på tæller og nævner.

$$\frac{m - y}{y} = c \cdot e^{-m \cdot a \cdot x} \Leftrightarrow \frac{m}{y} - 1 = c \cdot e^{-m \cdot a \cdot x} \Leftrightarrow \frac{m}{y} = 1 + c \cdot e^{-m \cdot a \cdot x} \Leftrightarrow$$

Man bytter så om på tæller og nævner igen.

$$\frac{y}{m} = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-m \cdot a \cdot x}}$$

Endelig kan man gange over med m

$$y = \frac{m}{1 + c \cdot e^{-m \cdot a \cdot x}}$$

Som er den fuldstændige løsning.

Q.E.D.