Matematik B, 5 december 2014

Løses af

www.matematikhfsvar.page.tl

NB: Når du læser løsningerne, så satser vi på du selv sidder med sættet. Figurer mv. bliver ikke indsat.

Delprøve 1 UDEN hjælpemidler

Opgave 1

Der er givet to trekanter, da begge er ensvinklet, da er forstørrelsesfaktoren

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{10}{5} = 2,$$

Så bestemmes $|AC|$,

$$|AC| = \frac{|DF|}{k} = \frac{6}{2} = 3,$$

Dvs. længden blev bestemt til $\underline{\underline{|AC| = 3}}$

Opgave 2

Der er givet to støttepunkter,

Metode 1:

Kigger man på skæring med $y-$aksen, ses det at $b = 4$, så løses ligningen

$$32 = 4 \cdot a^3 \Leftrightarrow a^3 = \frac{32}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = 2$$

Så forskriften er

$$\underline{\underline{f(x) = 4 \cdot 2^x}}$$

Metode 2:

$A = (0, 4)$ og $B = (3, 32)$, da der er tale om en eksponentiel funktion, løses ligningerne

$$\begin{matrix} 32 = b \cdot a^3 \\ 4 = b \cdot a^0 \end{matrix} \Leftrightarrow 8 = 1 \cdot a^3 \Leftrightarrow 8 = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2,$$

NB: Kubikroden af 8 er altid 2.

Da er $a -$ værdien fundet. Da findes $b-$værdien.

$$4 = b \cdot 2^0 \Leftrightarrow 4 = b \cdot 1 \Leftrightarrow b = 4$$

Opgave 3

Udtrykket

$$(a+b)^2 + 2 \cdot (b^2 - ab)$$

Da er

$$(a+b)^2 + 2 \cdot (b^2 - ab)$$

$= a^2 + b^2 + 2\ ab + 2 \cdot \left(b^2 - ab\right)$
$= a^2 + b^2 + 2\ ab + 2\ b^2 - 2\ ab$
$= a^2 + 3\ b^2$

Dvs. udtrykket bliver:
$\underline{\underline{a^2 + 3\ b^2}}$

Opgave 4

På baggrund af oplysningerne er der tale om en lineær funktion, dvs. man har:
$f(x) = ax + b,$
da er $a = 45$ og $b = 600$, så er
$\underline{\underline{f(x) = 45\ x + 600}}$
Den ønskede model.

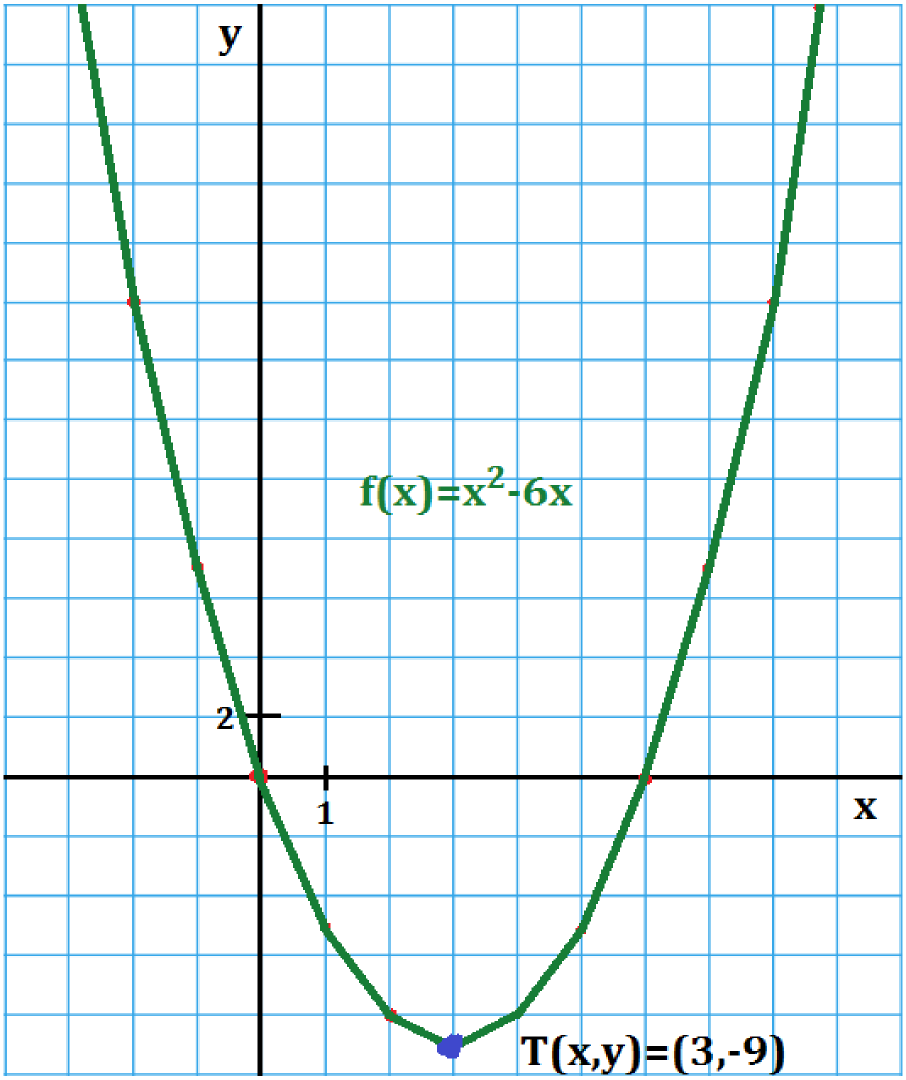
Opgave 5

Funktionen er givet
$f(x) = x^2 - 6\ x,$
Toppunktet bestemmes:
$f'(x) = 2\ x - 6$, så løses $f'(x) = 0$
$2\ x - 6 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Da findes den tilhørerende $y-$værdi:
$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 - 18 = -9$
Dvs. toppunktet er
$\underline{\underline{T = (3, -9)}}$

Grafen kan man lave ved at lave et sildeben.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f($	2\	1\	7	0	-5	-8	-9

Da er grafen (groft sagt):



Download kvadrat papir her : *http ://www.eh − mat.dk/mmogkvadratpapir.pdf*

Opgave 6

Graferne for $f(x)$, $g(x)$ og $f'(x)$ ses på skitsen.
Det lader sig til, at A skærer grafen tre steder, hvoraf B og C skærer to steder.
Dvs. $f(x) = A$. Det handler om at finde den afledede af $f(x)$.

Når A skærer y-aksen, vokser den, og når den vokser, skal den afledede være *over* første aksen. Da opfylder C kravet, så hermed må $f'(x)$ være C, dvs. følgende gælder.
$\underline{\underline{f(x) = A, \quad f'(x) = C, \quad g(x) = B}}$

Delprøve 2 MED hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

Der er givet en tabel. Der er tale om en eksponentiel model i øl-drikkeri... Man anvender

eksponentiel regression. Oplysningerne defineres:
$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$:; $L2 := [462, 440, 406, 383, 380, 357]$:
$f(t) := ExpReg(L1, L2, t)$:
$f(t)$

$$457.953769362079\ 0.950216927828748^{t} \tag{7.1.1}$$

Da er tallene
$\underline{\underline{a = 0.9502 \ og \ b = 457.95}}$

Delopgave b)

$a := 0.950216927828748$:
Man skal altid omregne fremskrivningsfaktoren til %, så man har:
$a = 1 + r$

$$0.950216927828748 = 1 + r \tag{7.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$[[r = -0.04978307217]] \tag{7.2.2}$$

$-0.04978307217 \cdot 100$

$$-4.978307217 \tag{7.2.3}$$

Dvs. for hvert år der går, falder øldrikningen med 4.97 % om året i perioden 2007 − 2012

Delopgave c)

Man anvender halveringsformlen:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T_{\frac{1}{2}} = 13.574$$

Efter 13 år, vil ølforbruget være halveret

(dvs. den rækker udover modellens periode!)

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

Funktionen defineres:
$f(x) := 3x^3 - 3x^2 - x + 1$:
Funktionens nulpunkter bestemmes:
$f(x) = 0$

$$3x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0 \tag{8.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x = 1], \left[x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\right], \left[x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right] \tag{8.1.2}$$

Dvs. nulpunkterne er

$x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \vee x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee x = 1$

Delopgave b)

Ligningen for tangenten bestemmes. Punktet er givet
$P = (2, f(2))$, da kan man direkte blot skrive ligningen
$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

$$y = 23\,x - 35 \tag{8.2.1}$$

Dvs. ligningen for tangenten er
$y = 23\,x - 35$

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

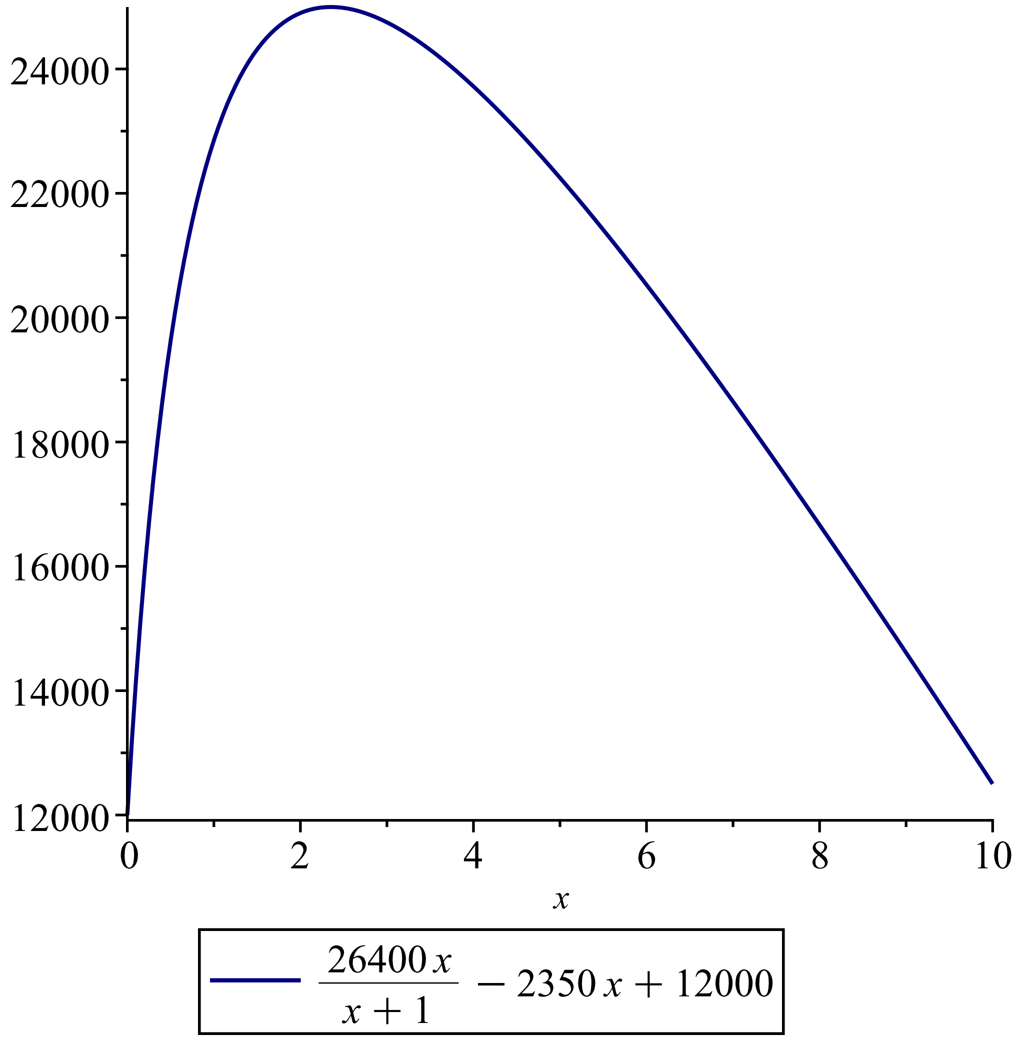
En model for dyrkning af en bestemt kornsort er givet:
$f(x) := \frac{26400\,x}{x+1} - 2350\,x + 12000$:
Bestemt i intervallet $0 \leq x \leq 10$.

Der byttes rundt, så fortjenesten bestemmes først.
Ingen kunstgødning betyder, at $x = 0$, da er
$f(0)$

$$12000 \tag{9.1.1}$$

Dvs. fortjenesten vil være 12000 kr pr. hektar.

Funktionen tegnes:
plot($f(x)$, $x = 0..10$, *legend* = [$f(x)$], *color* = ["Navy"])



Delopgave b)

Modellen differentieres.
$f'(x) = 0$

$$\frac{26400}{x+1} - \frac{26400\,x}{(x+1)^2} - 2350 = 0 \quad \textbf{(9.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -1 - \frac{4}{47}\sqrt{1551}\right], \left[x = -1 + \frac{4}{47}\sqrt{1551}\right]\right] \quad \textbf{(9.2.2)}$$

$evalf[5]\left(\left[\left[x = -1 - \frac{4}{47}\sqrt{1551}\right], \left[x = -1 + \frac{4}{47}\sqrt{1551}\right]\right]\right)$

$$[[x = -4.3517], [x = 2.3517]] \quad \textbf{(9.2.3)}$$

Da funktionen har een top, må det være toppunktet af funktionen, der har den vandrette vendetangent. Da indsættes den positive variabel x fra den afledede ind i $f(x)$, man får da

$f\left(-1 + \frac{4}{47}\sqrt{1551}\right)$

$$200\left(-1 + \frac{4}{47}\sqrt{1551}\right)\sqrt{1551} + 14350 - 200\sqrt{1551} \quad \textbf{(9.2.4)}$$

$\xrightarrow{\text{at 10 digits}}$

$$24996.90507 \quad (9.2.5)$$

Dvs. koordinatsættet til punktet hvoraf der er en vandret vendetangent er
$P = (2.3517, 24996.90507)$

Fortolkning:
Tilsætter man 2.3517 tons kunstgødning pr hektar, vil fortjenesten være 24996kr.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

Nulhypotesen opstilles:
$H_0 =$ *Aldersfordelingen i stikprøven er den samme som aldersfordelingen i populationen.*

De forventede værdier regnes.
$0.15 \cdot 479$

$$71.85 \quad (10.1.1)$$

$0.16 \cdot 479$

$$76.64 \quad (10.1.2)$$

$0.19 \cdot 479$

$$91.01 \quad (10.1.3)$$

$0.17 \cdot 479$

$$81.43 \quad (10.1.4)$$

$0.17 \cdot 479$

$$81.43 \quad (10.1.5)$$

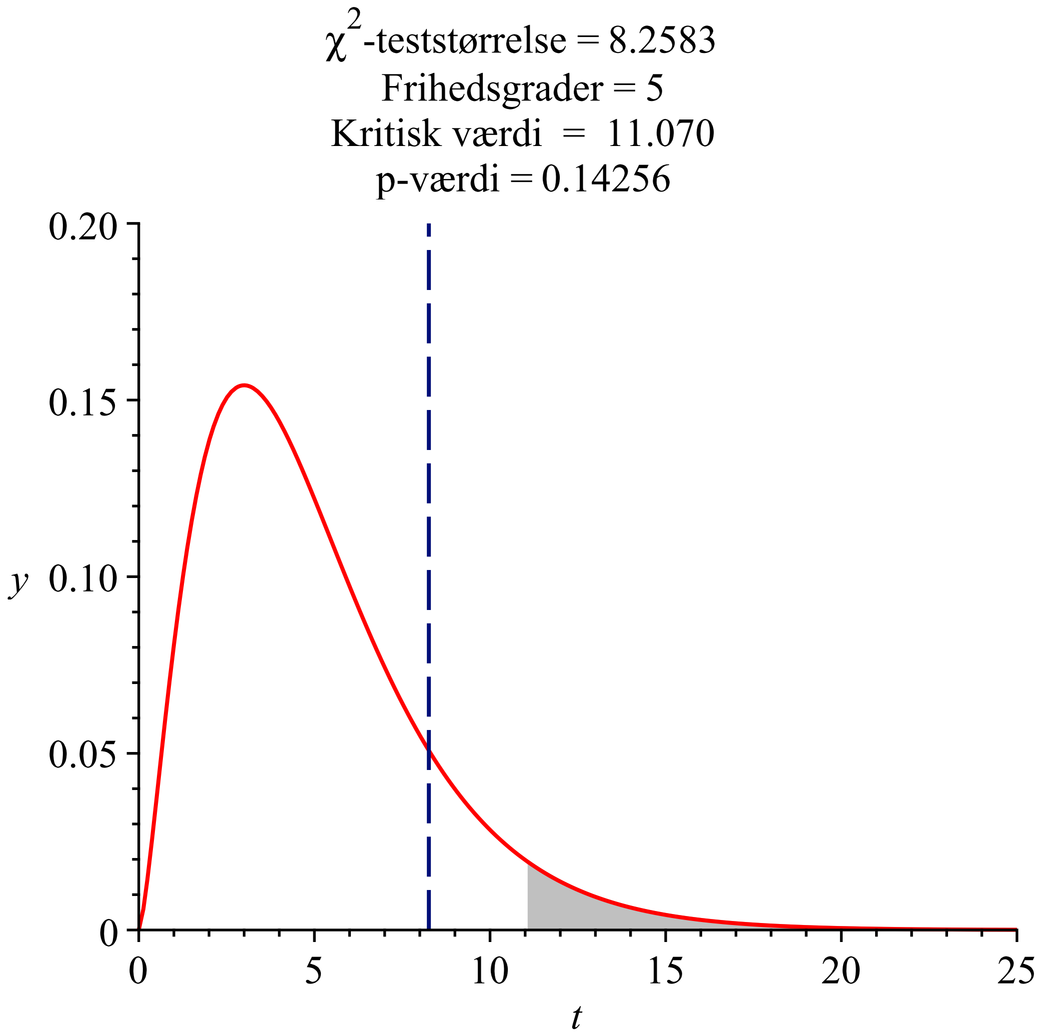
$0.16 \cdot 479$

$$76.64 \quad (10.1.6)$$

Hermed blev de forventede værdier bestemt

Delopgave b)

Da undersøges, om man kan forkaste nulhypotesen.
forv := [71.85, 76.64, 91.01, 81.43, 81.43, 76.64] :; *obs* := [90, 85, 80, 78, 79, 67] :
ChiKvadratGOFtest(*obs*, *forv*, *level* = 0.05)



Da p - værdien er 0.14 og signifikansniveauet er 0.05, kan nulhypotesen *ikke* forkastes.
Der er ingen signifikans forskel på fordelingen i stikprøven og populationen

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

Funktionerne defineres

$f(x) := 2^x$:; $g(x) := 1.5\,x + 1$:

Ligningerne løses:

$f(x) = g(x)$

$$2^x = 1.5\,x + 1 \qquad \textbf{(11.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -0.], [x = 2.000000000]] \qquad \textbf{(11.1.2)}$$

Dvs. skæringspunkterne er:

$x = 0 \vee x = 2$

Delopgave b)

Da $g(x)$ ligger over $f(x)$, da er integralet så

$$M = \int_0^2 g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$M = 0.6719148773 \qquad \textbf{(11.2.1)}$$

Dette er også muligt at bestemme pr. håndkraft.

$G(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + k$ og $F(x) = \frac{1.5}{2} \cdot x^2 + x + k$

Men da arealet bestemmes har man

$$M = \left[\frac{1.5}{2} \cdot x^2 + x - \left(2^x \cdot \ln(2)\right) \right]_0^2 = \frac{1.5}{2} \cdot 2^2 + 2 - \left(\frac{2^2}{\ln(2)} \right) - \left(\frac{1.5}{2} \cdot 0^2 + 0 - \left(\frac{2^0}{\ln(2)} \right) \right)$$

$$= 0.6719148773$$

Så arealet er da $\underline{\underline{M = 0.6719}}$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

Spilleren = *Cristiano Ronaldo*

$|AD|$ er linjestykket for målet.
$|AE|$ er det linjestykke som Cristiano Ronaldo skal skyde bolden i.

$\angle B_{ABC}$ bestemmes.

$\angle B_{ABC} = \cos\left(\frac{|BC|}{|AB|} \right)$, indsættes værdierne er

$$\angle B_{ABC} = invCos\left(\frac{4}{6} \right)$$

$$\angle (B_{ABC}) = 48.18968509 \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle B_{ABC} = 48.18968509^o}}$

Det vil være oplagt at anvende Pythagoras i ΔABC, da
$|AB| = 6$, $|BC| = 4$, man har
$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$, indsættes værdierne fås
$6^2 = 4^2 + |AC|^2$

$$36 = 16 + |AC|^2 \qquad \textbf{(12.1.2)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for AC}}$$

$$[[AC = 2\sqrt{5}], [AC = -2\sqrt{5}]] \qquad \textbf{(12.1.3)}$$

Dvs. længden $|AC|$ er $\underline{\underline{2 \cdot \sqrt{5}\ m}}$

Delopgave b)

Her anvendes tangens til vinkel B på baggrund af $\frac{|CD|}{|BC|}$, da er

$\angle B_{BCD} = invTan\left(\frac{3 + 2\sqrt{5}}{4}\right)$

$$\angle(B_{BCD}) = 61.83886964 \qquad \textbf{(12.2.1)}$$

Så er $\angle B_{ABD} = \angle B_{BCD} - \angle B_{ABC}$, dvs.

$\angle B_{ABD} = 61.83886964 - 48.18968509$

$$\angle(B_{ABD}) = 13.64918455 \qquad \textbf{(12.2.2)}$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle B_{ABD} = 13.64918455^{o}}}$

Afstanden $|AE|$ bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$|AE| = \sqrt{|BE|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |BE| \cdot |AB| \cdot Cos(B_{ABD})}$, værdierne indsættes

$|AE| = \sqrt{6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot Cos(13.64918455)}$

$$|AE| = 1.425961851 \qquad \textbf{(12.2.3)}$$

Dvs. afstanden som *Cristiano Ronaldo* skal holde sig indenfor er
$\underline{\underline{|AE| = 1.425\ m}}$

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Delopgave a)

Der er oplyst

$V = \frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2$

$\mathrm{O} = (3 + \sqrt{5}) \cdot x \cdot l + 2 \cdot x^2$.

Man ønsker

$\mathrm{O}(x)$. Først isoleres l i udtrykket V. Man får oplyst, at $V = 10\ dm^3$

$10 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2 \Leftrightarrow 20 = l \cdot x^2 \Leftrightarrow l = \frac{20}{x^2}$. Dette indsættes i udtrykket O.

$\mathrm{O} = (3 + \sqrt{5}) \cdot x \cdot \left(\frac{20}{x^2}\right) + 2 \cdot x^2 = \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot 20}{x} + 2\,x^2 = \frac{60 + 20\sqrt{5}}{x} + 2\,x^2$

local O :

Funktionen defineres som:

$O(x) := \frac{60 + 20\sqrt{5}}{x} + 2x^2$

$$x \rightarrow \frac{60 + 20\sqrt{5}}{x} + 2x^2 \qquad \textbf{(13.1.1)}$$

Så bestemmes den afledede, således man kan finde den mindste overfladeareal.
$O'(x) = 0$

$$-\frac{60 + 20\sqrt{5}}{x^2} + 4x = 0 \qquad \textbf{(13.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3} + \frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3} - \frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3}\right]\right] \qquad \textbf{(13.1.3)}$$

De komplekse talværdier forkastes. Da er
$x = \left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3}$

$$x = \left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3} \qquad \textbf{(13.1.4)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = 2.9693 \qquad \textbf{(13.1.5)}$$

Den værdi, der giver den mindste overfladeareal. Dette eftertjekkes:
$O''\left(\left(15 + 5\sqrt{5}\right)^{1/3}\right)$

$$\frac{2\left(60 + 20\sqrt{5}\right)}{15 + 5\sqrt{5}} + 4 \qquad \textbf{(13.1.6)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$12.000 \qquad \textbf{(13.1.7)}$$

Her er 12 > 0, dvs lokalt minimum. Derved har man den mindste overfladeareal:
$\underline{\underline{x = 2.9693\ dm}}$